Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103984**

ID профиля: **171877**

Вариант 19

Математика, 11 класс

Вариант - 19, часть I

Чистовик

№1

Пусть x - первый член данной ~~геометри~~ арифмети-ческой прогрессии, d - её разность.

$d = a_2 - a_1$ - целое число, $d > 0$ - прогрессия возрастает $\Rightarrow d \in \mathbb{N}$

$a_9 a_{17} > S + 12 \Leftrightarrow (x + 8d)(x + 16d) > 14x + \frac{13 \cdot 14}{2} d + 12$,

так как обе части неравенства целы, то это равносильно:

$x^2 + 24xd + 128d^2 \geq 14x + 91d + 13$

Аналогично, $a_{11} a_{15} < S + 47 \Leftrightarrow (x + 10d)(x + 14d) \leq 14x + 91d + 46$. Сложив данные неравенства, получим:

$(x^2 + 24xd + 128d^2) + (14x + 91d + 46) \geq (x^2 + 24xd + 140d^2) + (14x + 91d + 13)$; $33 \geq 12d^2$, откуда т.к. $d \in \mathbb{N}$, то $d = 1$, иначе $12d^2 \geq 48 > 33$.

Тогда неравенства принимают вид:

$\begin{cases} x^2 + 24x + 128 \geq 14x + 91 + 13 \\ x^2 + 24x + 140 \leq 14x + 91 + 46 \end{cases}$ в силу равносильности проделанных нами преобразований исходных неравенств, будет подходить любое и только любое целое x, удовлетворяющее данной системе.

$$\begin{cases} x^2+10x+3 \leq 0 \\ x^2+10x+24 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)^2 \leq \cancel{24}22 \\ (x+5)^2 \geq 1 \end{cases} \overset{\text{т.к. } x+5 \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} (x+5)^2 \leq 16 \quad - \quad x+5 \in [-4;\ 4] \\ (x+5)^2 \geq 1 \quad - \quad x+5 \in (-\infty;\ -1] \cup [1;\ \infty) \end{cases}$$

$x \in [-9;\ -1]$

$x \in (-\infty;\ -6] \cup [-4;\ \infty)$

Подходят следующие x:

$\{-9;\ -8;\ -7;\ -6;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1\}$

Ответ: $a \in \{-9;\ -8;\ -7;\ -6;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1\}$

Чистовик!!!

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b;\ 25)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\\ a^2+b^2\le -8a-6b\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases} & \text{- I-я система}\\ \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le -8a-6b\end{cases} & \text{- II-я система.}\end{cases}$$

Найдём геометрическое место точек $(x;y)$, удовлетворяющее обеим системам, а затем рассмотрим площадь их пересечения.

I-я система) Нам подходит из первого неравенства любая точка $(x;y)$, лежащая внутри или на границе круга радиуса 5 с центром в точке $(a;b)$, где $(a;b)$ из второго неравенства лежит внутри или на границе ~~о~~ круга радиусом 5 и центром 0.

Покажем, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы точка $(x;y)$ подходила является нер-во:

$x^2+y^2\le 100.$

Чистовик

~~Др~~

Действительно, пусть $A-(0;0)$, $B(a;b)$, $C-(x;y)$. $BC \leq 5$ и $AB \leq 5$, откуда по нер-ву треугольника: $AC \leq AB + BC \leq 10$.

И наоборот, если $AC \leq 10$, нам подходит $a = \frac{x}{2}$ и $b = \frac{y}{2}$, тогда $AB = BC = \frac{1}{2} AC \leq 5$.

ГМТ точек $(x;y)$ – ~~окружность~~ круг радиуса 10 с центром в начале координат, где точки $(x;y)$ могут лежать и внутри, и на границе круга.

II-я система) $a^2+b^2 \leq -8a-6b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2+8a+16+b^2+6b+9 \leq 25$; $(a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25$

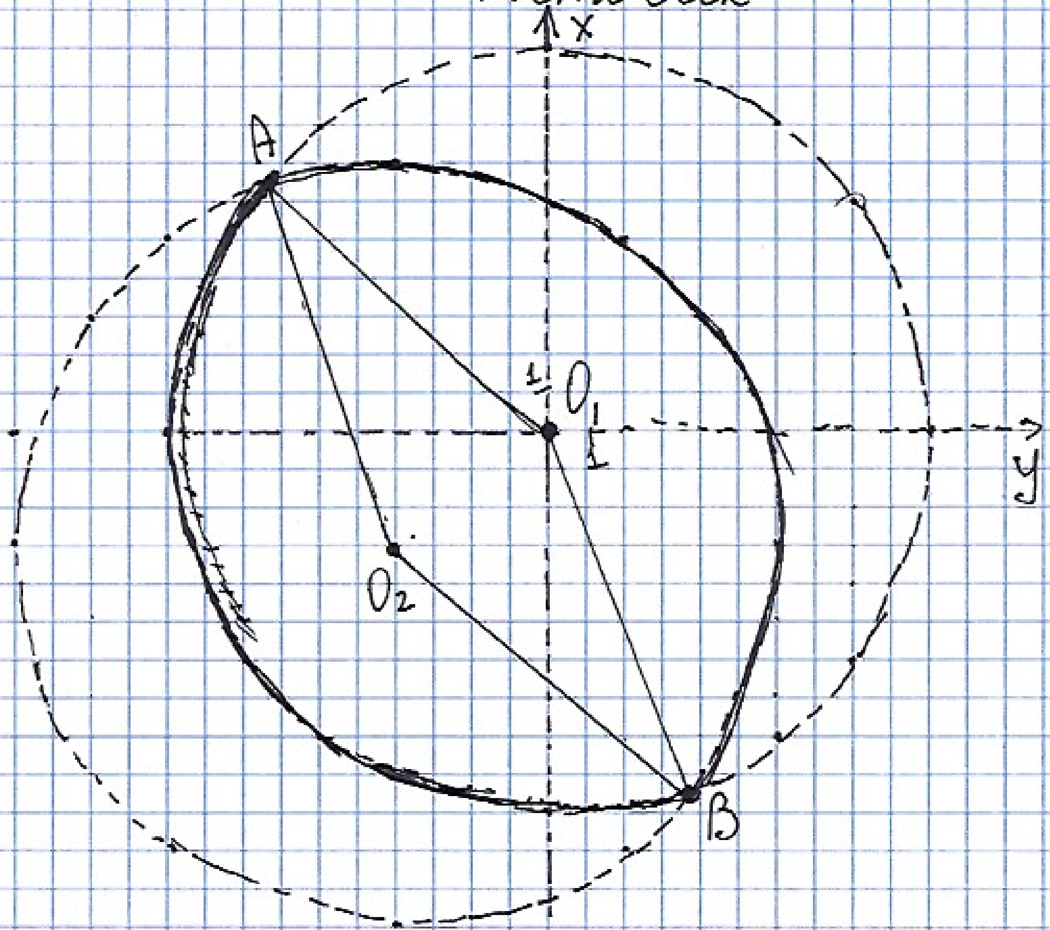
~~Часть~~ ГМТ точек $(x;y)$, удовлетворяющих системе из аналогичных рассуждений системе I:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25 \\ \cancel{a^2+b} \ (a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25 \end{cases}$$

является круг с центром в точке $(-4;-3)$ и радиусом 10

На координатной плоскости ~~данное~~ пересечение данных ГМТ выглядит так (обведено ~~двойной~~ жирной сплошной)

Чистовик



Пусть O_1 - центр окружности, заданной 1-ой системой, O_2 - второй A и B - их точки пересечения. AO_2BO_1 - ромб со стороной 10, $O_1O_2 = 5$, из теоремы Пифагора: $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2 = (AO_2)^2$

$AB^2 + O_1O_2^2 = 400, \quad AB = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$

По теореме косинусов:

$\cancel{\angle AO_2}\ AB^2 = AO^2 + O_2B^2 - 2AO \cdot O_2B \cos \angle AO_2B$

$375 = 200(1 - \cancel{2}\cos \angle AO_2B)$

$\frac{15}{8} = 1 - \cancel{2}\cos \angle AO_2B, \quad \cos \angle AO_2B = -\frac{7}{\cancel{16}\,8}$

Площадь кругового сектора $A\cancel{B}O_2B$ =

$\frac{100 \cdot \arccos\left(-\frac{7}{\cancel{16}8}\right)}{2}$. (Площадь сектора AO_1B равна тому же из симметрии) ~~вычисляется аналогично)~~

5

Площадь ромба $AO_2\cancel{O_1}BO_1 = \dfrac{AB\cdot O_2O_1}{2} =$

$= \dfrac{25\sqrt{15}}{2}$.

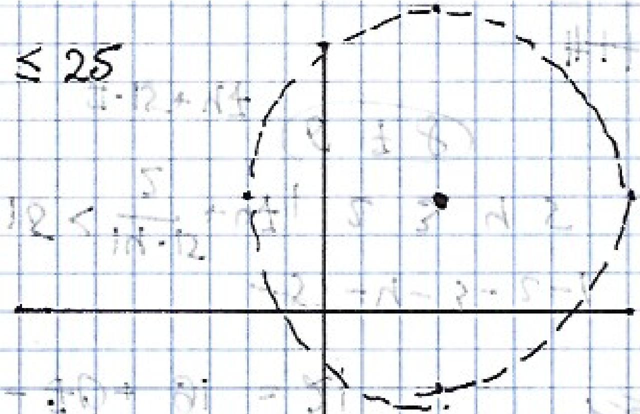
Итого, площадь M равна:
площадь кругового сектора AO_2B +
+ площадь кругового сектора AO_1B −
− площадь ромба $AO_2BO_1 = 100\cdot\arccos\left(-\dfrac{7}{8}\right) -$

$- 12.5\sqrt{15}$

Ответ: $100\arccos\left(-\dfrac{7}{8}\right) - 12.5\sqrt{15}$

Чистовик!!!

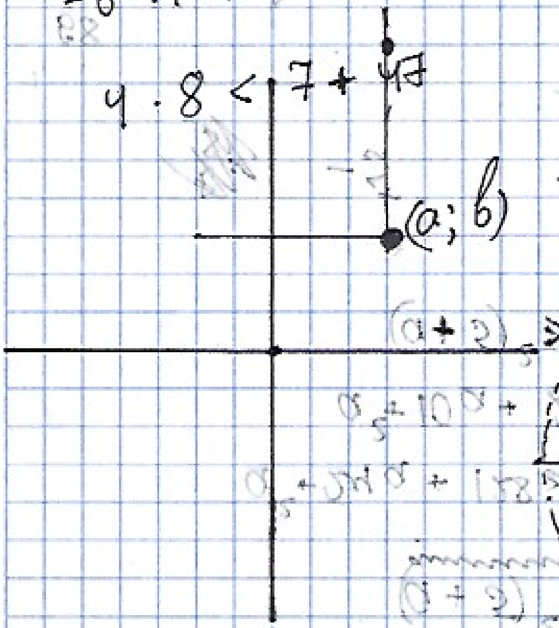
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$



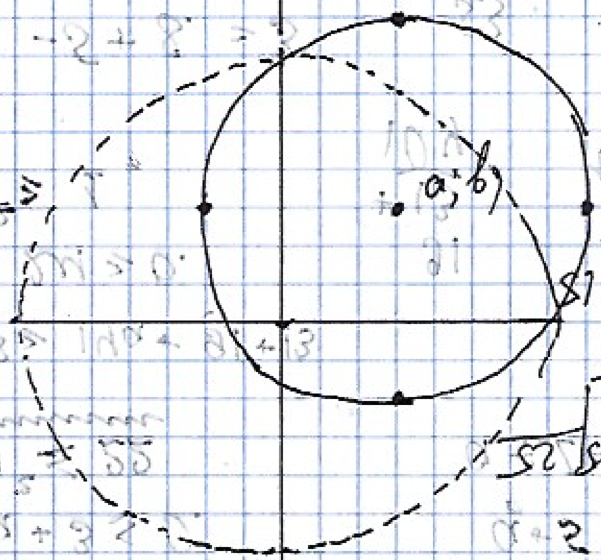
$2\cdot 10 > 7+12$

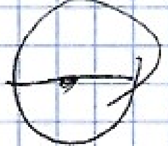
$-6\cdot 14+91=7$

$4\cdot 8 < 7+47$



$-8x-$



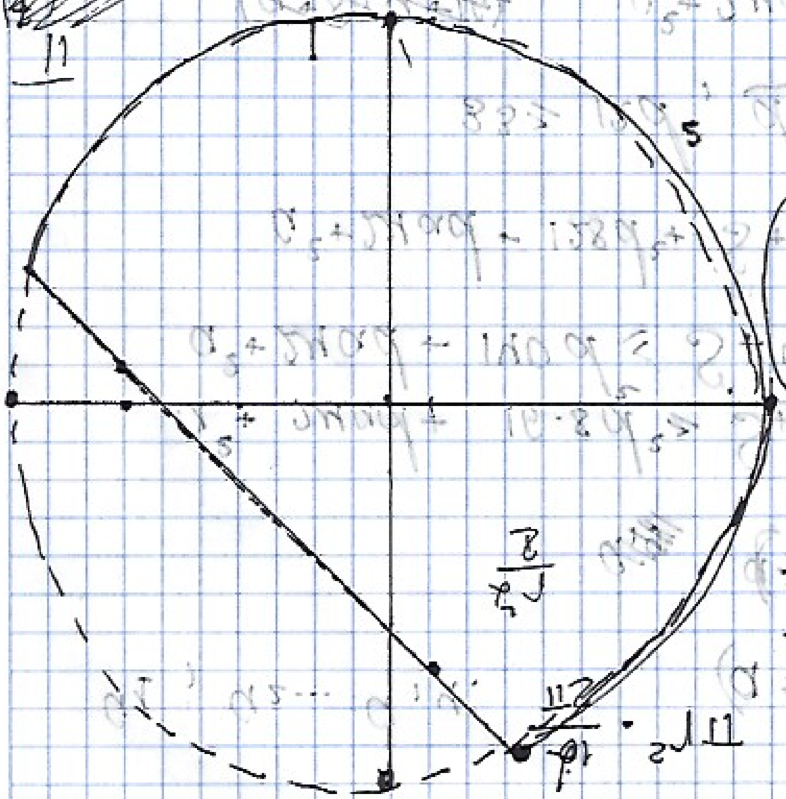


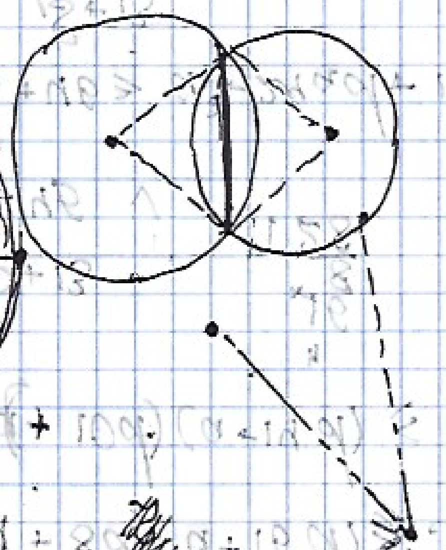
$-8a-6b \le 25$ $\quad -8x-6y=25$

$-8x-25=6y$ $\quad (0;\ -4.25)$

$(-0.5;\ -3.5)$

$(-3.5;\ 0.5)$





$a_1, a_2 \ldots a_{14}$.

$(a+8d)(a+16d) \geq S+13$

$(a+10d)(a+14d) \leq S+46$

$a^2 + 24ad + 16\cdot 8d^2 \geq S+13$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 8 \\ \hline 128 \end{array}$

$a^2 + 24ad + 140d^2 \leq S+46$ ✓

$a^2 + 24ad + 128d^2 + S + 46 \geq a^2 + 24ad + 140d^2 + S + 13$

$33 \geq 12d^2$, $\underline{d=1}$

91

$\cancel{(a+8)(a+16)}$ $a^2 + 24a + 16\cdot 8 \geq 13 + 14a +$

$a^2 + 10a +$

$a^2 + 24a + 140 \leq 14a + 91 + 46$

$a^2 + 10a + 3 \leq 0$. $a+5 \in [-4; 4]$

$(a+5)^2 \leq 22$ $a \in [-9; -1]$

$a^2 + 24a + 128 \geq 14a + 91 + 13$

$a^2 + 10a + 24 \geq 0$.

$(a+5)^2 \geq 1$

$\begin{array}{r} 91 \\ +\ 13 \\ \hline 104 \end{array}$ $\begin{array}{r} 91 \\ +\ 48 \\ \hline 139 \end{array}$

-5 $-5 + 8 = 3$ 33

$-5 + 16 = 11$

68

$S = -70 + 91 = 21$

$-5\ -4\ -3\ -2\ -1$

$11 \cdot 15 < \frac{14\cdot 15}{2} + 47$ 1 2 3 4 5

6 7 8

$7\cdot 15 + 47$

$\#+11 + 6$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103984**

ID профиля: **171877**

Вариант 19

Чистовик

Математика 11 класс

Часть - 2, Вариант - 19

№ 4

Так как $НОК(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$, то в числа a, b, c не входят никакие простые множители кроме 3 и 7

Пусть $\alpha; \beta; \gamma$ - степени вхождения 3 в разложение на простые множители a, b, c. Нам подходят ~~любые~~ и только любые 3 целых числа $\alpha, \beta; \gamma$ таких, что
$\min(\alpha; \beta; \gamma) = 1$ - из $НОД(a; b; c) = 3 \cdot 7$
$\max(\alpha; \beta; \gamma) = 17$. - из $НОК(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$, (*)

Последовательностей, где: $\alpha, \beta, \gamma \in$
$[1; 17] - 17^3$ $\quad$ $[2; 17] - 16^3$.
$[1; 16] - 16^3$ $\quad$ $[2; 16] - 15^3$

Вычтя из числа всех последовательностей α, β, γ числа тех последовательностей, где нет 1, и тех, где нет 17, а затем прибавив количество последовательностей, где нет ни 1, ни 17, мы получим число требуемых последовательностей:

$17^3 - 16^3 - 16^3 + 15^3 = 17^2 + 16 \cdot 17 + 16^2 - 16^2 - 16 \cdot 15 - 15^2 =$
$= 16 \cdot 2 + 2 \cdot 32 = ~~100~~\ 96$ (где есть хотя бы 1 единица и хотя бы одна 17)

(*) ~~а в~~

Чистовик

Аналогично найдём число вариантов степени вхождения 7 в (a; b; c):

~~$14^3-13^3-13^3+12^3 = 14^2+13^2+14\cdot13-13^2-12^2-13\cdot12 =$~~

~~$= 2\cdot26+13\cdot2 = 78$~~ из расчёта того, ~~что~~ что минимальная степень вхождения – 1, максимальная – 15

$15^3-14^3-14^3+13^3 = 15^2+14^2+15\cdot14-14^2-13^2-14\cdot13 =$

$= 2\cdot28+2\cdot14 = 3\cdot28 = 84$

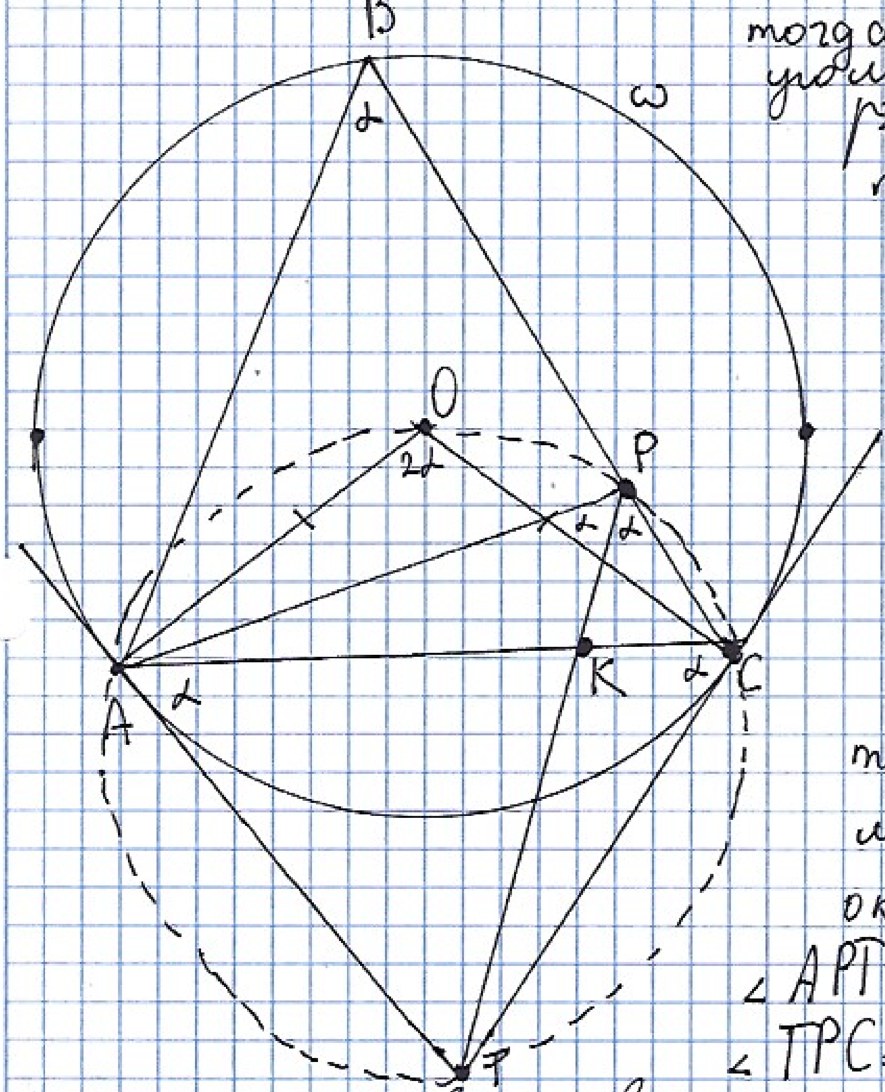
Так как степени вхождения 3 и 7 не зависят друг от друга:

Число троек (a; b; c) = число троек вхождений степени 3 · число троек вхождений степени 7 = $96\cdot84 = 8064$

Ответ: 8064

Чистовик

№6(а) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда т.к. $\triangle ABC$ остроугольный ~~равносторонний~~, то $\angle AOC = 2\alpha$,



$\overset{\frown}{AC} = 2\alpha$, $\angle CAT = \angle ACT = \alpha$, $\angle ATC = 180^\circ - \angle CAT - \angle ACT = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \angle AOC -$ точки A, O, P, C, T лежат на одной окружности

$\angle APT = \angle ACT = \alpha$, $\angle TPC = \angle TAC = \alpha$, по теореме ~~в~~ о внешнем угле $\angle BAP = \angle APC - \angle ABC = 2\alpha - \alpha = \angle ABC \Rightarrow \alpha$, $AP = BP$.

$$\frac{10}{6} = \frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{(AP \cdot PK \cdot \sin\alpha)/2}{(PK \cdot PC \cdot \sin\alpha)/2} = \frac{AP}{PC}; \quad \frac{BP}{PC} = \frac{10}{6};$$

$$\frac{BC}{PC} = \frac{16}{6}. \quad \frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{(AC \cdot \sin\angle ACB \cdot BC)/2}{(AC \cdot PC \cdot \sin\angle ACB)/2} = \frac{16}{6}.$$

$$S_{APC} = 16. \quad S_{ABC} = \frac{16^2}{6} = \frac{128}{3}$$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{128}{3}$

Чистовик

№ 6 (б)

Из 6.а: $\frac{AP}{PC} = \frac{10}{6}$; $AP = 10x$; $PC = 6x$, $S_{APC} = 16$.

$\sin 2\alpha = \sin \angle APC = \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1+4} = \frac{4}{5}$ ($tg\,\alpha = 2$ по условию)

$S_{APC} = \frac{AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha}{2} = 30x^2 \cdot \frac{4}{5} = 24x^2 = 16.$

$x^2 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$; $100x^2 = AP^2 = \frac{200}{3}$, $60x^2 = AP \cdot PC =$

$= 40$, $36x^2 = PC^2 = 24$

По теореме косинусов:

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 \cdot AP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1-4}{1+5} = -\frac{3}{5}$

$AC^2 = \frac{200}{3} + 24 + 2 \cdot 40 \cdot \frac{3}{5} = \frac{200}{3} + 24 + 48 =$

$\frac{200}{3} + 72 = \frac{200+216}{3} = \frac{416}{3} = \frac{4 \cdot 104}{3} = \frac{16 \cdot 26}{3}$

$AC = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$

Ответ: $AC = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$

Чистовик, №5

Пусть $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=a$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=b$,

$\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\left(\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^b=\frac{x}{2}-1$; $\quad \frac{x}{2}-\frac{1}{4}^{c}=\sqrt{x-\frac{11}{4}}^{4}$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^{2a}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$;

ОДЗ: $\sqrt{x-\frac{11}{4}}\neq 1$; $x-\frac{11}{4}\neq 1$; $x-\frac{11}{4}>0$;

$\left(\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^{2abc}=\left(\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^4$; $abc=2$

Пусть два из этих логарифмов равны y, а третий $-y+1$

$y^2(y+1)=2$. $y^3+y^2-2=0$, $(y-1)(y^2+2y+2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} y^2+2y+2=0. \quad D=4-8<0 \text{ - корней нет.} \\ y-1=0, \quad y=1 \end{array}\right.$$

~~Рассмотрим 3 случая~~:

~~1) $a=b=1$~~

$\cancel{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}$; $\cancel{\sqrt{x-\frac{11}{4}}=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}$;

$\cancel{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2}$

ОДЗ: $\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\sqrt{x-\frac{11}{4}}$ больше 0

и не равны 1 (их степени находятся в основании логарифмов)

Чистовик

Рассмотрим 3 случая:

1) $a=b=1,\ c=2.$

$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2;\quad \frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4};\ \frac{x}{2}=\frac{10}{4};$

$x=5.\ -\ c=2.$

$\log_{\left(\frac{3}{2}\right)^2} 2.25=1;\quad \sqrt{x-\frac{11}{4}}=\frac{x}{2}-1\rightarrow b=1,$

все ОДЗ выполнены – $x=5$ подходит

2) $a=c=1,\ b=2:$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-1;\quad \frac{x}{2}=\frac{7}{4};\ x=3.5-$

$b=2$, ~~$x<\frac{11}{4}=3$~~

Чтобы $a=1:\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$(0.75)^2=1.5$ – неверно, в этом случае подходящих x нет

3) $b=c=1,\ a=2.$

(**) $\boxed{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2}$; ~~$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{16}$~~

~~$x^2-6x+\frac{61}{2}=0.\quad (x-3)^2+\frac{43}{2}=0$ – не имеет корней, этот случай невозможен~~

~~Ответ: $x=5$~~ ~~$x^2-6x+\frac{125}{16}=0.$~~

~~$x=\frac{6\pm\sqrt{36-\frac{125}{4}}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{\frac{19}{4}}}{2}$~~

* $\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{x}{2}-1;$ <= $\boxed{\text{если такое } x \text{ есть, то } (*) \text{ и } (**)}$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{x}{2}-1$ – корней нет

Ответ: $x=5$

$$x - \frac{11}{4} = \frac{x}{2} - 1. \qquad \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = 2.25$$

$$x = 6.5$$

$$\frac{x}{2} = \frac{13}{4}$$

1.5

$$\frac{3.5}{2} = 1.75 - 1 = 0.75$$

$$x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{121}{16} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{125}{16} = 0.$$

$$x^2 + \frac{125}{16} \geq$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 9 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\frac{125}{16} > 9$$

$$x^2 - 6x + \frac{125}{16} = 0.$$

$$36 - \frac{125}{4} =$$

$$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^4 = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{144 - 125}{4} = \frac{19}{4}$$

$$\left(\frac{x}{2} - 1\right) < 1 \qquad 6 \pm$$

$$\frac{121}{16} + \frac{11}{2}x - x^2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{11}{4} - x\right)^2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{121}{16}$$

$\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = \log\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

$\log_a b = \log_c a$

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\sqrt{x-\frac{11}{4}} = \frac{x}{2}-1$

$\log_a b = \log_b c$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$a \quad b \quad c$

$\left(\sqrt[4]{b}\right)^{c}$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\sqrt{x-\frac{11}{4}}$

$\left(\left(\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^2\right)^{b}$ a c

$\left(\left(\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^2\right)^{b}$ $\left(\left(\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^{b}\right)^2$ $= \sqrt{x-\frac{11}{4}}^{\,4}$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{4}$ $bc = 2.$

$x \neq 1$

$x\,x(x+1) =$

$x^3+x^2=2$

$x^3+x^2-2=0.$

$x^2-6x+\frac{61}{2}$

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$

$61-18=43$

$y \cdot y \cdot (y+1) = 2$