Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103952**

ID профиля: **77242**

Вариант 19

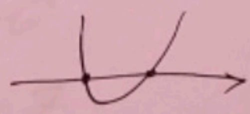
чистовик

$\Rightarrow$

① $(a_1+10)(a_1+14) < 14a_1+138$

$a_1^2+24a_1+140 < 14a_1+138$

$a_1^2+10a_1+2<0$



$D = 25-2=23$

$a_{1,2} = -5 \pm \sqrt{23}$ $\Rightarrow$

$-5-\sqrt{23} < a_1 < -5+\sqrt{23}$

$4 < \sqrt{23} < 5$, т.к a_1 целое $\Rightarrow$

$a_1 \le -5+4$ $\quad$ $a_1 \le -1$

$-5 < -\sqrt{23} < -4$ $\quad$ $-10 < -5-\sqrt{23} < -9$

$a_1 \ge -9$ $\quad$ $-9 \le a_1 \le -1$

но т.к. $a_1 \ne -5$ $\quad$ $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 = \{-9\} \cup \{-8\} \cup \{-7\} \cup \{-6\} \cup \{-4\} \cup \{-3\} \cup \{-1\}$

1.

$$\frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot 14 = 7(a_1+a_{14}) = S = 7(2a_1+13d)$$

$a_9 a_{17} > S+12$ $\qquad$ $-a_9 a_{17} < -S-12$

$a_{11} a_{15} < S+47$ $\qquad$ $a_{11} a_{15} < S+47$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ $\qquad$ $a_{11}a_{15} - a_9 a_{17} < 35$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$(a_1+10d)(a_1+14d) - (a_1+8d)(a_1+16d) < 35$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{24da_1} + 140d^2 - \cancel{a_1^2} - \cancel{24da_1} - 128d^2 < 35$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12}$

$d^2 < 2\frac{11}{12}$

арифм. возр. прогрессия, члены целые, тогда $d=1$

$S = 7(2a_1+13d) = 14a_1 + 91$

$a_9 a_{17} > 14a_1 + 91 + 12$

$(a_1+8)(a_1+16) > 14a_1 + 103$

$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

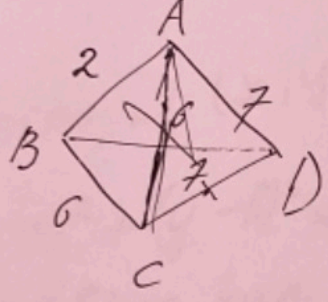
$(a_1+5)^2 > 0$

$a_1 \neq -5$

$a_{11} a_{15} < S+47$ $\qquad$ =>

Чистовик 3

(2)



$AB = 2$

$AC = CB = 6$

$AD = DB = 7$

Проведем через AB плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. Она будет перпенд. оси цилиндра, она будет

перпенд. и CD т.к. CD парал-на оси

Назовем эту плоскость ℓ. Пусть $\ell \cap CD = \{Z\}$, т.к. C и D лежат на боков пов-сти

Цилиндр и CD пар--на оси, то прямая CD лежит на боковой пов-ти $\Rightarrow$ Z тоже лежит на боковой поверх-ти $\triangle ABZ$ это пересечение тетраэдра ABCD с плоскостью ℓ

Так как плоскость $\ell \perp CD \Rightarrow \ell$ перпенд. оси $\Rightarrow$ круг. в пересеч. ℓ и цилиндра равен кругу основание цилиндра. Назовем этот круг ω,

4

3 M сост из $(x;y)$ таких, что существ a, b

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$$

Найдем решение второго неравенства

Если $a^2+b^2 \le \min$, это означает, что

$a^2+b^2 \le$ каждого члена, вход. в min

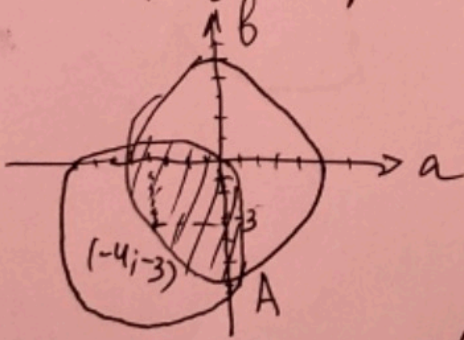
$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases} \qquad a^2+8a+b^2+6b \le 0$$

это круг с $R=5$
с центром $(0,0)$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9-25 \le 0$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$ – круг с $R=5$, центр $(-4,-3)$

Изобразим решение этого неравенства:



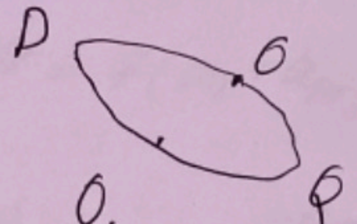
Обозначим это множество A

Тогда M - это множество (x, y) таких, что существует (a, b) из A и (x, y) находится на расстоянии не более 5 от (a, b)

Чистовик 5

Обозначим пересечение окружностей

P и Q

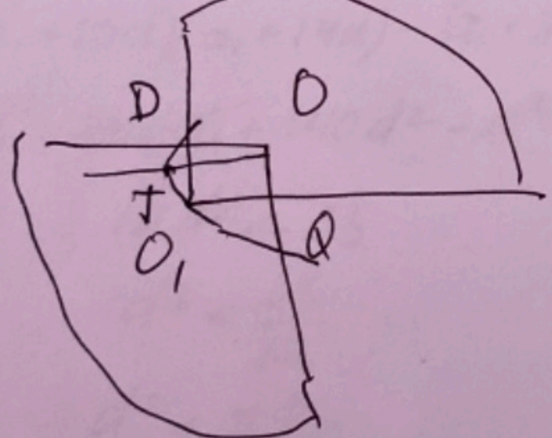


Нужно найти множество M.

Пусть точка $N(x, y)$ $N \in M$. Тогда существует $T \in A$ $NT \leq 5$, то т. $O \leq 5$.

Тогда по нер-ву треуг. $NO \leq 10$, $NO_1 \leq 10$

Проведем сектора



Если N лежит в один из этих секторов, тогда пров отрезок NO или NO_1, пересечет др. в т. T, $T \subset A$, $NT \leq 5$

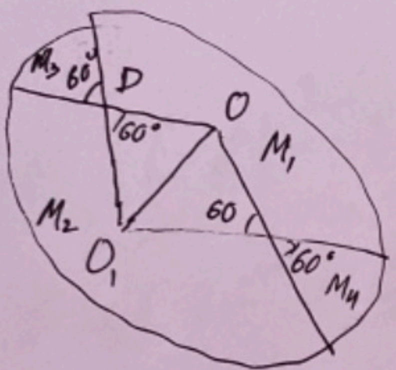
21103952 (U77242 M1295699)

чистовик 6

$\Rightarrow$ (3)

Если N не попал в эти сектора, тогда ближайшая до N точка из A будет P или Q, поэтому расс-е до них д.б. ≤ 5

Иначе получ-ем фигуру M:



это объед-е секторов M_1 M_2 M_3 M_4 и н. вычитать площадь ромба. Поскольку $\triangle POQ$ - равност $\Rightarrow$ $\angle OPO_1 = 60°$,

$\angle OQO_1 = 60°$

Вычислим

$$S_M = S_{M_1} + S_{M_2} + S_{M_3} + S_{M_4} - S_{OPO_1Q}$$

$$S_{M_1} = S_{M_2} = \frac{\pi 10^2}{3} = \frac{100\pi}{3}$$

$$S_{M_3} = S_{M_4} = \frac{\pi 5^2}{6} = \frac{25\pi}{6}$$

$$S_{OPO_1Q} = 2 S_{OPO_1} = 2\frac{1}{2}5^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$S_M = \frac{200\pi}{3} + \frac{25\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{225\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 75\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Ответ $75\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2}$

21103952 (U77242 M1295699)

чистовик 1

1.

$$\frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot 14 = 7(a_1+a_{14}) = S = 7(2a_1+13d)$$

$a_9a_{17} > S+12$ $\qquad$ $-a_9a_{17} < -S-12$

$a_{11}a_{15} < S+47$ $\qquad$ $a_{11}a_{15} < S+47$

$a_n = a_1+(n-1)d$ $\qquad$ $a_{11}a_{15} - a_9a_{17} < 35$

$a_9 = a_1+8d$

$a_{11} = a_1+10d$

$a_{15} = a_1+14d$

$a_{17} = a_1+16d$

$(a_1+10d)(a_1+14d)-(a_1+8d)(a_1+16d) < 35$

$\cancel{a_1^2}+\cancel{24da_1}+140d^2-\cancel{a_1^2}-\cancel{24da_1}-128d^2 < 35$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12}$

$d^2 < 2\frac{11}{12}$

арифм. возр. прогрессия, члены целые, тогда $d=1$

$S = 7(2a_1+13d) = 14a_1+91$

$a_9a_{17} > 14a_1+91+12$

$(a_1+8)(a_1+16) > 14a_1+103$

$a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+103$

$a_1^2+10a_1+25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0$

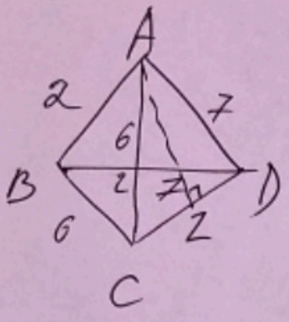
$a_1 \neq -5$

$a_{11}a_{15} < S+47$ $\qquad$ =>

21103952 (U77242 M1295699)

шотвак 8

(2)



$AB = 2$

$AC = CB = 6$

$AD = DB = 7$

CD - ?

Докажем, что $AB \perp CD$

$\Delta ACD = \Delta BCD$ (по 3м сторонам)

Проведем в ΔACD $AQ \perp CD$

Проведем в ΔCBD $BZ \perp CD$

Точки Q и Z совпадут ($Z = Q$), т.к. треуг-ки равн, т.к. $AZ \perp CD$ и $BZ \perp CD$, то

$CD \perp BAZ$

Назовем пл-сть BAZ ℓ

т.к. $CD \perp \ell$, то $CD \perp AB$

т.к $\ell \perp CD \Rightarrow \ell$ перп оси $\Rightarrow$ круг

в пересечении ℓ и цилиндра равен кругу

основания цилиндра назов круг ω,

ΔABZ вписан в круг ω,

$AZ = BZ$ т.к. это высоты равн треуг.

ΔABZ равноб. радиус опис окр.

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{AZ^2}{2\sqrt{AZ^2-1}}$$

Так как радиус д.б. минимален, то

возьмем произв $\Rightarrow$

(2) чистовик 8

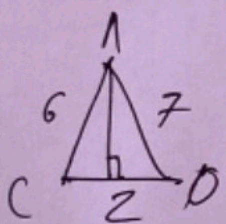
$$\left(\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}}\right)' = \frac{2a\cdot 2\sqrt{a^2-1} - 2\frac{2a}{2\sqrt{a^2-1}}a^2}{4(a^2-1)} =$$

$$= \frac{4a(a^2-1)-2a^3}{4(a^2-1)^{3/2}} = 0$$

$4a(a^2-1)-2a^3=0$ $\quad 4a^3-4a-2a^3=0$

$2a^3-4a=0$ $\quad a=0$ или $a=\pm\sqrt{2}$

$AZ=\sqrt{2}$



ΔAZD по Пифагору

$ZD=\sqrt{49-2}=\sqrt{47}$

ΔACZ по Пифагору

$CZ=\sqrt{34}$

$CD=\sqrt{34}+\sqrt{47}$

Ответ $CD=\sqrt{34}+\sqrt{47}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103952**

ID профиля: **77242**

Вариант 19

4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=21 \\ НОК(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

Найти кол-во троек (a,b,c)

Во-первых, $3^{17}\cdot 7^{15} \vdots a$, $3^{17}\cdot 7^{15} \vdots b$, $3^{17}\cdot 7^{15} \vdots c$, поэтому числа a, b, c не имеют никаких простых множителей, кроме 3 и 7

Пусть $a = 3^{x_1}\cdot 7^{y_1}$, $b = 3^{x_2}\cdot 7^{y_2}$, $c = 3^{x_3}\cdot 7^{y_3}$

x_i, y_i - целые неотрицательные

$НОД(a,b,c)=21=3\cdot 7$, т.е. $a \vdots 21$, $b \vdots 21$, $c \vdots 21$, поэтому $x_i \geq 1$, $y_i \geq 1$, $i=1,2,3$.

Но при этом, если $x_i \geq 2$, $i=1,2,3$, тогда a, b, c кратные 9, поэтому $НОД(a,b,c) \vdots 9$, но это неверно. Значит $x_i=1$ для некоторого i. Аналогично $y_i=1$ для нек. i.

Это можно записать так:

$\min(x_1,x_2,x_3)=1$, $\min(y_1,y_2,y_3)=1$

Аналогично рассмотрим НОК

$НОК(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \Rightarrow 3^{17}\cdot 7^{15} \vdots 3^{x_i}\cdot 7^{y_i}$, $i=1,2,3$

Значит $x_i \leq 17$, $y_i \leq 15$, $i=1,2,3$

Но т.к. НОК - наименьшее общее кратное, должен существ. $x_i=17$ для некоторого i и $y_j=15$ для некоторого j.

Ведь, например, если все $x_i \leq 16$, тогда $3^{17}\cdot 7^{15}$ не является НОК, т.к. $3^{16}\cdot 7^{15}$ тоже общее кратное

$\Rightarrow$

(4) =>

В итоге получается $\max(x_1, x_2, x_3) = 17$

$\max(y_1, y_2, y_3) = 15$

Т. к. разложение на простые множители единственно, тройкам (a, b, c) взаимно однозначно сопоставляются шестёрки $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$. Поэтому посчитаем их количество:

$$\begin{cases} \min(x_1, x_2, x_3) = 1 \\ \max(x_1, x_2, x_3) = 17 \\ \min(y_1, y_2, y_3) = 1 \\ \max(y_1, y_2, y_3) = 15 \end{cases}$$

Посчитаем количество троек (x_1, x_2, x_3), удовлет. усл. $\min(x_1, x_2, x_3) = 1$ $\max(x_1, x_2, x_3) = 17$. Среди (x_1, x_2, x_3) обязательно есть 1 и обязательно есть 17, а оставшееся число любое от 1 до 17.

Если оставшееся число 1, то таких троек 3 штуки: $(1, 1, 17), (1, 17, 1); (17, 1, 1)$

Если оставшееся число 17, то тоже 3 штуки: $(1, 17, 17); (17, 1, 17); (17, 17, 1)$

Если же оставшееся число от 2 до 16, то считаем кол-во перестановок $(1, x, 17)$ для всех x, $2 \le x \le 16$. Перестановок 6, а возможных значений x - 15.

Получаем общее кол-во троек (x_1, x_2, x_3):

$6 + 15 \cdot 6 = 6 + 90 = 96$

=>

5

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right), \quad \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right), \quad \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

Найдем допустимые значения x:

$\log_a b$ опр. при $a>0,\ b>0,\ a\neq 1$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2>0, \quad \left(\frac{x}{2}-1\right)^2\neq 1, \quad \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$

$\frac{x}{2}-1\neq 0 \qquad \frac{x}{2}-1\neq \pm 1 \qquad x>\frac{1}{2}$

$x\neq 2 \qquad x\neq 0,\ x\neq 4$

$\sqrt{x-\frac{11}{4}}>0, \quad \sqrt{x-\frac{11}{4}}\neq 1, \quad \frac{x}{2}-1>0$

$x-\frac{11}{4}>0 \qquad x-\frac{11}{4}\neq 1 \qquad x>2$

$x>\frac{11}{4} \qquad x\neq\frac{15}{4}$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \qquad \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1 \qquad \left(x-\frac{11}{4}\right)^2>0$

$x>\frac{1}{2} \qquad x\neq\frac{5}{2} \qquad x-\frac{11}{4}\neq 0$

$x\neq\frac{11}{4}$

Чистовик5

(5) ⇒ Объединяя все неравенства, получаем

$x > \frac{11}{4}$, тогда выполнены условия $x \neq 2, x \neq 0$,

$x \neq \frac{5}{2}$, $x \neq \frac{11}{4}$

Осталось добавить усл. $x \neq 4$, $x \neq \frac{15}{4}$

Условия на x: $x > \frac{11}{4}$, $x \neq \frac{15}{4}$, $x \neq 4$

Обозначим: $a = \frac{x}{2} - 1$, $b = x - \frac{11}{4}$, $c = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

Тогда исходные три числа равны:

$\log_{a^2} c$, $\log_{\sqrt{b}} a$, $\log_c b^2$

Или, пользуясь св-вами логарифмов:

$\frac{1}{2}\log_a c$, $2\log_b a$, $2\log_c b$

Вычислим их произведения:

$\frac{1}{\cancel{2}}\log_a c \cdot \cancel{2}\log_b a \cdot 2\log_c b = \log_b c \cdot 2\log_c b = 2$

Итак, условие на числа: два из них равны пусть они равны u, третье больше на 1 (т.е. $u+1$), в произведении они дают 2:

$u^2(u+1) = 2$

$u^3 + u - 2 = 0$

$u = 1$ – решение

$$\begin{array}{r|l} u^3 + u - 2 & u - 1 \\ \hline -\;u^3 - u^2 & u^2 + u + 2 \\ u^2 + u & \\ -\;u^2 - u & \\ 2u - 2 & \\ -\;2u - 2 & \\ 0 & \end{array}$$

$u^2 + u + 2 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 2 < 0$

Значит $u = 1$ – решение

⇒

5 => чистовик

Получается, что числа равны 1, 1, 2

Рассмотрим случаи, когда каждое из них равно 1:

1) $\log_{a^2} c = 1$

$(a^2)^1 = c$

$a^2 = c$

$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ $\qquad \frac{x^2}{4} - x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{4} = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = 1$, $x = 5$

недопустимо!

2) $\log_{\sqrt{b}} a = 1$

$\sqrt{b} = a$

$\sqrt{x - \frac{11}{4}} = \frac{x}{2} - 1$

$x - \frac{11}{4} = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

$x - \frac{11}{4} = \frac{x^2}{4} - x + 1$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = x - \frac{11}{4}$

$\frac{x^2}{4} - 2x + \frac{15}{4} = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x_1 = 3 \quad x_2 = 5$

недопустимо!

Теперь посчитаем значения третьего числа

=>

⑤ =>

чистовик 7

при $x=5$:

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = 2\log_{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}}\left(5-\frac{11}{4}\right) = 2\log_{\frac{9}{4}}\frac{9}{4} = 2$

получаем при $x=5$: $\log_{a^2}c = \log_{\sqrt{b}}a = 1$, $\log_c b^2 = 2$

Других решений быть не может.

Допустим, обозначим каждое число $y_1 = \log_{a^2}c$,

$y_2 \log_{\sqrt{b}} a$, $y_3 = \log_c b^2$

Тогда либо $y_1 = y_2 = 1$, $y_3 = 2$ (это дает нам найденные $x=5$)

Либо $y_1 = y_3 = 1$, $y_2 = 2$, но если $y_1 = 1$, то $x=5$ тогда $y_2 \neq 2$

Аналогично, если $y_2 = y_3 = 1$, $y_1 = 2$, тогда из $y_2 = 1$ следует $x=5$, тогда $y_1 \neq 2$

Ответ: $x=5$

(4) =>

Абсолютно аналогично считается кол-во троек (y_1, y_2, y_3), только случаев, когда все три числа разные, будет меньше:

$(1, y, 15)$, $2 \le y \le 14$. Возможных знач. y - 13.

Общее кол-во троек (y_1, y_2, y_3):

$6 + 13 \cdot 6 = 6 + 78 = 84$

Шестерки $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ получается из троек (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3), поэтому количество таких шестерок равно произведению

$96 \cdot 84 = 8064$

Ответ: Количество троек (a, b, c) 8064