Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103926**

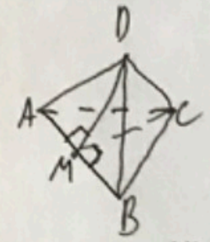
ID профиля: **348455**

Вариант 19

Математика 11 кл.

Чистовик

№2



$AB = 2$

$AC = CB = 6$

$AD = DB = 7$

Пусть M - середина AB

$AD = BD \Rightarrow \triangle ADB$ - р/б $\Rightarrow DM$ - высота

$\Downarrow$

$DM \perp AB$

$AC = BC \Rightarrow ACB$ - р/б $\Rightarrow CM$ - высота

$CM \perp AB$

$\left.\begin{array}{l} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow DMC \perp AB$

$\Downarrow$

т. D и C не совпад. AB $\perp$ любой прямой из ~~пл~~ пл. (MDC)

$\Downarrow$

$AB \perp DC$

Пусть a - ось цилиндра

$\left.\begin{array}{l} a \parallel DC \\ AB \perp DC \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp AB$

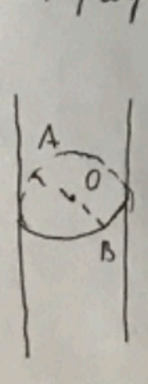
$\Downarrow$

AB лежит в пл. перпендикулярной a и проведённой из какой-то точки, лежащей на a (обратное св-во к этому)

Значит AB лежит в сечении цилиндра пл., ∥ основанию цил. Значит AB лежит на окр.

Заметим, что диаметр окр. всегда не меньше любой хорды. Значит радиус не меньше половины AB. Значит (r - радиус цилиндра) $r \geq 1$.

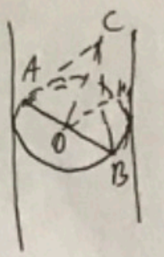
min радиуса достиг., когда AB - диаметр окр. (1)



Пусть O - ц. окр., в кот. лежит AB (Тогда O - середина AB)

Посчитаем отдельно расст. от D и от C до пл., в кот. лежит окр (пл. α)

чистовик математика 11кл.



опустим из C перпендикуляр к пл. α

Заметим, что т.к. этот перпенд. из C на α паралл. a.

значит основание перпенд. будет лежать на боковой стороне цилиндра.

значит перпенд. лежит на окр.

Пусть H_1 — его основ.

$CH_1 \perp \alpha \Rightarrow CH_1 \perp OH_1 \Rightarrow \triangle OH_1C$ — прямоуг.

$AC = CB \Rightarrow \triangle ACB$ — р/б. $\Rightarrow CO$ — высота в ACB

$\Downarrow$

$CO \perp AB$

$\angle COB = 90^\circ \Rightarrow \triangle COB$ — прямоуг.

$\Downarrow$

по т. Пифагора

$OC^2 + OB^2 = CB^2$

По т. Пифагора

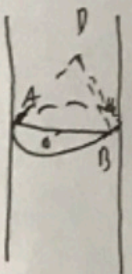
$CH_1^2 + OH_1^2 = OC^2$

$CH_1^2 + r^2 + r^2 = CB^2$

Т.к. в $\triangle AH_1B$ H_1O — медиана и по т. о 3-х перп. ($CO \perp AB$, $CH_1 \perp \alpha \Rightarrow OH_1 \perp AB$) H_1O — высота — то $\triangle AH_1B$ — р/б

$CH_1 = \sqrt{CB^2 - 2r^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

2) Аналогично



H_2 — осн. перп. с D на α

$OH_2 = \sqrt{BD^2 - 2r^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

$\triangle AH_2B$ — р/б

осталось понять про взаимное расп. точек

Заметим, что единств. прямая, проход. через C и $\parallel a$ — это прямая CH_1. Значит т. D лежит на прямой CH_1 (в частн. т. H_1 и H_2 совпад.)

Тогда есть всего 2 случ: т. C и D лежат по одну и по разные стороны от α:

1) 

т.к. $AD > AC$, D выше C

Тогда $CD = DH_1 - CH_1 = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

2) 

$CD = CH_1 + H_1D = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

ответ: $\sqrt{47} - \sqrt{34}$ и $\sqrt{47} + \sqrt{34}$

№1

$S=a_1+a_2+\ldots+a_{14}=\left(\frac{a_1+a_{14}}{2}\right)\cdot 14=\left(\frac{a_1+a_2+13d}{2}\right)\cdot 14=(2a_1+13d)\cdot 7$

$a_9\cdot a_{17}>S+12 \Rightarrow (a_1+8d)(a_1+16d)>(2a_1+13d)\cdot 7+12$

$\Downarrow$

$a_1^2+24a_1d+128d^2>14a_1+91d+12 \mid \cdot -1$

I. $-a_1^2-24a_1d-128d^2<-14a_1-91d-12$

Аналогично

$a_{11}\cdot a_{18}<S+47$

$(a_1+10d)(a_1+14d)<(2a_1+13d)\cdot 7+47$

II $a_1^2+24a_1d+140d^2<14a_1+91d+47$

сложим I+II, получим

$12d^2<35$ d - целое $\Rightarrow d\le 1$

т.к. посл. возр. $d>0$

$\Downarrow$

$d=1$

Пусть $d=1$

подставим в I

$a_1^2+24a_1+128>24a_1+103$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0$ a_1 - любое, кроме $a_1=-5$

подставим в II

$a_1^2+24a_1+\overset{140}{240}<14a_1+91+47$

$a_1^2+10a_1+\cancel{110}<0$

21103926 (U348455 M1298065)

$$\frac{-10 \pm \sqrt{100-8}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$$

~~$a_1 \in (-5; -\sqrt{23}$~~

$a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23})$

$-10 < -5-\sqrt{23} < -9 \leq a_1 \leq -1 < -5+\sqrt{23} < 0$

~~$-5+\sqrt{23} < 0$~~

Ответ: $a_1 = -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1.$

чистовик Математика 11кл

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,25)\end{cases}$$

Значит нужно найти все такие т. (a,b), а котор все т. (x,y), расст. от кот. до $(a,b)\le 5$

(т.к. $\rho((x,y)$ до $(a,b))=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\le\sqrt{25}=5$)

Найдём такие т. (a,b):

$a^2+b^2\le \min(-8a-6b;25)$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le -8a-6b\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}$$

Значит для (a,b) такая обл.:
(т.к. можно сделать || перенос и расстан.

6

21103926 (U348455 M1298065)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103926**

ID профиля: **348455**

Вариант 19

№5

1) $\alpha := \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$

2) $\beta := \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)$

3) $\gamma := \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2$

ОДЗ: $(\frac{x}{2}-1)^2>0$ $(\frac{x}{2}-1)^2\neq1$

$\sqrt{x-\frac{11}{4}}>0$ $\sqrt{x-\frac{11}{4}}\neq1$ $x-\frac{11}{4}>0$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$ $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq1$ $\frac{x}{2}-1>0$

$x>2$ $x\neq4$

$x\neq\{\frac{11}{4}+1, \frac{11}{4}-1\} \Rightarrow x\neq\{3{,}75, 1{,}75\}$

$x\neq\frac{1}{2}$ $x>\frac{1}{2}$ $x>2$

значит $x\in(2;3{,}75)\cup(3{,}75;4)\cup(4;+\infty)$

1) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=(\frac{x}{2}-1)^{2\alpha}$

2) $\frac{x}{2}-1=(x-\frac{11}{4})^{\frac{\beta}{2}}$

3) $(x-\frac{11}{4})^2=(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})^{\gamma} \Rightarrow (x-\frac{11}{4})=(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})^{\frac{\gamma}{2}}$

т.к $x-\frac{11}{4}>0$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$

$(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=(\frac{x}{2}-1)^{2\alpha}=(x-\frac{11}{4})^{\alpha\beta}=(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})^{\frac{\alpha\beta\gamma}{2}}$

т.к. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq1$, $\frac{\alpha\beta\gamma}{2}=1$

т.к. два из них равны (пусть они равны t, а третий на 1 больше $(t+1)$

$\frac{t^2(t+1)}{2} = 1$

$t^3 + t - 2 = 0$

$(t-1)(t^2+2t+2) = 0$

а) $t = 1$ б) $t^2+2t+2=0$

$D = 4-8<0$

нет реш.

Значит два из чисел это 1, одно - 2

Разберём случаи

1. $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 1$

$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^4$

$\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \left(x - \frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = x - \frac{11}{4}$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = x - \frac{11}{4}$

$\frac{x^2}{4} - 2x + \frac{15}{4} = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x-5)(x-3) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=3 \end{array}\right.$

Проверим.

$x=5$: $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ $\neq$

$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^4 = \left(\frac{5}{2} - 1\right)^4 = \frac{81}{16}$

не подх.

$x=3$: $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ $\neq$

$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^4 = \left(\frac{3}{2} - 1\right)^4 = \frac{1}{16}$

не подх.

чистовик   Математика 11 кл.

2. $\beta=2,\ \alpha=\gamma=1$

$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$ $\left(\frac{x}{2}-1\right)=\left(x-\frac{11}{4}\right)$ $\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\frac{x}{2}=\frac{11}{4}-1$

$\frac{x}{2}=\frac{7}{4}$

$x=\frac{7}{2}$

Проверим

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\left(\frac{7}{4}-1\right)^2=\frac{9}{16}$

не подходит

3. $\gamma=2,\ \alpha=\beta=1$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ $\left(\frac{x}{2}-1\right)=\left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

$\frac{x}{2}=\frac{11}{4}-\frac{1}{4}$

$\frac{x}{2}=\frac{10}{4}$

$x=5$

проверим

$\frac{x}{2}-1=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$

$\left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(5-\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$ подходит

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

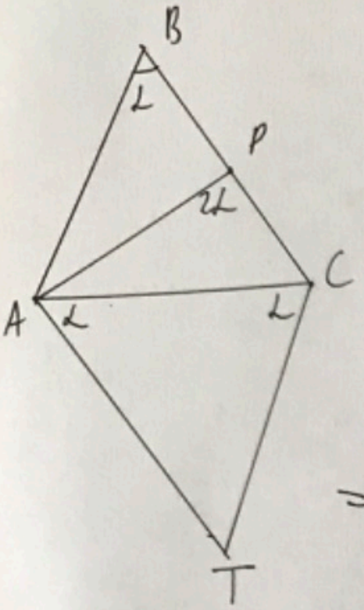
$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\left(\frac{5}{2}-1\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ подходит

3

$x=5$ подходит под ОДЗ

значит $x=5$ - решение

№6



Пусть $\angle ABC = \alpha$

$\Downarrow$

$\angle AOC = 2\alpha$

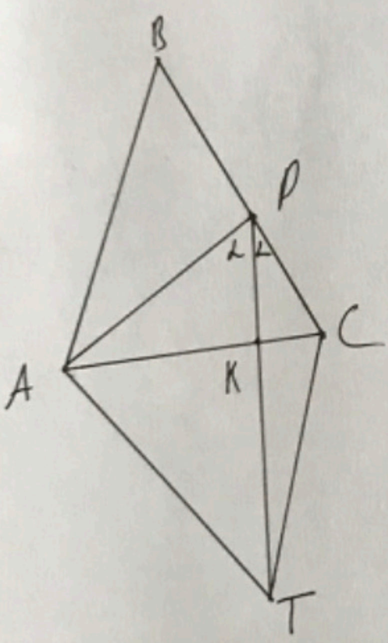
AOPC вписанный $\Rightarrow \angle APC = \angle AOC = 2\alpha$

$\angle CAT = \angle ACT = \angle ABC = \alpha$ т.к. AT, CT касательные

$\angle ATC = 180 - 2\alpha \Rightarrow$ APCT вписанный

$\angle APC + \angle ATC = 180 - 2\alpha + 2\alpha = 180$

$\Rightarrow \angle APT = \angle ACT = \alpha$



$\angle CPK = \alpha \Rightarrow PK \parallel AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta KPC$ с

коэф. подобия $\frac{AC}{CK}$

$\cancel{S_{APK} + S_{PKC} + S_{APC} = 16}$ $S_{APK} + S_{PKC} = S_{APC} = 16$

т.к. PK – биссектриса

$AK : KC = 10 : 6 = S_{APK} : S_{PKC}$

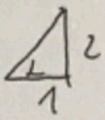
$\Rightarrow \frac{AC}{CK} = \frac{16}{6} \Rightarrow k$ подобия

а) $S_{ABC} = S_{KPC} \cdot \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{16}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{8^2}{3^2} = 42\frac{2}{3}$

Ответ: $42\frac{2}{3}$

4

Чистовик Математика 11кл.

б) 

$\sin(2\mathrm{arctg}2)=\frac{4}{5}$

$\cos(\mathrm{arctg}2)=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos(2\mathrm{arctg}2)=2\cdot\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}$

DK биссектриса $\Rightarrow \frac{AD}{DC}=\frac{10}{6}$, пусть $AD=10\cdot a$

$DC=6\cdot a$

Тогда $2S_{ADC}=10a\cdot 6a\cdot\sin(2\mathrm{arctg}2)=16\cdot 2$

$60a^2\cdot\frac{4}{5}=32$

$a^2=\frac{2}{3}$

По т. косинусов:

$100a^2+36a^2-2\cos 2\angle\cdot 60a^2=AC^2$

$\left(136+2\cdot\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}=AC^2$

$AC^2=91\frac{7}{15}$

$AC=\sqrt{91\frac{7}{15}}$

Ответ: $\sqrt{91\frac{7}{15}}$

5

Чистовик Математика 11кл.

№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=21 \\ НОК(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

Пусть $a=21\cdot a_1$
$b=21\cdot b_1$ $НОД(a_1,b_1,c_1)=1$
$c=21\cdot c_1$

Тогда в НОК можно сократить на значение НОД

$$НОК(a_1,b_1,c_1)=\cancel{3^{17}\cdot 7}\ \frac{3^{17}\cdot 7^{15}}{3\cdot 7}=3^{16}\cdot 7^{14}$$

Причём каждой старой тройке чисел (a,b,c) однозначно соотв. тройка чисел (a_1,b_1,c_1) и наоборот.

Посчитаем кол-во троек (a_1,b_1,c_1)

Заметим, что т.к. $НОД(a_1,b_1,c_1)=1$, никакое простое число не может входить в разлож. всех трёх чисел

Заметим, что делимость чисел на 3 и на 7 независимы и можно отдельно найти тройки

$(a_{1,3},b_{1,3},c_{1,3})$: $НОД(a_{1,3},b_{1,3},c_{1,3})=1$
$НОК(a_{1,3},b_{1,3},c_{1,3})=3^{16}$

и тройки $(a_{1,7},b_{1,7},c_{1,7})$: $НОД(a_{1,7},b_{1,7},c_{1,7})=1$
$НОК(a_{1,7},b_{1,7},c_{1,7})=7^{14}$

и тогда соотв

$\cancel{(a_{1,3},b_{1,3},c_{1,3})\times}$
$(a_{1,3},b_{1,3},c_{1,3})\times(a_{1,7},b_{1,7},c_{1,7})\to(a_{1,3}a_{1,7},b_{1,3}b_{1,7},c_{1,3}c_{1,7})$

будет биективным

6

значит можно отдельно посчитать для 3 и 7

21103926 (U348455 M1298066)

Чистовик Математика 11 кл

Для 3: (Замеч: никакое простое, кроме 3 не может быть в различ. чисел)

(a, b, c): $НОД(a, b, c) = 1$
$НОК(a, b, c) = 3^{16}$

Рассм. случаи

1) Все три числа не могут делится на 3

2) Ровно одно число делится на три. Тогда оно делится на 3^{16}

Значит вариантов

$C_3^1 = 3$ кол-во способов выбрать это число

3) Ровно два числа делятся на три. Тогда хотя бы 1 из них должно делится на 3^{16} (иначе НОК был бы $<$)

3.1) Два числа $\vdots\, 3^{16}$

кол-во вариантов:

$C_3^2 = 3$ - выбрать два из 3-х чисел

3.2) значит другое делится на 3^i, где $i \in \{1, 2, \dots 15\}$ (≥ 16 быть не может, о том же, т.к. это будет 1 случай)

Тогда кол-во вариантов

$C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 15 = 90$

кол-во спос. выбрать 1-ого

кол-во спос. выб. 2-ого

кол-во спос. нахождения 2-ого

значит всего способов $90 + 3 + 3 = \underline{96}$

2) ровно одно – $C_3^1 = 3$

3) ~~Два~~ делится

3.1) оба $\vdots\, 7^{14}$ $C_3^2 = 3$

3.2) одно $\vdots\, 7^{14}$, другое на 7^i, $i \in \{1, 2, \dots 13\}$.

(7)

21103926 (U348455 M1298066)

$C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 13 = 78$ Значит всего способов $78+3+3=84$

кол-во спос. кол-во спос. выбора 2 выбр. знач. n-ого

~~Значит всего~~

Тогда всего способов выбрать (a,b,c)

$96 \cdot 84 = 8067$

8

21103926 (U348455 M1298066)