Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

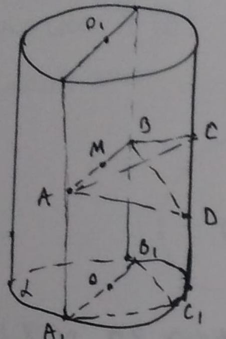
Шифр: **21103906**

ID профиля: **316023**

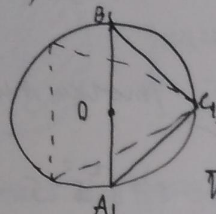
Вариант 19

Чистовик ①

№2.



Рассмотрим проекцию тетраэдра на одно из оснований цилиндра. $CD \parallel OO_1$, $OO_1 \perp \alpha \Rightarrow C, D$ проектируются в одну точку (C_1). Пусть M — середина AB, тогда $CM \perp AB$, $DM \perp AB \Rightarrow CD \perp AB$, значит $AB \parallel \alpha$ (либо $AB \subset \alpha$), значит A_1ABB_1 — параллелограмм (прямоугольник) $\Rightarrow A_1B_1 = AB = 2$.

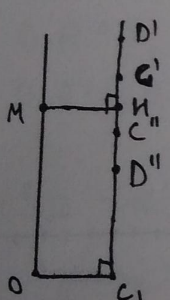


~~Пусть~~

По т. синусов для $\Delta A_1B_1C_1$: $R = \frac{A_1B_1}{2\sin\angle B_1C_1A_1} = \frac{1}{\sin\angle B_1C_1A_1}$

$0 < \sin\angle B_1C_1A_1 \le 1 \Rightarrow$ наименьший R при $\angle B_1C_1A_1 = 90^\circ$, и $R = 1$.

$\angle B_1C_1A_1 = 90^\circ \Rightarrow A_1B_1$ — диаметр, т.е. O — середина $A_1B_1 \Rightarrow$ O — проекция точки M. Из прямоугольных ΔAMC и ΔAMD по т. Пифагора $MC = \sqrt{35}$, $MD = 4\sqrt{3}$.



Рассмотрим (OCD).

Проведём из M перпендикуляр MH к CD $\Rightarrow OMHC_1$ — прямоугольник $\Rightarrow MH = OC_1 = 1 \Rightarrow$ для каждой из точек C и D существует ровно 2 положения (с одной стороны от H и с другой), т.к. $HC = \sqrt{MC^2 - MH^2} = \sqrt{34}$, $HD = \sqrt{MD^2 - MH^2} = \sqrt{47}$, поэтому

$$\left[\begin{array}{l} CD = C'D'' = D'C'' = \sqrt{34} + \sqrt{47} \\ CD = C'D' = C''D'' = |\sqrt{47} - \sqrt{34}| = \sqrt{47} - \sqrt{34} \end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{47}$; $\sqrt{47} - \sqrt{34}$.

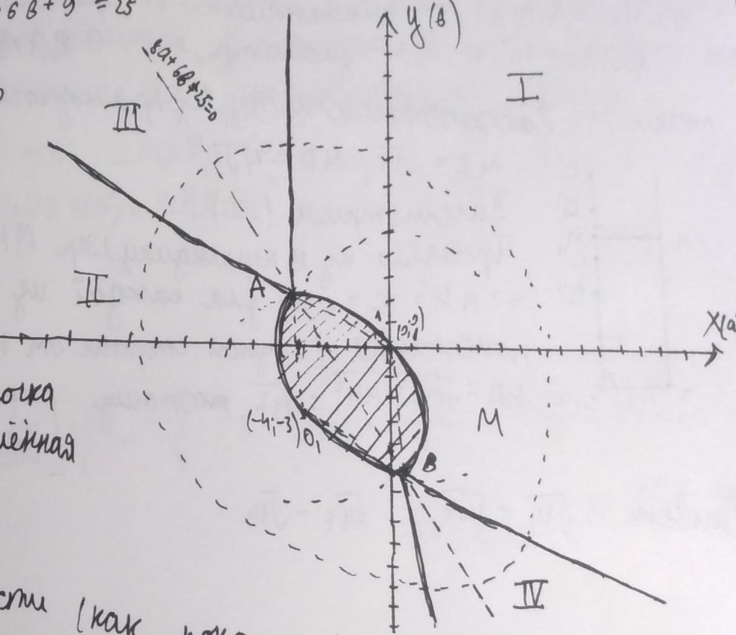
Чистовик 2.

№3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b, 25)\ (1)\end{cases}$

(1) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-8a-6b<25\\ a^2+b^2\le -8a-6b\end{cases}\\ \begin{cases}-8a-6b\ge 25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-8a-6b<25\\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25\end{cases}\\ \begin{cases}-8a-6b\ge 25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}\end{array}\right.$

(точки A и B) пересечения окружностей $(a+4)^2+(b+3)^2=25$ и $a^2+b^2=25$ лежат на прямой $-8a-6b=25$, т.к. $-\begin{cases}a^2+8a+16+b^2+6b+9=25\\ a^2+b^2=25\end{cases}$

$8a+6b+25=0$



//// - показаны решения (1).

Тогда фигура M состоит из всех точек, удалённых от заштрихованной //// фигуры не более, чем на 5 (существует точка на заштрихованной фигуре удалённая от точки фигуры M не более, чем на 5.)

Разобьём плоскость на области (как показано), проведя лучи $((-4;-3);A)$, $((-4;-3);B)$, $((0;0);A)$, $((0;0);B)$ – получилось 4 области, не считая заштрихованную.

Т.к. окружность $(a+4)^2+(b+3)^2=25$ пересекает OX в $(0;0)$ и $(-8;0)$, а окружность $a^2+b^2=25$ в точках $(-5;0)$, $(5;0)$, то часть окружности $(a+4)^2+(b+3)^2=25$, являющаяся границей заштрихованной облати лежит внутри круга $a^2+b^2\le 25$, а часть окружности $a^2+b^2=25$, являющаяся границей заштрихованной области лежит внутри круга $(a+4)^2+(b+3)^2\le 25$ => заштрихованная область полностью лежит в круге $a^2+b^2\le 25$ и полностью в круге $(a+4)^2+(b+3)^2\le 25$ =>

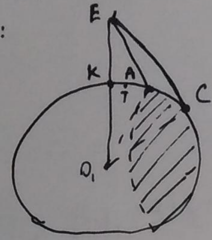
=> • точки из области I, удалённые на расстояние 5 от окружности $(a+4)^2+(b+3)^2=25$, удалены на большее расстояние от ~~того~~ части окружности $a^2+b^2=25$, являющейся границей заштрихованной области.

• Аналогично для области II.

Чистовик 3.

Для областей III и IV верно, что расстояние от точки области III (IV) до точки A (B) меньше, чем для любой другой точки заштрихованной области.

Докажем это:



Пусть C, A лежат на окружности, причём $\overset{\frown}{KTA} < \overset{\frown}{KTC}$, тогда $\angle KO_1C > \angle KO_1A \Rightarrow \cos\angle EO_1C < \cos\angle EO_1A$, значит из теорем косинусов $\triangle EO_1A$ и $\triangle EO_1C$ следует, что $EC > EA$.

Имеем: в области I фигура M является частью круга ($O_1(-4;-3)$, $r=10$), не лежащей в заштрихованной области; в области II — часть круга ($O(0;0)$, $r=10$), не лежащей в заштрихованной области, в областях III и IV — секторы кругов (A; $r=5$) и (B; $r=5$), а также вся заштрихованная область.

$O_1O=5$, $O_1A=5$, $AO=5 \Rightarrow \angle AO_1O=60^\circ$, $\angle AOO_1=60^\circ$

$O_1O=5$, $O_1B=5$, $OB=5 \Rightarrow \angle O_1OB=60^\circ$, $\angle OO_1B=60^\circ$

$\Rightarrow S_I = S_{II} = \pi\cdot 10^2\cdot\frac{1}{3} - \pi\cdot 5^2\cdot\frac{1}{3} = 25\pi$

$S_{III} = S_{IV} = \pi\cdot 5^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{25\pi}{6}$

$S_{заштр.} = 2\left(\pi\cdot 5^2\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}5^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$S = \cancel{25\pi}\ 50\pi + \frac{25\pi}{3} + 2\left(\pi\cdot\frac{25}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{4}\right) = 50\pi + \frac{25\pi}{3} + \frac{50\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2} =$

$= 25\pi\cdot 3 - \frac{25\sqrt{3}}{2} = \cancel{60}\ 75\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2}.$

Ответ:

Черновик.

1.

$$\frac{a_1+a_1+d\cdot 13}{2}\cdot 14 = 7(2a_1+13d)$$

$a_{11}=a_1+10d$ $\quad (d>0)$

$a_{15}=a_1+14d$

$a_9=a_1+8d$

$a_{17}=a_1+16d$

$$\begin{cases}(a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1+91d+12\\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1+91d+47\end{cases};$$

$$\begin{cases}a_1^2+24a_1d+128d^2-14a_1-91d-12>0\\ a_1^2+24a_1d+140d^2-14a_1-91d-47<0\end{cases}$$

$35-140d^2 > a_1+24a_1d-14a_1-91d-12 > -128d^2$

$35-140d^2 > -128d^2;\quad 268d^2<35$

$|d|<\sqrt{\frac{35}{268}}$

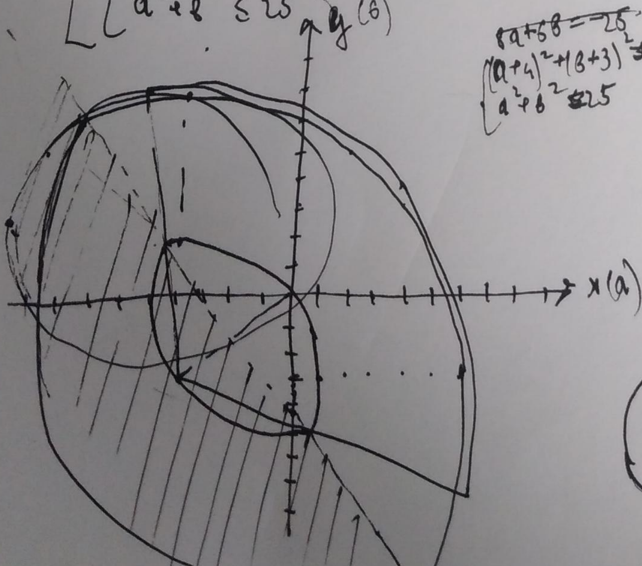
$0<d<\sqrt{\frac{35}{268}}$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,25)\end{cases}$$

$O'(a;b)$ – окр

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-8a-6b<25\\ a^2+b^2\le -8a-6a\end{cases};\\ \begin{cases}-8a-6a\ge 25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}\end{array}\right.$$

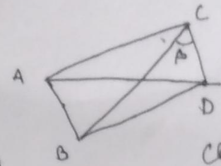
$$\{(a+4)^2+(b+3)^2\le 25$$



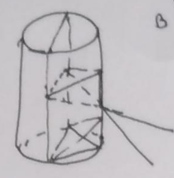
$\cancel{8a+6b=-25}$

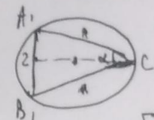
$$\begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases};\quad \begin{cases}8a+16+6b+9=0\\ a^2+b^2=25\end{cases}$$

2.



$\cos\angle ACB = \frac{72-4}{72}=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$





$\sqrt{36-1}=\sqrt{35}$

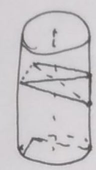
$\sqrt{49-1}=4\sqrt{3}$

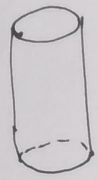
$A_1B_1=a\sqrt{2-2\cos\alpha}=2a\sin\frac{\alpha}{2}$

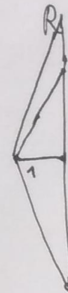
$R=\frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\alpha}=\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

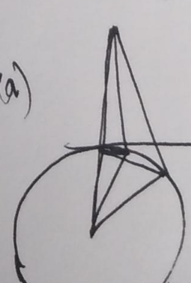
$0<\alpha<180^\circ \Rightarrow 0<\cos\frac{\alpha}{2}<1$

$R_1=\frac{A_1B_1}{2\sin\alpha};\quad \sin\alpha=1;\ R=\frac{A_1B_1}{2}=1$

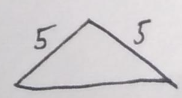








$$\begin{cases}8a+6b+25=0\\ \ldots\end{cases}$$



$\frac{1}{2}.$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103906**

ID профиля: **316023**

Вариант 19

Чистовик 1.

4 4. $\begin{cases} НОД(a,b,c)=21 \\ НОК(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$

т.к. НОК(a,b,c) делится на все простые делители числа a, b, c, то $a=3^{x_a}\cdot 7^{y_a}$, $b=3^{x_b}\cdot 7^{y_b}$, $c=3^{x_c}\cdot 7^{y_c}$, причём $\min(x_a,x_b,x_c)=1$, $\max(x_a,x_b,x_c)=17$, $\min(y_a,y_b,y_c)=1$, $\max(y_a,y_b,y_c)=15$

Рассмотрим возможные наборы (x_a,x_b,x_c):

1. $x_a\neq x_b$, $x_b\neq x_c$, $x_a\neq x_c$.
   1) $x_a=1$, $x_c=17$: 15 наборов
   2) $x_a=17$, $x_b=1$: 15 наборов

   } 6 раз => 90 наборов

   ...
2. $x_a=x_b$, $x_b\neq x_c$
   $x_a=x_b=1$, $x_c=17$ или $x_a=x_b=17$, $x_c=1$ – 2 набора | => 6 наборов.
   ... (всего C_3^2 варианта)

Всего 96 наборов.

Рассмотрим возможные наборы $(y_a;y_b;y_c)$:

1. $y_a\neq y_b$, $y_b\neq y_c$, $y_a\neq y_c$.
   1) $y_a=1$, $y_c=15$: 13 наборов
   2) $y_a=15$, $y_b=1$: 13 наборов

) 6 раз => 78 наборов

   ...
2. $y_a=y_b$, $y_b\neq y_c$
   $y_a=y_b=1$, $y_c=15$ или $y_a=y_b=15$, $y_c=1$ – 2 набора | => 6 наборов
   ... (всего C_3^2 варианта)

Всего 84 набора

$96\cdot 84=8064$.

Ответ: 8064.

Чистовик 2.

5. Пусть $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}a$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2b$; $\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{2}{ab}$.

1) $\begin{cases}\frac{1}{2}a=2b\\ \frac{1}{2}a+1=\frac{2}{ab}\end{cases}$; $\begin{cases}a=4b\\ 4b^3+2b^2-1=0\end{cases}$; $\begin{cases}a=4b\\ (2b-1)(2b^2+2b+1)=0\end{cases}$; $\begin{cases}a=2\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$.

$\begin{cases}\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1\\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1\end{cases}$; $\begin{cases}\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\\ \sqrt{x-\frac{11}{4}}=\frac{x}{2}-1\\ x\neq\frac{15}{4}\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-4x+4=2x-1\\ x-\frac{11}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2\\ x\neq\frac{15}{4}\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-6x+5=0\\ 4x-11=x^2-4x+4\\ x\neq\frac{15}{4}\end{cases}$;

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right.\\ x^2-8x+15=0\end{cases}$; $x=5$.

2) $\begin{cases}\frac{1}{2}a=\frac{2}{ab}\\ 2b=\frac{1}{2}a+1\end{cases}$; $\begin{cases}2b-1=\frac{1}{(2b-1)b}\\ a=4b-2\end{cases}$; $\begin{cases}(2b-1)^2b-1=0\\ a=4b-2\end{cases}$; $\begin{cases}(4b^2-4b+1)b-1=0\\ a=4b-2\end{cases}$;

$\begin{cases}(b-1)(4b^2+1)=0\\ a=4b-2\end{cases}$; $\begin{cases}b=1\\ a=2\end{cases}$.

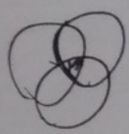
$\begin{cases}\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1\\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2\end{cases}$; $\begin{cases}\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\\ \sqrt{x-\frac{11}{4}}^2=\frac{x}{2}-1\\ x\neq\frac{15}{4}\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-4x+4=2x-1\\ x>\frac{11}{4}\\ x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-1\\ x\neq\frac{15}{4}\end{cases}$; $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5\end{array}\right.\\ x>\frac{11}{4}\\ \frac{x}{2}=\frac{7}{4}\end{cases}$; $x\in\varnothing$.

3) $\begin{cases}2b=\frac{2}{ab}\\ \frac{1}{2}a=2b+1\end{cases}$

21103906 (U316023 M1301887)

Черновик.

4. $\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=21 = 3\cdot 7 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$



$a = 3^{x_a}\cdot 7^{y_a}$

$b = 3^{x_b}\cdot 7^{y_b}$

$c = 3^{x_c}\cdot 7^{y_c}$

21; 21;

$\min(x_a; x_b; x_c) = 1$

$\max(x_a; x_b; x_c) = 17$

$\min(y_a; y_b; y_c) = 1$

$\max(y_a; y_b; y_c) = 15$

7, 96, $\cdot 84$, 384, $+768$, 8064

1) $x_a = 1$; $x_b = 17$

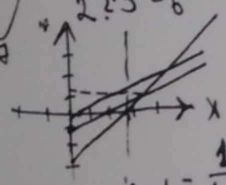
2) $x_a = 1$; $x_c = 17$

3) $x_b = 1$;

15, 15.

$1\cdot 6\cdot 15 = 90$

$2\cdot 2\cdot 3 = 6$



5. $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}a$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2b$

$\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = 2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right) = \frac{2}{ab}$

1) $\begin{cases} \frac{1}{2}a = 2b \\ \frac{1}{2}a + 1 = \frac{2}{ab} \end{cases}$; $\begin{cases} a = 4b \\ 2b+1 = \frac{1}{2b^2} \end{cases}$; $\begin{cases} a = 4b \\ 4b^3 + 2b^2 - 1 = 0 \end{cases}$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1$

$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0, \ne 1 \\ \frac{x}{2}-1 > 0, \ne 1 \\ x - \frac{11}{4} > 0, \ne 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \ne 2{,}5 \\ x > 2, \ne 4 \\ x > \frac{11}{4}, \ne \frac{15}{4} \end{cases}$; $x > \frac{11}{4}, \ne 4, \ne \frac{15}{4}$

$4b^3 + 2b^2 + 0b - 1 \,|\, 2b-1$

$-\ 4b^3 - 2b^2 \quad | \ 2b^2 + 2b + 1$

$-\ 4b^2 + 0b$

$4b^2 - 2b$

$2b - 1$

$\frac{D}{4} = 1 - 2$

$\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = 2 \end{cases}$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right) =$

2) $\begin{cases} \frac{1}{2}a = \frac{2}{ab} \\ 2b = \frac{1}{2}a + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2b - 1 = \frac{1}{(2b-1)b} \\ a = 4b - 2 \end{cases}$; $\begin{cases} (2b-1)^2\cdot b - 1 = 0 \quad (1) \\ a = 4b-2 \end{cases}$

$x - \frac{11}{4} = \frac{x}{2} - 1$

$4x - 11 = 2x - 2$; $2x = 9$; $x = 4{,}5$

3) $\begin{cases} 2b = \frac{2}{ab} \\ \frac{1}{2}a = 2b + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} b^2 = \frac{1}{a} \\ a = b + \frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} b^2 = \frac{1}{b+\frac{1}{2}} \quad (2) \\ a = b + \frac{1}{2} \end{cases}$

(1) $(4b^2 - 4b + 1)b - 1 = 0$;

$4b^3 - 4b^2 + b - 1 = 0$

$4b^3 - 4b^2 + b - 1 \,|\, b - 1$

$-\ 4b^3 - 4b^2 \quad | \ 4b^2 + 0b + 1$

$-\ b - 1$

$b - 1$

$4b^2 + 1$

$b = 1$ $\begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$

(2) $b^3 + \frac{b^2}{2} - 1 = 0 \ |\cdot 2$

$2b^3 + b^2 - 2 = 0$

$\frac{1}{2}$ $\quad b^2(2b+1) - 2 = 0$

$\left(\frac{x}{2} - 2\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right)$

$\frac{a}{b} > 1$

$\frac{x}{2} - 1 > 1$

$x > 4$

$b > 0$

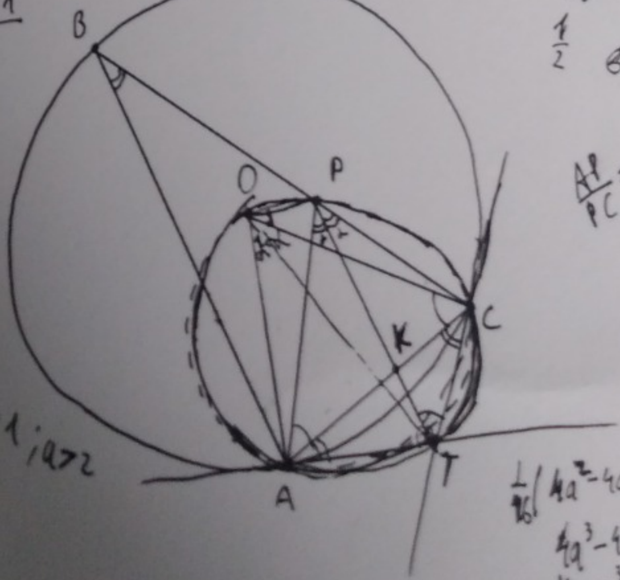
$\frac{1}{2}a > 1$; $a > 2$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} > \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$;

$2x - 1 > (x-2)^2$;

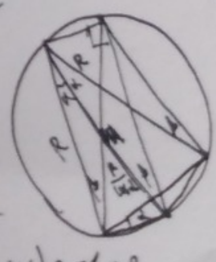
$2x - 1 > x^2 - 4x + 4$;

$x^2 - 6x + 5 < 0$, $1 < x < 5$



$\frac{AP}{PC} = \frac{5}{3}$

$= \begin{cases} \frac{1}{2}a - 1 = \frac{2}{(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2})a} \\ b = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2} \end{cases}$



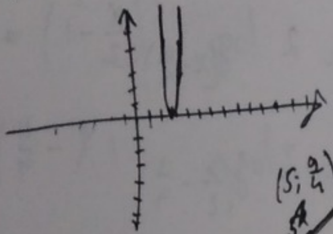
$\frac{1}{16}(4a^2 - 4a + 1)a - 1 = 0$

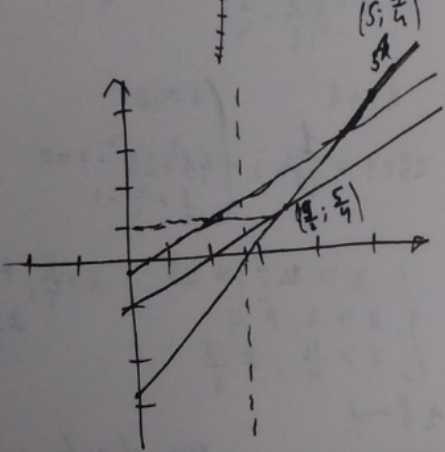
$4a^3 - 4a^2 + a - 16 = 0$

$4^4 - 4^3 \,|\, \frac{4}{4^2}\ \frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} - 16$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} > \left(x-\frac{11}{4}\right)^4;$

$8x-4 > (4x-11)^4$





$2b = \frac{2}{ab}$

$b^2 = \frac{1}{a}$

$\log^2_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \log$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\left(\frac{x}{2}-1\right)\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right) = \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\left(x-\frac{11}{4}\right)^4\left(\frac{x}{2}-1\right)^2\right)$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^4\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

$x-\frac{11}{4} = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{x}{2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$; $x=5$