Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103885**

ID профиля: **289167**

Вариант 19

Чистовик

1. $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{14}$ – сумма первых 14 членов $\overset{\text{возр.}}{\vee}$ ар. прогр. $a_1, a_2, \ldots$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{14} \in \mathbb{Z}$ a_1 – ?

$a_9 a_{17} > S + 12$

$a_{11} a_{15} < S + 47$

Решение:

1) Т.к. ар. прогрессия возрастающая, то $b = a_{n+1} - a_n > 0$

Т.к. $a_1, a_2, \ldots, a_{14} \in \mathbb{Z}$, то $b \in \mathbb{Z}$, но $b > 0$, зн., $b \in \mathbb{N}$

2) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{14} = a_1 + a_1 + b + a_1 + 2b + \ldots + a_1 + 13b = 14a_1 + 91b$

$a_9 \cdot a_{17} = (a_1 + 8b) \cdot (a_1 + 16b) > S + 12 = 14a_1 + 91b + 12$

$a_1^2 + 24ba_1 + 128b^2 > 14a_1 + 91b + 12$

$a_1^2 + (24b - 14)a_1 > -128b^2 + 91b + 12$ (1)

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10b) \cdot (a_1 + 14b) < S + 47 = 14a_1 + 91b + 12$

$a_1^2 + (24b - 14)a_1 < -140b^2 + 91b + 47$ (2)

Из (1) и (2): $-140b^2 + 91b + 47 > -128b^2 + 91b + 12$

$12b^2 < 35$

$b^2 < \frac{35}{12}$

т.к. $b \in \mathbb{N}$, то $b < \sqrt{\frac{35}{12}} = \sqrt{2\frac{11}{12}} < \sqrt{4} = 2$

т.к. $b \in \mathbb{N}$, то $b = 1$ $1 = \sqrt{1} < \sqrt{2\frac{11}{12}}$, верно

3) $S = 14a_1 + 91$

$(a_1 + 8) \cdot (a_1 + 16) > 14a_1 + 103$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

$a_1 \neq -5$

$(a_1 + 10) \cdot (a_1 + 14) < 14a_1 + 138$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$(a_1 + 5)^2 < 23$

$-\sqrt{23} < a_1 + 5 < \sqrt{23}$

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$

$-5 < a_1 + 5 < 5$

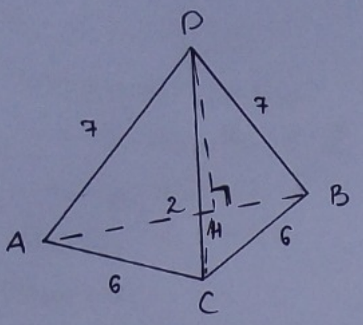
$-10 < a_1 < 0$

т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Чистовик.

2.

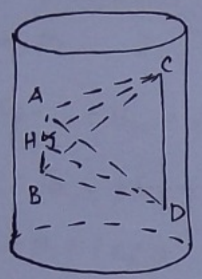


ABCD – тетраэдр, впис. в цилиндр

A, B, C, D ∈ бок. пов-ти

CD ∥ оси цилиндра

Найти: CD при наим. R цилиндра



Решение:

Радиус будет наим. при $\angle(CD\hat{;}ACB) \to 0$

и при $(CD\hat{;}ABD) \to 0$

DH – высота из т. D к AB

~~DH~~ =

т.к. AD = DB, то △ADB – р/б, зн., DH – медиана, биссек,
высота, зн., $AH = HB = \frac{AB}{2} = 1$

$DH = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

т.к. AC = BC, то △ABC – р/б

т.к. AH = HB, то CH – ~~высота~~ медиана, но △ABC – р/б, зн., CH – высота

$CH = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$

При $R \to 0$ $CD = DH + HC = 4\sqrt{3} + \sqrt{35}$

Зн., $CD < 4\sqrt{3} + \sqrt{35}$

Ответ: $CD < 4\sqrt{3} + \sqrt{35}$

②

Чистовик.

3. $(x;y) \in M: \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25 \\ a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b;25) \end{cases}$ S_M – ?

Решение:

$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leq 25 \\ a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b;25) \end{cases}$

1) $-8a-6b \leq 25$ $b \geq -\frac{25}{6} - \frac{4a}{3}$

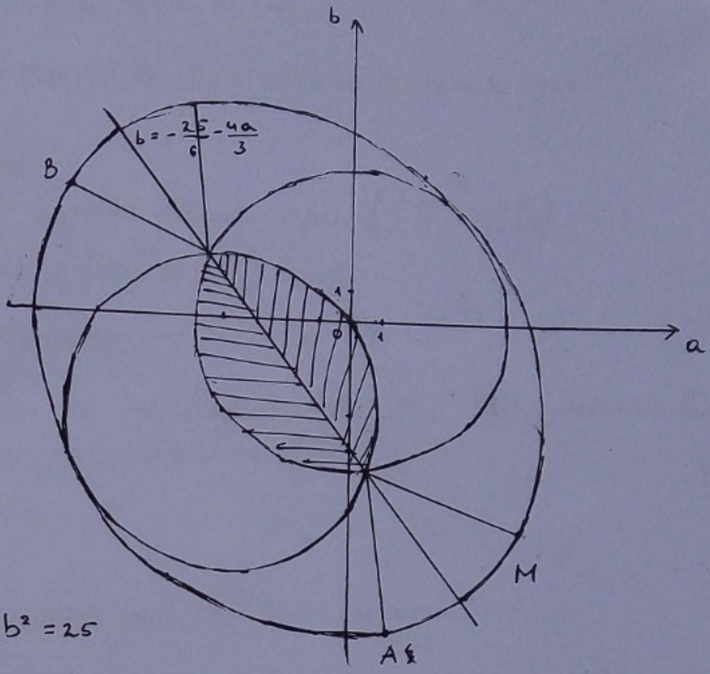
$a^2+b^2 \leq -8a-6b$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25$

~~тогда сист.~~ ~~$\begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leq 25 \\ (a+4)^2+(b-3)^2 \leq 25 \end{cases}$~~

2) $-8a-6b > 25$ $b < -\frac{25}{6} - \frac{4a}{3}$

$a^2+b^2 \leq 25$



найдём т. перес. окр-тей

$(a+4)^2+(b+3)^2 = 25$ и $a^2+b^2=25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 = a^2+b^2$

~~$a = -\frac{25}{8} - \frac{3}{\,}$~~ $a = -\frac{25}{8} - \frac{3}{4}b$

$\left(-\frac{25}{8} - \frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = 25$

③

$\begin{cases} b = \frac{-3 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \pm 2\sqrt{3} \\ a = -2 \mp \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$tg(\hat{OA;OB}) = \frac{-\frac{3}{2}+2\sqrt{3}}{-2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}} + \frac{-\frac{3}{2}-2\sqrt{3}}{-2+\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{-6+4\sqrt{3}}{-4-3\sqrt{3}} + \frac{-6-4\sqrt{3}}{-4+3\sqrt{3}}$

$S = \cancel{2} \cdot \frac{arctg(\hat{OA;OB})}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{\pi} \cdot 10^2 + \cancel{2} \cdot \frac{arctg(180° - (\hat{OA;OB}))}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{\pi} \cdot 25$ –

~~$= arctg - \frac{arctg(\hat{OA;OB})}{\,} \cdot \pi \cdot 25 = 87{,}5\, arctg(\hat{OA;OB}) + 25\, arctg(180° - (\hat{OA;OB})$~~

~~$- 2 \frac{arctg(\hat{OA;OB})\, 2\pi}{2\pi} \cdot \pi \cdot 25 + 2 \frac{arctg(\hat{OA;OB})}{2\pi} \cdot \pi \cdot 25 - 2$~~

~~Ответ: $S = 87{,}5\, arctg(\hat{OA;OB}) + 25$~~

$- \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 25 \cdot \sin(arctg(\hat{OA;OB})$

Ответ: $S = 100\, arctg(\hat{OA;OB}) + 25\, arctg(180° - (\hat{OA;OB})) - 25 \sin(arctg(\hat{OA;OB}))$, где $(\hat{OA;OB}) = arctg\left(\frac{-6+4\sqrt{3}}{-4-3\sqrt{3}} + \frac{-6-4\sqrt{3}}{-4+3\sqrt{3}}\right)$

Черновик

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{14}$

$a_9\ a_{17} > S + 12$

$a_{11}\ a_{15} < S + 47$

$a_1 - ?$

$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n - \mathbb{Z}$

$b \in \cancel{\mathbb{Z}}$

$b \in \mathbb{N}$

$14a_1 + 91b = 7 \cdot (2a_1 + 13b)$

~~$a_7 \geq a$~~ $S = a_1 + a_1 + b + a_7 + 2b + \ldots + a_1 + 13b = \cancel{14b}\,a_1 +$

$\times\ 13,\ 7,\ 91$

$\frac{77}{8}$

$b + 2b + \ldots + 13b = \frac{14b}{2} \cdot 13 = 7 \cdot 13b = 91b$

$(a_1 + 8b) \cdot (a_1 + 16b) > 14a_1 + 91b + 12$

$a_1^2 + 24b\,a_1 + 128b^2 > 14a_1 + 91b + 12$

$a_1^2 + (24b - 14)a_1 + 128b^2 - 91b - 12 > 0$

$\times\ 12,\ 7,\ 84;\ \times\ 84,\ 2,\ 168$

$-\ 168,\ 91,\ 77$

$\frac{D}{4} = (12b - 7)^2 - 128b^2 + 91b + 12 = 144b^2 - 168b + 49 - 128b^2 + 91b + 12 =$

$= \cancel{144b^2} = 16b^2 - 77b + 61 = \left(4b - \frac{77}{8}\right)^2$

$(a_1 + 10b) \cdot (a_1 + 14b)$

$a_1^2 + 24b\,a_1 + 140b^2 < \cancel{S+4}\ 14a_1 + 91b + 47$

$a_1^2 + (24b - 14a)a_1 + 140b^2 - 91b - 47 < 0$

$> a_1^2 + (24b - 14)a_1 > -128b^2 + 91b + 12$

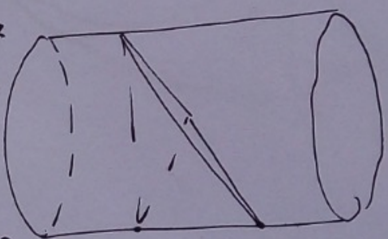
$-140b^2 + 91b + 47 > -128b^2 + 91b + 12$

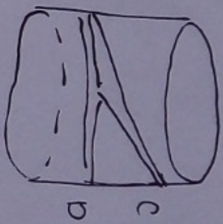
$12b^2 < 35$

$b^2 < \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$

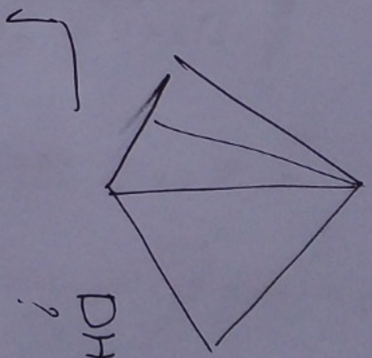
т.к $b > 0$, то $b < \sqrt{\frac{35}{12}} = \sqrt{2\frac{11}{12}} < \sqrt{4} = 2$

$b = 1$





~~$S = 14a_1$~~ $S = 14a_1 + 91$

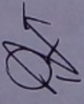


$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103$

$140 - 138$

a_1^2

$128 - 103 = 25$



?

$DH = \sqrt{7^2 - r^2}$

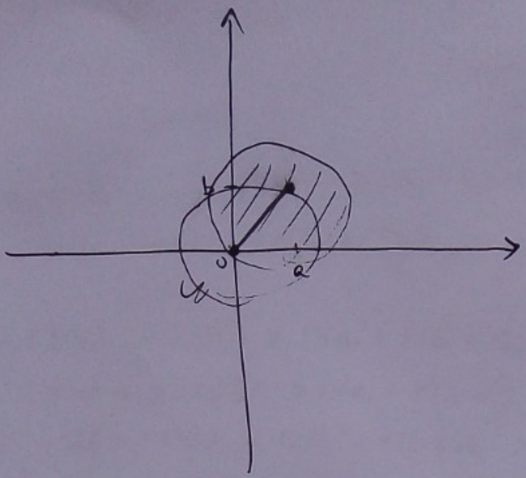
$-140 + 91 + 47 = -49 + 47$

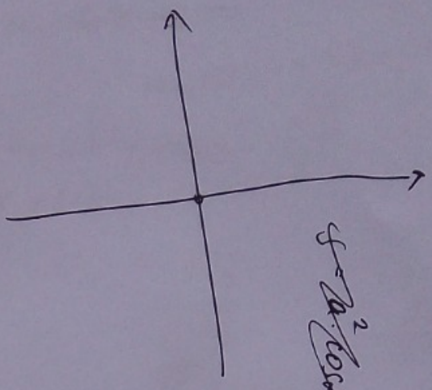
①

$\overline{a_1}$ $+25$ $2 - 25 =$

21103885 (U289167 M1304392)

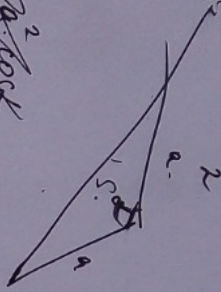
Черновик





$y = a^2 \cos\alpha$

$75 + 12,5 = 87,5$



$-\frac{3}{2} * -2\sqrt{3} = k$

$$\begin{cases}(a-x)^2 + (b-y)^2 \leq 25 \\ a^2 + b^2 \leq min\end{cases}$$

S ч/з α и a

$-8a - 6b \cancel{\geq} 25$

$8a + \cancel{6b} \leq -25$

$a^2 + b^2 \leq -8a - 6b$

$a^2 + 8a + b^2 + 6b \leq 0$

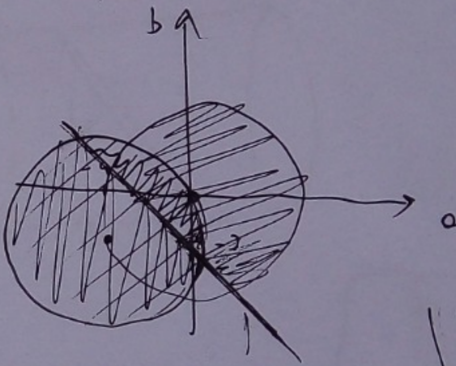
$(a+4)^2 - 16 + (b+3)^2 - 9 \leq 0$

$(a+4)^2 + (b+3)^2 \leq 25$

$8a + 6b \leq -25$

$b \leq -\frac{25}{6} - \frac{4}{3}a = -4\frac{1}{6}$

$\frac{8}{6} - \frac{25}{6} = -\frac{17}{6}$ $= -3 + \frac{1}{6}$



$\underline{arctg(180° - \alpha) - ?}$

$-\frac{25}{8} - \left(\frac{-3 \pm 12\sqrt{3}}{8}\right) =$

$= -\frac{25}{8} + \frac{3}{8} \mp \frac{3\sqrt{3}}{2} =$ ②

$= -2 \mp \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$25 - 9 = 16$

S р/б Δ ч/з α и сторону:

S

$S = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin\alpha$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103885**

ID профиля: **289167**

Вариант 19

Чистовик

4 $a, b, c \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \text{НОД}\ (a,b,c) = 21 \\ \text{НОК}\ (a,b,c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

$$\text{НОД}\left(\frac{a}{21}; \frac{b}{21}; \frac{c}{21}\right) = 1 \Rightarrow \frac{a}{21} \cdot \frac{b}{21} \cdot \frac{c}{21} = \frac{3^{17} \cdot 7^{15}}{21}$$

~~$a \cdot b \cdot c = 3^{19} \cdot 7^{17}$~~

$$\frac{a}{21} \cdot \frac{b}{21} \cdot \frac{c}{21} = 3^{16} \cdot 7^{14}$$

~~$\text{НОД}\left(\frac{a}{21}; \frac{b}{21}\right) = 0$~~

1) Предположим, что одно из чисел $\frac{a}{21}; \frac{b}{21}; \frac{c}{21}$ равно 1 тогда условия вып-ся и кол-во таких случаев

~~$3 \cdot (17 \cdot 15 - 1) = 762$~~ $3 \cdot 17 \cdot 15 = 765$

2) Если ниодно из чисел не равно 1, то возможны 2 случая: одно из чисел делится на 3 (7), а два других на 7(3) или одно из чисел делится на 3, другое на 7, а третье и на и на 3 кол-во таких случаев:

$3 \cdot 14 + 3 \cdot 16 + 6 \cdot 15 \cdot 13 = 1260$

В обоих описанних случаях учитывается, что ни одна из чисел не равно 1

3) Всего чисел получаем $1260 + 765 = 2025$

Ответ: 2025

Чистовик

5. $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}),\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1),\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2$

Пусть $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=a \quad \frac{x}{2}-1=b \quad \sqrt{x-\frac{11}{4}}=c \quad a,b,c>0$

Запишем ~~произверение~~ ~~сумму~~ произведение логарифмов

$$\log_{b^2}a\cdot\log_c b\cdot\log_a c^4=\frac{1}{2}\cdot\log_b a\cdot\log_c b\cdot 4\log_a c=2\cdot\frac{\log_c a}{\log_c b}\cdot\log_c b\frac{1}{\log_c a}=$$

$=2$

т.к. одна пара из логарифмов равны, а оставшийся больше их на 1, то

$$\log_{b^2}a\cdot\log_c b\cdot\log_a c^4=2=k^2\cdot(k+1)$$

$k^2\cdot(k+1)=2$

$k^3+k^2-2=0$

$(k-1)(k^2+2k+2)=0$

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

$k=1$ или $k^2+2k+2=0$

$D=4-8<0$ нет реш.

два логарифма равны 1, третий равен 2

3 случая:

1) $\begin{cases}\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=1\\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=1\\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2=2\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\x=1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=5\\x=3\end{array}\right.\\ x=5\end{cases}$ ~~нет реш.~~ $x=5$

2) $\begin{cases}\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=1\\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=2\\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2=1\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5\\x=1\end{array}\right.\\ x=3,5\\ x=\frac{12\pm\sqrt{13}}{4}\end{cases}$ нет реш.

②

3) $\begin{cases}\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=2\\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=1\\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})=1\end{cases}$ $\begin{cases}\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=2\\ \left[\begin{array}{l}x=5\\x=3\end{array}\right.\\ x=\frac{12\pm\sqrt{13}}{4}\end{cases}$ нет реш

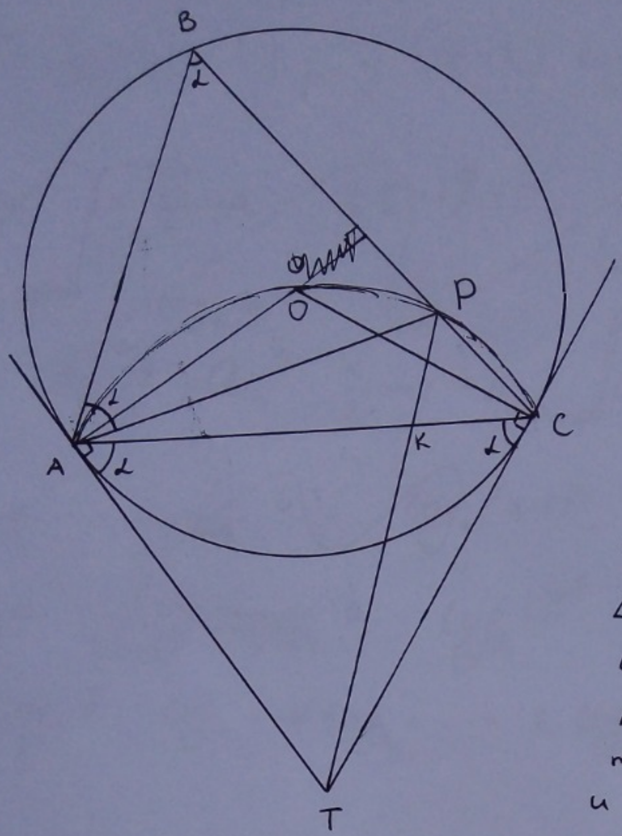
Проверка $\frac{5}{2}-1\neq 1$, верно $\frac{5}{2}-\frac{1}{4}>0$, верно $5-\frac{11}{4}>0$, верно

$5-\frac{11}{4}\neq 1$, верно $\frac{5}{2}-1>0$, верно $\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\neq 1$, верно $5-\frac{11}{4}\neq 0$, верно

Ответ: при $x=5$

Чистовик

6.



$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 6$

а) пусть $\angle B = \alpha$

т.к. $\angle CAT$ и $\angle ACT$ – углы м/у касательной и хордой, то $\angle CAT = \angle ACT = \angle B = \alpha$

$\angle AOC = 180^\circ - 2\cdot(90 - \alpha) =$
$= 2\alpha$

т.к. $\angle AOC$ и $\angle APC$ – впис, опирающиеся на AC, то

$\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$

$\angle APB = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle BAP = 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha = \alpha$

т.к. $\angle ABP = \angle BAP$, то $\triangle APB$ – р/б и $AP = BP$

$$\frac{CK}{KA} = \frac{CP}{AP} = \frac{CP}{BP}$$

$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{S_{APB}}{S_{APC}}$$

③

$$S_{APB} = \frac{10\cdot16}{6} = \frac{80}{3} = 16\frac{2}{3}$$

$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APK} + S_{CPK} = \frac{80}{3} + 10 + 6 = 42\frac{2}{3}$$

~~Ответ а)~~

б) $S_{ABP} = \frac{1}{2} AP^2 \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) = 16\frac{2}{3}$

$$AP^2 = \frac{160}{3\cdot\sin2\alpha} = \frac{160(1+tg^2\alpha)}{\cdot2\cdot3\,tg\alpha} = \frac{160\cdot5}{2\cdot3\cdot2} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$$

$$AP = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$S_{APC} = \frac{1}{2}\cdot AP\cdot CP \cdot \sin2\alpha = \frac{1}{2}\cdot10\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{4}{5}\cdot CP = 16$$

$$CP = \frac{\overset{4}{\cancel{16}}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{3}\ \cancel{5}}{\cancel{10}\ \sqrt{2}\cdot\cancel{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$$

$$AC^2 = CP^2 + AP^2 - 2CP\cdot AP\cdot\cos2\alpha = 24 + \frac{200}{3} - 2\cdot2\sqrt{6}\cdot10\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1-4}{1+4} =$$

$$= 24 + \frac{200}{3} - 48 = \frac{128}{3} \qquad AC = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Ответ: а) $42\frac{2}{3}$ б) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Черновик

×

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$ $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$ $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

Пусть $\sqrt{x-\frac{11}{4}}=a$ $\frac{x}{2}-1=b$ $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=c$

$\log_{b^2}c$ $\log_a b$ · $\log$

41-25=16

$4x^2-22x+\frac{121}{4}=2x-1$

$4x^2-24x+\frac{125}{4}=0$

Пусть $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=a$ $\frac{x}{2}-1=b$

$\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$, $16x^2-96x+125=0$

$\log_{b^2}a$ $\log_{a+b}b$ $\log_a(a+b)^2$

$\frac{24}{4}$ 25 · 5

$\log_{b^2}a$ $\log_{\sqrt{c}}b$ $\log_a c^4$ 96

$\left(\frac{x}{2}-1\right)=x-\frac{11}{4}$

$\frac{1}{2}\log_b a\cdot\log_c b\cdot 4\log_a c=2\log_b a\,\frac{\log_c a}{\log_b c}=$

$\frac{x}{2}=\frac{7}{4}$

$\frac{7}{4}-1=\frac{7}{2}-\frac{11}{4}$

$x=3,5$

~~HOД~~ a⋮21 b⋮21 c⋮21

$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

3 · 7

$3\cdot(17\cdot15-1)$

$3^{17}\cdot7^{15}\cdot3^2\cdot7^2=3^{15}\cdot7^{17}$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$

a b c
a c b

$4x-11=-2x+1$

$6x=12$

$16x^2-88x+121=8x-$

$16x^2-96x+125=0$

a b c
a c b
b a c
b c a
c a b
c b a

$3^{16}\cdot7^{14}$

1, 3, … 3^{11}

$\frac{x}{2}-1=\sqrt{x-\frac{11}{4}}$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=x-\frac{11}{4}$

$x^2-4x+4=4x-11$

73 7 3

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

$x^2-8x+15=0$

$(x-5)\cdot(x-3)=0$

7 3 7

$2x-1=x^2-4x+4$

$x^2-6x+5=0$

$(x-5)\cdot(x-1)=0$

7 7^2

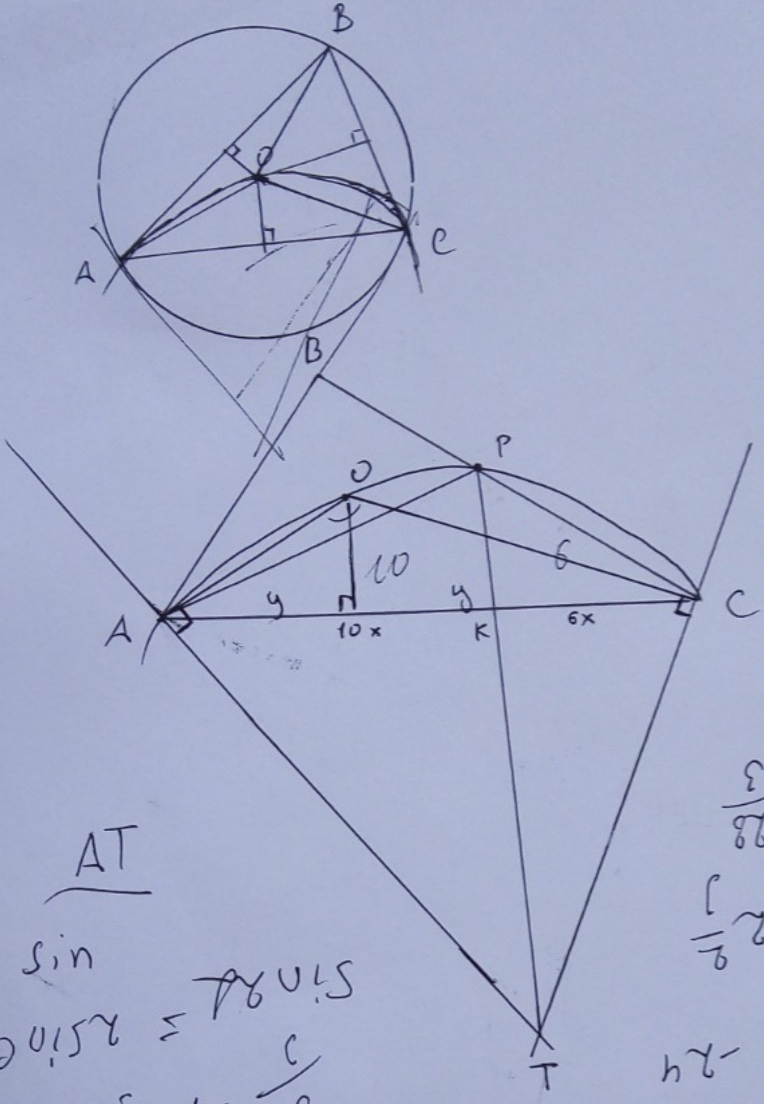
$x=5$

$x=1$

①

21103885 (U289167 M1304393)

Черновик



$\frac{AT}{\sin}$

$\frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$

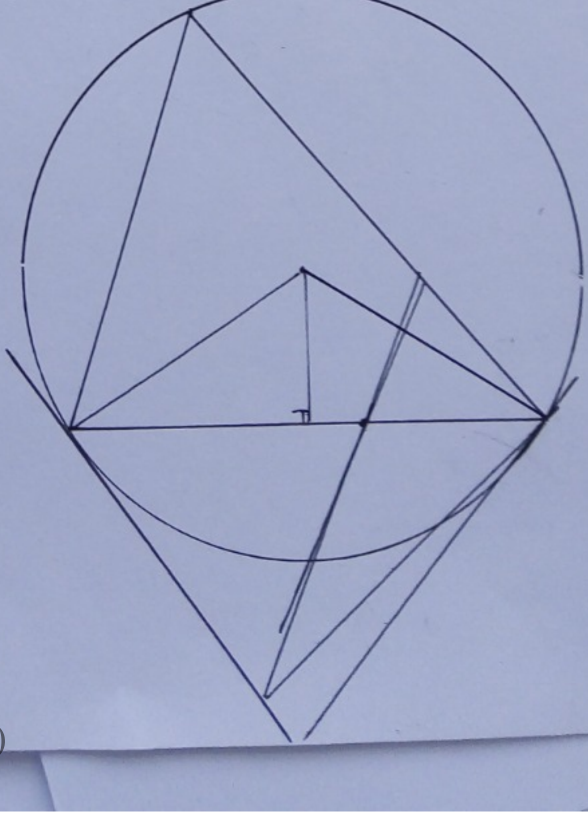
$\sin 2\alpha = 2\sin\cos$

$66\frac{2}{3} - 24$

$\cancel{8}\ 42\frac{2}{3}$

$\frac{128}{3}$

$42 \times 3 = 126$



$4\sqrt{2}\cdot\overset{2}{\cancel{12}}\cdot\sqrt{2}\cdot(-\frac{3}{\cancel{8}})=$

$= -4\cdot 2\cdot 2\cdot 3 =$

$= -12\cdot 4 =$

$= -48$