Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103787**

ID профиля: **76248**

Вариант 19

Чистовик Вариант 19

№1

$b>0,\quad a_1, b \in \mathbb{Z}$

$$S = \frac{a_1+(a_1+13b)}{2}\cdot 14$$

$$\begin{cases} a_9\, a_{17} > S+12 \\ a_{11}\, a_{15} < S+47 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+8b)(a_1+16b) > 7(a_1+a_1+13b)+12 \\ (a_1+10b)(a_1+14b) < 7(a_1+a_1+13b)+47 \end{cases}$$

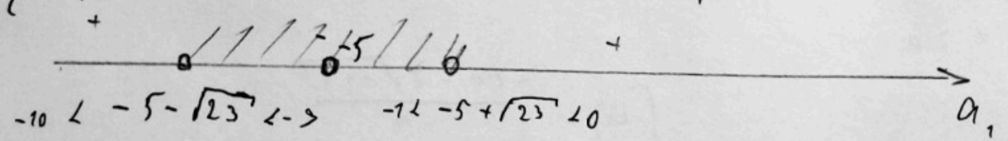
$$\begin{cases} a_1^2+24a_1b+128b^2 > 14a_1+91b+12 \\ a_1^2+24a_1b+140b^2 < 14a_1+91b+47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1^2+24a_1b+128b^2-14a_1-91b) > 12 \\ (a_1^2+24a_1b+128b^2-14a_1-91b)+12b^2 < 47 \end{cases}$$

$$47-12b^2 > 12 \qquad\qquad b^2 < 2\tfrac{11}{12},\quad b\in\mathbb{N}$$
$$35 > 12b^2 \quad\Rightarrow\quad b=1$$

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1+128-14a_1-91-12>0 \\ a_1^2+24a_1+140-14a_1-91-47<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+2<0 \end{cases} \Rightarrow \quad (a_1+5)^2>0 \qquad a_1\in\mathbb{Z}$$
$$a_1 = -5\pm\sqrt{23}$$

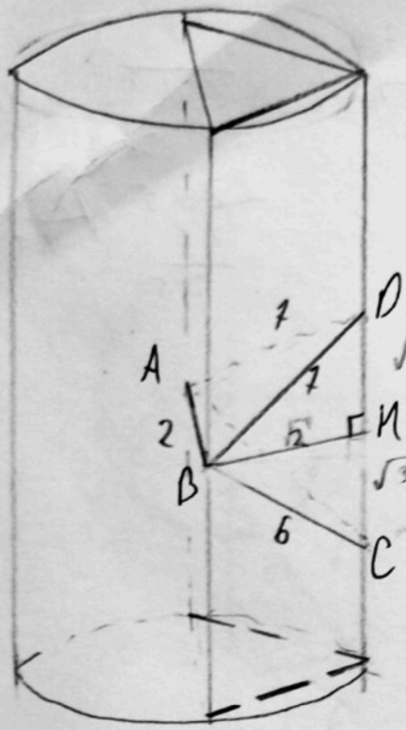


$$\begin{cases} a_1\in[-9;-1] \\ a_1\neq -5 \\ a\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $a \in \{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

1/4

Чистовик № 2

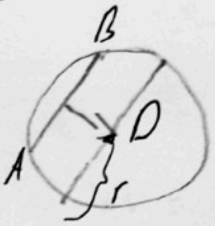


1) r – радиус цилиндра

$r \leq AB$

(~~т.к.~~ $AB \perp DC$)

$AB \parallel$ основанию цилиндра и как-бы скользит по горизонтальному сечению



r – мин $\Leftrightarrow$ $\frac{AB}{2}$ – радиус цилиндра

$r = \frac{AB}{2}$

2) т.к. $BC = AC$, $AD = BD$

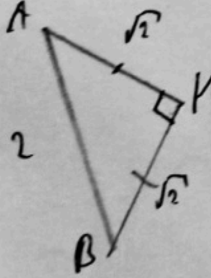
DCB симметрич. DCA относительно плоскости, проходящей ч/з ось и перпендикулярной основанию

3) $BH \perp DC$, $BH \in (BDC)$

в силу симметрии $AH \perp DC$, $AH \in (ADC)$ $\Big\} \Rightarrow ABH \perp DC$ ($\Rightarrow AD \perp DC$)

$\Rightarrow ABH$ впис. в окружн с диаметром $AB \Rightarrow BHA = 90°$

$BH = AH$ в силу симметрии



$\angle A = \angle B = \frac{180-90}{2} = 45°$

по т. син $\frac{BH}{\sin 45°} = \frac{AB}{\sin 90°} \Rightarrow BH = \sqrt{2}$

4) по т. Пифагора $\begin{cases} DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} \\ CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} \end{cases} \Rightarrow$

$DC = DH + CH = \sqrt{49-2} + \sqrt{36-2} = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

2/4

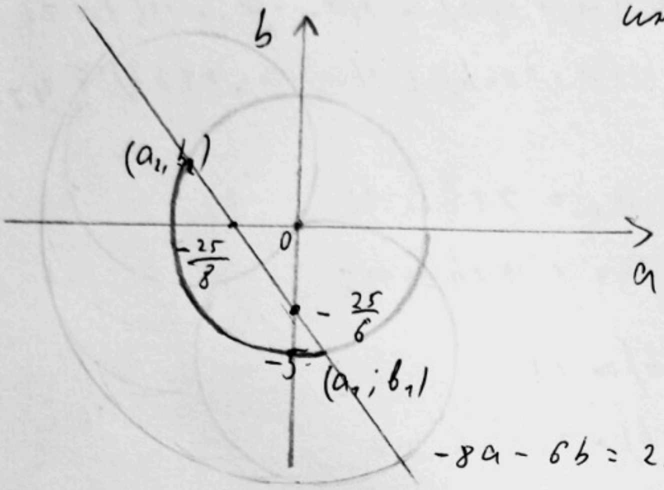
Чистовик №3

(a, b) - центр окружн. радиуса 5

M - совокупность окружностей

$a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b, 25)$ одно из a, b обяз. отрицат.

иначе $-8a-6b<0$



$-8a-6b=25$

$-6b=25+8a$

$b=-\frac{25}{6}-\frac{4}{3}a$

$\min(-8a-6b, 25) \leq -8a-6b=25$

=> имеем множество центров окружн.

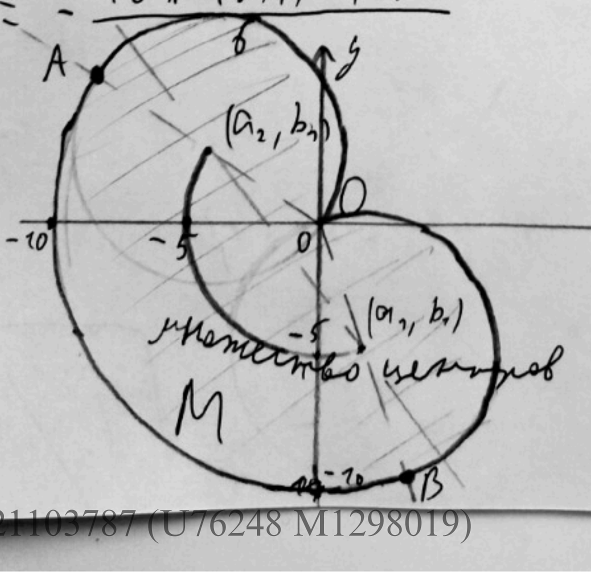
крайние точки:

$\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ -8a-6b=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ 6b=-8a-25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+\frac{64a^2+1000a+625}{36}=25 \\ b^2=\left(-\frac{8a+25}{6}\right)^2 \end{cases}$

$36a^2+64a^2+1000a+625=900$

$4a^2+40a-11=0$

$\begin{cases} a_1=\frac{-20+\sqrt{444}}{4} \\ b_1=-\frac{-40+4\sqrt{111}+25}{6} \end{cases}$ или $\begin{cases} a_2=\frac{-20-2\sqrt{111}}{4} \\ b_2=\frac{-40-4\sqrt{111}+25}{-6} \end{cases}$



M: совокупность окружностей с центрами в (a_1, b_1), (a_2, b_2) и радиусом 5 и части окружн с центром в $(0;0)$ и радиусом $5+5=10$

3/4

Чистовик №3 (продолжение)

$S_ф = S$ двух полуокружн OA и OB
(с центр (a_2, b_2) и (a_1, b_1) и
сектора AB окружн $((0,0), 10)$

$$S = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} \cdot 2 + \pi \cdot 10^2 \cdot \frac{\angle AOB}{2\pi} = 25\pi + 50\angle AOB$$

($\angle AOB$ в радианах)

$\angle AOB$ можно найти по т. кос, a_1, a_2, b_1, b_2 известны.

Ответ: $25\pi + 50\angle AOB \approx 25\pi + \frac{100}{3}\pi = \frac{175}{3}\pi$

4/4

Черновик 1

$$\begin{array}{r} \times\ 13 \\ 7 \\ \hline 91 \end{array}$$

$t > 12$

$t + 12b^2 < 47$

$12 < t < 47 - 12b^2$

$12b^2 < 35$

$b^2 < 2\frac{11}{12}$, $b \in N$

$b = 1$

$$\begin{array}{r} -\ 128 \\ 91 \\ \hline 37 \\ 47 \\ \hline 125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 142 \\ 91 \\ \hline 49 \\ -\ 47 \\ \hline 2 \end{array}$$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

$-5 \pm \sqrt{25-2}$

$a = -9$
$b = 1$
$S = (-9+4) \cdot 7 = -35$

$a = -10$
$S = (-10+3) \cdot 7 = -49$

$a_{17} = -1 \cdot (+7) = -7 > -35 + 12$

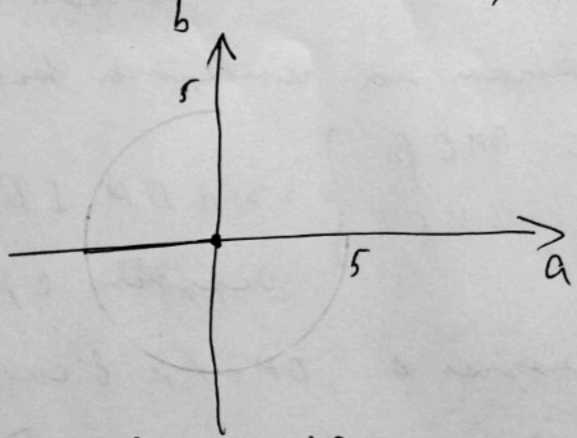
$a_{11} a_{15} = 1 \cdot 5 < 47 - 35$

$5 < 7$

$\cancel{0 < 47 - 49}$

✓ $-5; 0$ $(40, 25)$ $\min(-8a - 6b, 25) \le 25$

$-5;$



$1809 = 9 \cdot 201$
$= 9 \cdot 3 \cdot 67$

$a^2 + b^2 = 25$

$a = 25 - b^2$

$-200 + 8b^2 - 6b = 25$

$8b^2 - 6b - 225 = 0$

$b = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 1800}}{8}$

$+ \quad \frac{3 - 3\sqrt{201}}{8} \quad - \quad \frac{3 + 3\sqrt{201}}{8} \quad +$

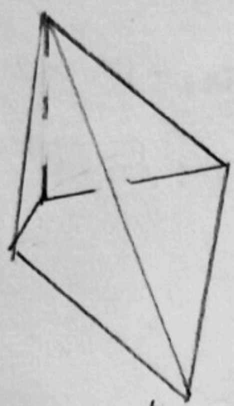
$225 \cdot 8 = 25 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 2$

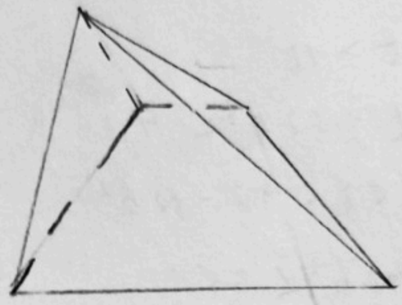
$\frac{8}{6} a = -\frac{25}{6}$

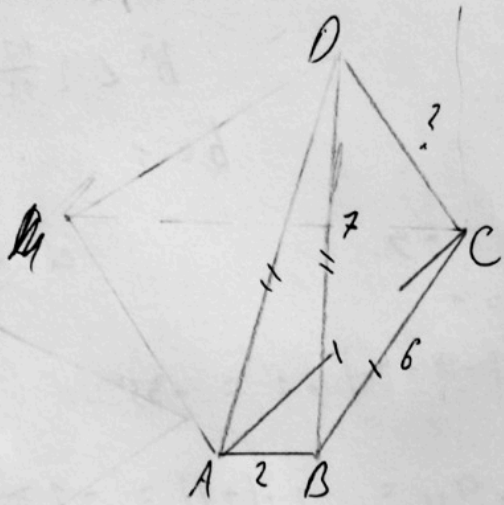
$a = -\frac{25}{8}$

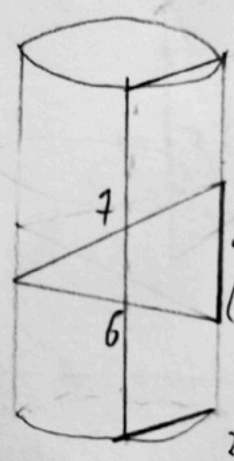
Черновик 2

№2







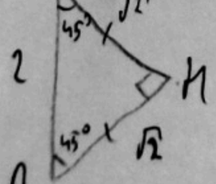


① Д-во: min $r = \frac{AB}{2}$ (если не сильно растянем DC)

2) DCB симметрично DCA отн. плоскости, проходящей 2/3 оси => DCB лежат на четверти боковой поверхности

3) $BM \perp DC$, $BM \in \beta$; $AM \perp DC$, $AM \in \alpha$ } => $ABM \perp DC$ => ABM впис. в окружн. с радиусом r (AB - диам)

ABM — прямоуг Δ, BM = AM в силу симметрии



$\frac{BM}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 90^\circ}$ => $BM = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 : 1 = \sqrt{2}$

4) $DC = \sqrt{49-2} + \sqrt{36-2} = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

Черновик 3. №3

$$\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ -8a-6b=25 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $a^2+b^2=-8a-6b$

$a^2+8a+b^2+6b=0$

$a=-4\pm\sqrt{16-b^2-6b}$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 36 \\ \hline 150 \\ 75 \\ \hline 900 \end{array}$$

$$275 \ \big|\ 25$$
$$\underline{25} \quad 11$$
$$25$$

$6b=-8a-25$

$b^2=\left(-\frac{8a+25}{6}\right)^2$

$a^2+\frac{64a^2+1000a+625}{36}=25$

$36a^2+64a^2+1000a+625=900$

$100a^2+1000a-275=0$

$4a^2+40a-11=0$

$a=\frac{-20\pm\sqrt{400+44}}{4}$

$b=-\frac{8a+25}{6}$

21103787 (U76248 M1298019)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103787**

ID профиля: **76248**

Вариант 19

Чистовик № 4 (Вариант 19

НОД(a, b, c) = 21 каждое из чисел a, b, c состоит только из 3 и 7 (имеет вид $3^m \cdot 7^p$)

НОК(a, b, c) = $3^{17} \cdot 7^{15}$

1) в одном из чисел ровно 17 троек (3 вар-та)
в одном из чисел ровно 15 семерок (3 в)
(иначе НОК $\neq 3^{17} \cdot 7^{15}$)

2) в каждом из чисел минимум ~~7~~ 1 семерка и 1 тройка
нет 2-ух чисел в каждом из которых ~~...~~ 2 тройки или 2 семерки

3) тройки и семерки распр. независимо друг от друга; попробуем распр. тройки:

	a	b	c
3	17	1..17	1

а) в одном из чисел (пусть a) ровно 17 троек (3 вар-та)
б) в одном из оставшихся (2 вар-та) от 1 до 17 троек, пусть в b (17-1+1 = 17 в)
в) в оставшемся числе (1 в.) ровно 1 тройка
(иначе НОД(a, b, c) ≠ 21)
г) крайние вар-ты (с 1 и 17) посчитаны несколько раз:

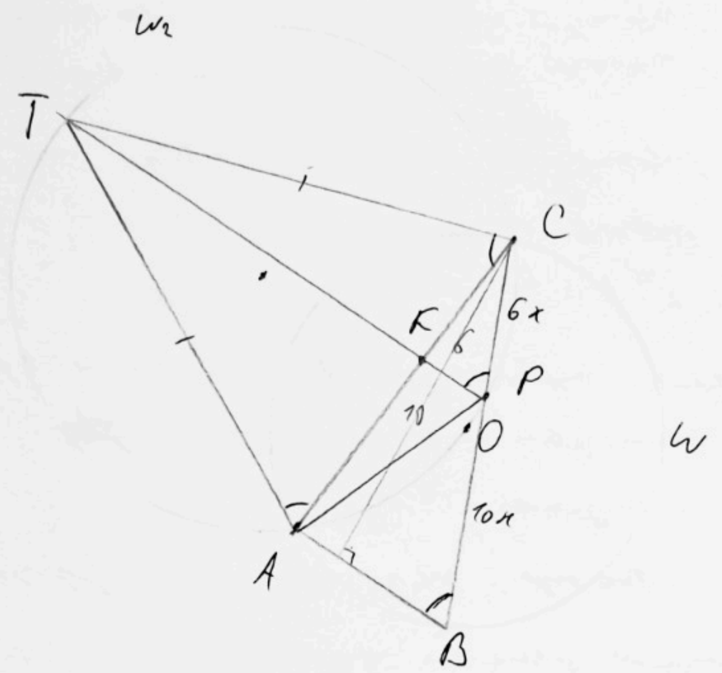
	a b c	a b c	a b c	a b c	a b c	a b c
3	17 1..17 1	17, 1, 1..17	1..17, 17, 1	1, 17, 1..17	1..17, 1, 17	1 1..17 17
пол. в-ты		(17, 1, 1)	(17, 17, 1)	(1, 17, 1)	(17, 1, 17)	(1, 17, 17)
						(1, 1, 17)

всего 6 вар-ов посчитали 2 раза.
Таким образом для троек имеем (3 · 2 · 17 · 1 − 6) вар-ов.
Аналогично для семерок (3 · 2 · 15 − 6)
тогда всего (3 · 2 · 17 − 6)(3 · 2 · 15 − 6) = 96 · 84 = 8064 в.

Ответ: 8064 троек чисел

1/3

Чистовик № 6



$tg\angle ABC = 2$

$S_{ABC} = \frac{128}{3}$

1) $T \in w_2$: пусть $T'O$ – диаметр, тогда $T'CO = 90°$ через т. C можно провести единств. кас. => T сущ-ет единственная: $TCO = 90°$ => $T = T'$ ($TCOA$ – вписк, т.к. $\angle COA + \angle CTA = 180°$ => $T \in w_2$)

2) $TC = TA$ (кас) => $\angle TCA = \angle TAC$

$\angle TCA = \angle ABC$ (угол м/у хордой и кас

$\angle TPC = \angle TAC$ (опир на TC)

=> $\triangle CKP \sim \triangle CAB$

3) $\frac{CK}{KA} = \frac{S_{CKP}}{S_{KPA}} = \frac{6}{10}$ (один выс) => $\frac{CP}{PB} = \frac{6}{10}$

4) у $\triangle CAP$ и ABC одина. выс на (BC) =>

$\frac{S_{CAP}}{S_{CAB}} = \frac{CP}{CB} = \frac{6x}{16x}$ => $S_{ABC} = \frac{16 S_{CAP}}{6} = \frac{\cancel{16}^{8} \cdot 16}{\cancel{6}_{3}} = \frac{128}{3}$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{128}{3}$

2 / 2

21103787 (U76248 M1298020)

Чистовик № 5

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{a^2} b = 2\log_{|a|} b$$ (с учетом замены)

$$\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \log_{c^{\frac{1}{2}}} a = 2\log_{c} a$$

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = \log_b c^2 = 2\log_b |c|$$

21103787 (U76248 M1298020)

Черновик 2 №4

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 21 \\ НОК(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases} \Rightarrow abc = НОД \cdot НОК = 3^{18} \cdot 7^{16}$$

замечаем, что каждое из чисел a, b, c состоит только из 3 и 7 (имеет вид $3^m \cdot 7^p$)

причем нет 2-ух чисел, в каждом из которых две 3 или две 7

$a = 21k$
$b = 21m$
$c = 21n$, k, m, n - взаимно просты

$kmn \cdot 3^3 \cdot 7^3 = abc = 3^{18} \cdot 7^{16} \Leftrightarrow kmn = 3^{15} \cdot 7^{13}$

все 3 распр между 2-мя из k, m, n причем в одном из чисел не меньше 16-ти

НОД(a, b, c) = 21
НОК(a, b, c) = $3^{17} \cdot 7^{15}$

1) в одном из чисел ровно 17 троек, (3в)
в одном из чисел ровно 15 семерок (3в)
(иначе НОК $\neq 3^{17} \cdot 7^{15}$)

2) в каждом из чисел минимум 1 семерка и 1 тройка
нет 2-ух чисел, в каждом из которых две 3 или две 7

	a	b тв.	c
3	17	1...17	
7	15	1...15	

~~(3 · 17 − 3)(~~

$(3 \cdot 2 \cdot 17 - 6)(3 \cdot 2 \cdot 15 - 6)$

$\Rightarrow$ в одном из ост. чисел (2в) от 1 до 17 троек
в одном из ост чисел (2в) от 1 до 15 семерок

Крайние варианты посчитаны неск. раз (−3 в 2-ых) ~~(−9 вар всего)~~

черновик 1

$(6, 8) = 2$

НОК$(6, 8) = 24$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 17 & 1..17 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 17 & 1 & 1..17 \end{array}$$

$(17, 1, 1)$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1..17 & 17 & 1 \end{array}$$

$(17, 17, 1)$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1 & 17 & 1..17 \end{array}$$

$(1, 17, 1)$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1..17 & 1 & 17 \end{array}$$

$(17, 1, 17)$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 1 & 1..17 & 17 \end{array}$$

$(1, 17, 17)$

$(1, 1, 17)$

т.е. (-68)

$$\begin{array}{r} 17 \\ + \quad 6 \\ \hline 102 \\ - \quad 6 \\ \hline 96 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ + \quad 6 \\ \hline 90 \\ - \quad 6 \\ \hline 84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 96 \\ 84 \\ \hline + 384 \\ 168 \\ \hline 8064 \end{array}$$

$\log_a b = \log_c a$

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_a c}$

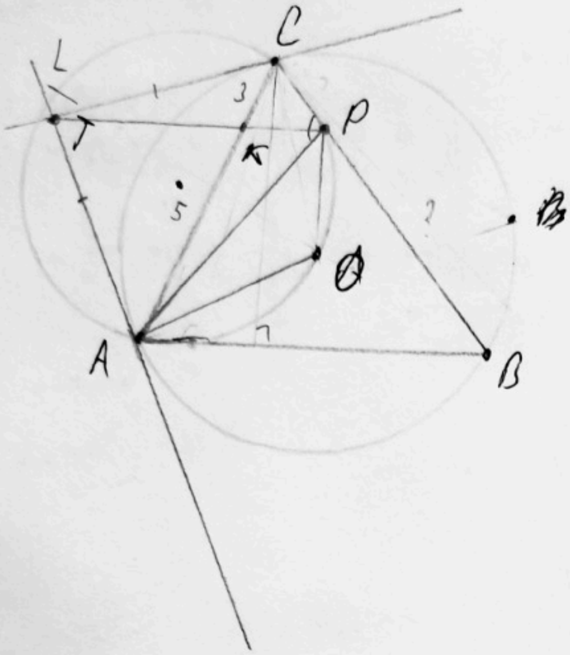
$(\log_a b)(\log_a c) = \log_a a$

$$\begin{cases} \log_a b = \log_c a \\ 2\log_b c - 1 = 2\log_a b \end{cases}$$

$\log_b c = \log_a b + 2^{-1}$

$$\begin{cases} \log_b c = \dfrac{1}{\log_b a} + \dfrac{1}{2} \\ \log_a b = \dfrac{1}{\log_a c} \end{cases}$$

№ 6



1/ $BD \cdot BL = BP \cdot (BP + PC)$

$R \cdot$

2/ $T \in W_2$ (TCOA - впис)

(д-во из ед-ти кас-ых)

№ 6