Часть 1

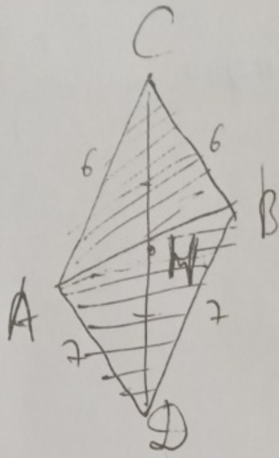
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103741**

ID профиля: **380344**

Вариант 19

Черковик 2



$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{(p-6)(p-7)(p-x)}}{\sqrt{p}}$$

$$a^{-1} = -a^{-2}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$h = \frac{2S}{x} = \frac{2\sqrt{\frac{13+x}{2}\cdot\frac{1+x}{2}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{13-x}{2}}}{x} = \frac{\sqrt{(169-x^2)(x^2-1)}}{2x}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

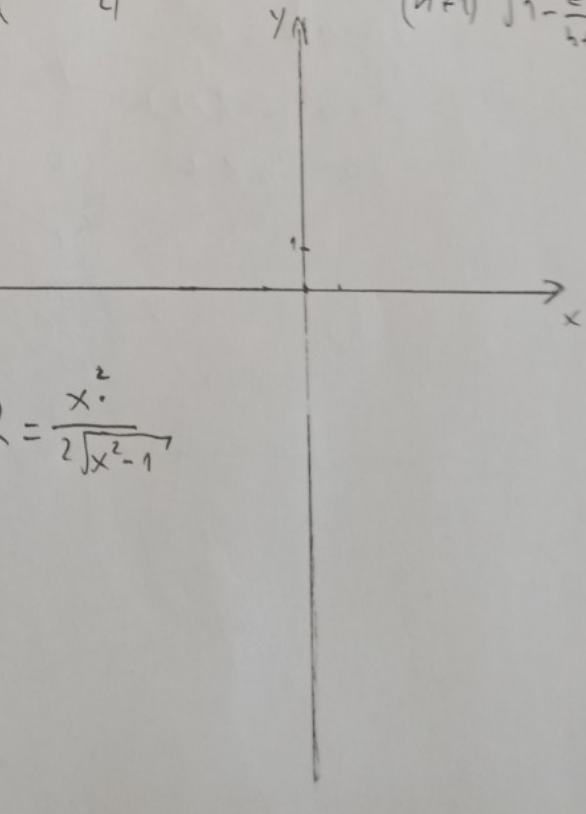
$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{\frac{2h+2}{2}\cdot\frac{2h-2}{2}}}{h+1} = \frac{\sqrt{h^2-1}}{h+1} =$$

$$= \sqrt{\frac{h-1}{h+1}} \qquad \left(\sqrt{1-\frac{2}{h+1}}\right)' = \frac{\left(-\frac{2}{h+1}\right)'}{2\sqrt{1-\frac{2}{h+1}}} = \frac{2\cdot\frac{1}{(h+1)^2}}{2\sqrt{1-\frac{2}{h+1}}} = \frac{1}{(h+1)^2\sqrt{1-\frac{2}{h+1}}}$$

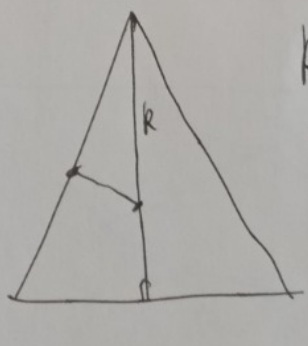
$$t^2\sqrt{1-\frac{1}{t}}$$

$$h\left(h^2-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$t^4 - t^2$$



$$\frac{1}{2}\cdot a^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}a^{-\frac{3}{2}}$$



$$R = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}$$

21103741 (U380344 M1304372)

ЧЕРНОВИК 1

$$\begin{cases}(a_1+10d)(a_1+14d) < \frac{2a_1+13d}{2}\cdot 14+47\\ (a_1+8d)(a_1+16d) > 7(a_1\cdot 2+13d)+12\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+24a_1d+140d^2 < 14a_1+13\cdot 7d+47\\ 14a+13\cdot 7d+12 < a^2+24ad+128d^2\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}\times\ 13\\ 7\\ \hline 91\end{array}$$

$$12+140d^2 < 128d^2+47$$

$$12d^2 < 35$$

$$\begin{cases}a^2+24a+140 < 14a+91+47\\ 14a+91+12 < a^2+24a+128\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+10a+2 < 0\\ a^2+10a+15 > 0\end{cases}$$

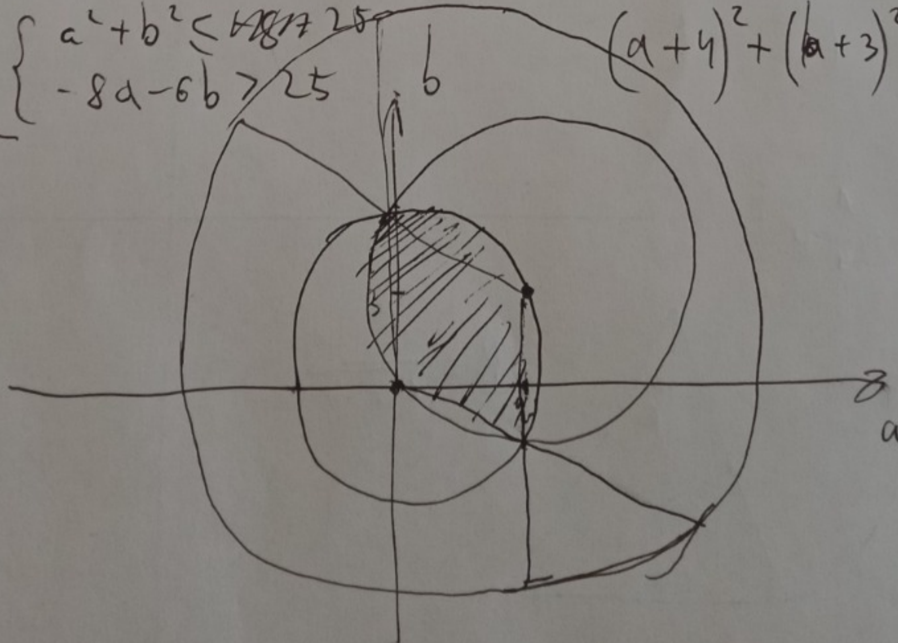
$$\begin{cases}\left(a-\frac{-10+\sqrt{92}}{2}\right)\left(a-\frac{-10-\sqrt{92}}{2}\right) < 0\\ \left(a-\frac{-10+\sqrt{40}}{2}\right)\left(a-\frac{-10-\sqrt{40}}{2}\right) > 0\end{cases}$$

$$\left(-5-\sqrt{23};-5-\sqrt{10}\right)\cup$$
$$\cup\left(-5+\sqrt{10};-5+\sqrt{23}\right).$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2 \le -8a-6b\\ -8a-6b \le 25\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2 \le 25\\ -8a-6b > 25\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 25\\ a^2+b^2 \le -8a-6b\end{cases}$$

$$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$$

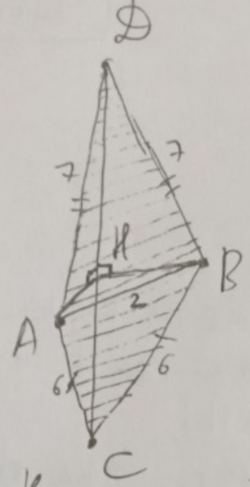


21103741 (U380344 M1304372)

$128d^2+47 > 140d^2+12$

$\boxed{2}$

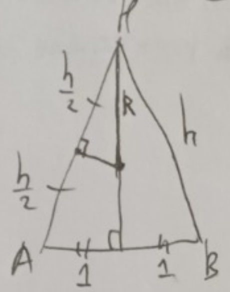
Чистовик 3



$\Delta DBC = \Delta DAC$ по трём сторонам;

$\Rightarrow$ основания высот на ст. CD совпадают; пусть такое основание — H;

т.к. $(AHB) \perp CD \parallel$ оси цилиндра, то радиус описанной окр-ти ΔAHB равен радиусу цилиндра (H лежит на цилиндре, т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow$ лежит на цилиндре). Пусть $AH=HB=h$; тогда $R = \frac{h^2}{2\sqrt{h^2-1}}$; возьмем производную:



$$\left(\frac{h^2-1+1}{2\sqrt{h^2-1}}\right)' = \left(\frac{\sqrt{h^2-1}}{2}\right)' + \left(\frac{1}{2\sqrt{h^2-1}}\right)' = \frac{2h}{2\sqrt{h^2-1}} - \frac{2h}{4(h^2-1)\sqrt{h^2-1}} =$$

$$= \frac{2h(h^2-1)-h}{4(h^2-1)\sqrt{h^2-1}} = 0, \text{ если } \begin{cases} 2h^2-3=0 \\ h^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

по формуле Герона в ΔACD: $(x = CD)$

$$h = \frac{2S}{x} = \frac{\sqrt{(169-x^2)(x^2-1)}}{2x}$$

$$\frac{(169-x^2)(x^2-1)}{4x^2} = \frac{3}{2}$$

Чистовик 1

$\boxed{1}$ Пусть первый член прогрессии a, разность d.

Сумма первых 14ти членов $S=\frac{a+a+13d}{2}\cdot 14=14a+91d$.

Запишем два известных неравенства в системе:

$$\begin{cases}(a+8d)(a+16d)>14a+91d+12\\ 14a+91d+47>(a+10d)(a+14d)\end{cases}$$

Сложим их:

$$a^2+24ad+128d^2+14a+91d+47>a^2+24ad+140d^2+14a+91d+12$$

$$128d^2+47>140d^2+12$$

$$12d^2<35$$

$$d\in\left(-\sqrt{\tfrac{35}{12}};\sqrt{\tfrac{35}{12}}\right).$$

Т.к. прогрессия возрастающая и состоит только из целых чисел, d должно быть натуральным; значит, единственное возможное значение $d=1$. Подставим это в систему:

$$\begin{cases}a^2+24a+128>14a+103\\ 14a+138>a^2+24a+140\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+10a+15>0\\ a^2+10a+2<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-5-\sqrt{23})(a-5+\sqrt{23})<0\\ (a-5-\sqrt{10})(a-5+\sqrt{10})>0\end{cases}$$

$$a\in(-5-\sqrt{23};-5-\sqrt{10})\cup(-5+\sqrt{10};-5+\sqrt{23}).$$

a – целое число, поэтому подходят только $a=-9$ и $a=-1$

Отв: $-9;-1$.

$d^2 < 35$ … из целых чисел,

Чистовик 2

$\boxed{3}$

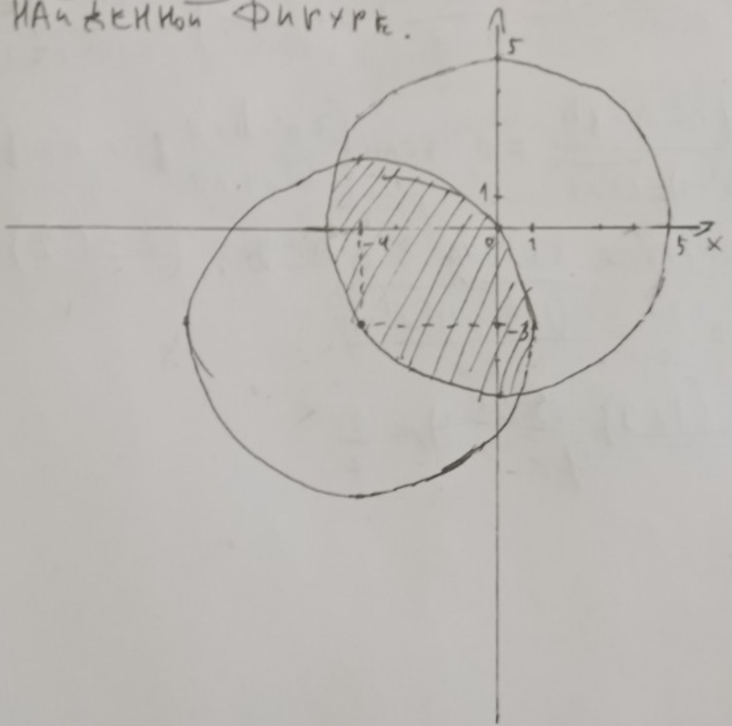
$$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b;\ 25)$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases}$$

— пересечение круга с рад. 5 и центром $(-4;-3)$ и круга с рад. 5 и центром $(0;0)$ в координатах $(a;b)$.

Задача в том, чтобы найти площадь фигуры, явл. объединением всех кругов с радиусом 5 и с центрами, ~~при~~ принадлежащими найденной фигуре.



Часть 2

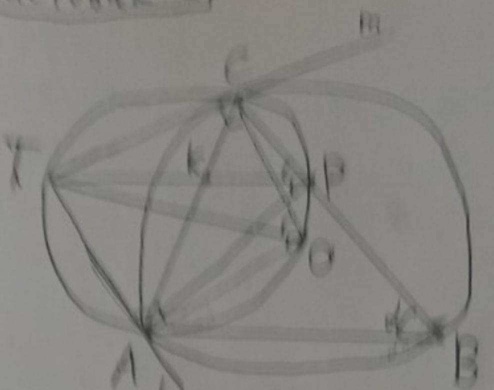
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103741**

ID профиля: **380344**

Вариант 19

6 Чистовик 2



Дано: $\triangle ABC$ – остроугольн.; окр. ω описана ок. ABC; O – центр ω; окр-ть ω_2 описана ок. $\triangle AOC$; l, m – касательные к ω в точках A и C; $l \cap m = T$; $\omega_2 \cap BC = \{C; P\}$; $TP \cap AC = K$; $S(\triangle APK) = 10$; $S(\triangle PCK) = 6$;

а) Найти $S(\triangle ABC)$.

Решение:

1) $\angle TAO = \angle TCO = 90^\circ \Rightarrow TCOA$ – вписанный по пр-ку, т.к. $T \in \omega_2$;

2) $CO = AO$ как радиусы ω; значит, $\triangle AOT = \triangle COT$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow AT = TC$, тогда $\angle CPT = \angle TPA = \angle COT = \angle TOA$, как вписанные в ω_2 и опирающиеся на дуги, стянутые равными хордами.

3) В ω: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle COA = \alpha$ (если $\angle COT = \alpha$), т.к. он явл. вписанным углом.

4) т.к. $\angle KPA = \angle CPK$, $\frac{S(CPK)}{S(KPA)} = \frac{KP \cdot PC}{KP \cdot AP} \Rightarrow \frac{PC}{AP} = \frac{3}{5}$; по св-ву бис-сы в $\triangle APC$ $\frac{KC}{AK} = \frac{PC}{AP} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{8}{3}$.

5) $\triangle CKP \sim \triangle CAB$ (т.к. $\angle KCP = \angle ACB$, $\angle CPK = \angle CBA$) $\Rightarrow \frac{S(ABC)}{S(CPK)} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \frac{64}{9} \Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{128}{3}$. Отв: $\frac{128}{3}$.

~~б) Дано: $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$; Найти AC.~~

~~Пусть радиус ω – R, радиус ω_2 – r.~~

~~В $\triangle ACP$:~~

б) Дано: $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$; Найти AC.

$\operatorname{tg}\alpha = 2$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$;

~~По теореме косинусов в $\triangle AP$~~

В $\triangle APC$: $S = \frac{AP \cdot CP \cdot \sin 2\alpha}{2} \Rightarrow CP^2 = 24$ (т.к. $S = 10 + 6 = 16$; $AP = \frac{5}{3}CP$)

По теореме косинусов: $AC^2 = PC^2 + \frac{25}{9}PC^2 - 2\cos 2\alpha \cdot \frac{5}{3}PC^2 = \frac{416}{3} \Rightarrow AC = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$

Отв: $4\sqrt{\frac{26}{3}}$.

Чистовик 1

$\boxed{4}$ $НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15}$ означает, что в разложениях a, b и c на простые множители степень трёх не больше 17 (при этом хотя бы у одного числа равна 17), степень семи не больше 15 (при этом хотя бы у одного равна 15) и нет других множителей. $НОД(a;b;c)=21=3^1\cdot 7^1$ означает, что степени 3 и 7 у всех чисел как минимум 1.

Найдем кол-во троек чисел, у которых степени 3 и 7 меньше или равны 17 и 15 соответственно (но не меньше 1) и вычтем из этого кол-ва кол-во троек, в которых степени 3 и 7 меньше 17 и 15, но больше 0:

$(17\cdot 15)^3-(16\cdot 14)^3=5341951$ Отв: 5341951.

САТРАННЫЕ И Ш В ТОЧКАХ

Ччерник 2

$\log_{(x-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)+1=\log_{(x-1)^2}\left(\frac{x}{4}-1\right)$

$\log_{x-1}$

$AC^2=PC^2+\frac{25}{9}PC^2-\frac{4}{15}\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}}\cdot\frac{5}{9}PC^2$

$AC^2=\frac{34-4\sqrt{5}}{9}PC^2$

PC^2

$\cancel{\frac{34-4\sqrt{5}}{9}PC}$

$8 \quad \cancel{8}\ CP^2\cdot\cancel{4}$

$\cancel{16}=\frac{1}{\cancel{11}}$

CP^2-

$24\left(1+\frac{26}{9}\right)$ $\cancel{\frac{169}{33}}$ $\cancel{\frac{1}{3}}^2$

$\frac{52}{9}$

$\frac{8\cdot 52}{3}$ 416

2 6 16

$4\sqrt{\frac{26}{3}}$

НЕ БОЛЬШ
СТЕПЕН
РАВНА
9 ОЗНА
МИНИМУ
3 4
(И НЕ
КОТОРЫ
ШЕ О

21103741 (U380344 M1304373)

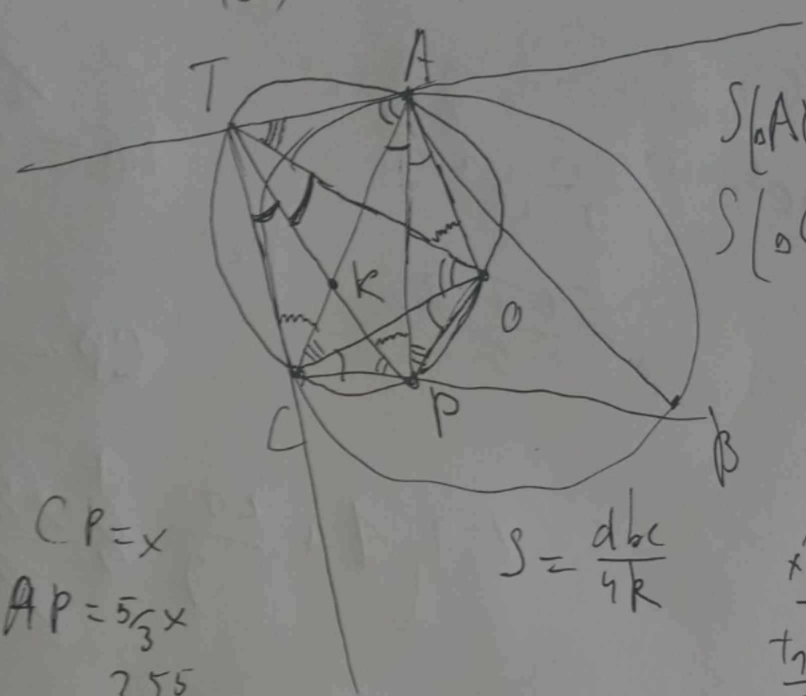
Черновик 1

$$\begin{cases} \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) \\ \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=2 \end{cases}$$

$S=k$

$10=\dfrac{kp\cdot\frac{5}{3}x}{2}$

$6=\dfrac{kp\cdot x}{2}$



$S(\triangle APK)=10$

$S(\triangle CPK)=6$

$kp=\dfrac{3}{x}=$

$CP=x$

$AP=\frac{5}{3}x$

$S=\dfrac{abc}{4R}$

$$\begin{array}{r} \times 255 \\ 255 \\ \hline 1275 \\ +1275 \\ 510 \\ \hline 65025 \end{array}$$

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt5}$

$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt5}$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 15 \\ \hline 85 \\ +17 \\ \hline 255 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 16 \\ 14 \\ \hline 64 \\ +16 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 255 \\ 224 \\ \hline 1020 \\ +510 \\ 510 \\ \hline 57120 \end{array}$$

$a=3^{a_1}\cdot7^{a_2}$

$b=3^{b_1}\cdot7^{b_2}$

$c=3^{c_1}\cdot7^{c_2}$

$31\cdot\dfrac{AC}{\sin\alpha}=2R$

$R=\dfrac{3abc}{512}$

$\operatorname{tg}\alpha=2$

$4+1=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$$\begin{array}{r} \times 224 \\ 224 \\ \hline 896 \\ +448 \\ 448 \\ \hline 50176 \\ +57120 \\ \hline 107296 \\ +65025 \\ \hline 172321 \\ \times 31 \\ \hline 172321 \\ +516963 \\ \hline 5341951 \end{array}$$

$(17\cdot15-16\cdot14)(17^2\cdot15^2+14\cdot15\cdot16\cdot17+16^2\cdot14^2)$

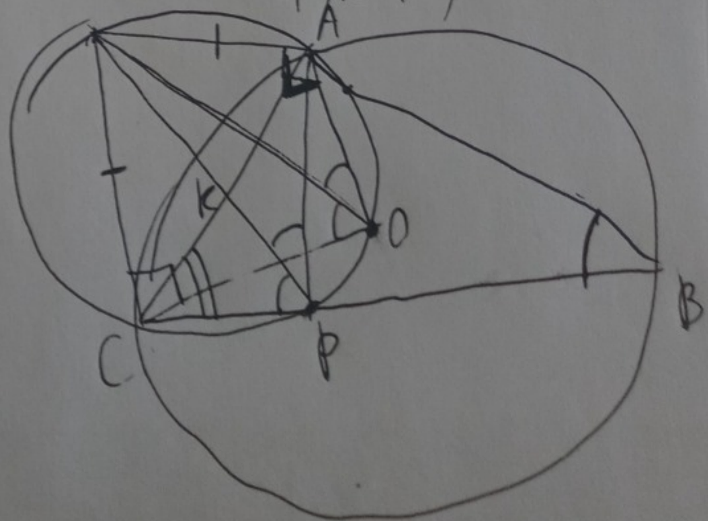
$AC=2r\sin2\alpha$

$R=2r\cos\alpha$

$r=\dfrac{R}{2\cos\alpha}$

$AC=R\,2\sin\alpha$

$\dfrac{AC}{\sin\alpha}=2R$



21103741 (U380344 M1304373)