Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103740**

ID профиля: **349014**

Вариант 19

Чистовик

№ 1

пусть d - разность прогрессии

$a_{17}=a_{15}+2d$

$a_{11}=a_9+2d$

запишу неравенства из условия

$$\begin{cases} a_9(a_{15}+2d)>S+12 \\ (a_9+2d)a_{15}<S+47 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} a_9a_{15}+2a_9d>S+12 \\ a_9a_{15}+2a_{15}d<S+47 \end{cases}$$

Эти неравенства дают нам понять, что $a_9a_{15}+2a_{15}d-a_9a_{15}-2a_9d<\cancel{39}\,35$

$2d(a_{15}-a_9)<35$

$12d^2<35$

$d^2<\frac{35}{12}$ (1)

по условию прогрессия возрастающая и все члены целые $\Rightarrow d\in N$

в нер-ве (1) подходят из ~~усл~~ натуральных только $d=1$, значит у нашей прогрессии $d=1$

1

Чистовик

теперь запишем

$a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 + n - 1$, т.к $d = 1$

$$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2}\cdot 14 = \frac{a_1 + a_1 + 14 - 1}{2}\cdot 14 = 7(2a_1 + 13)$$

$a_9 = a_1 + 8$

$a_{14} = a_1 + 16$

$a_{11} = a_1 + 10$

$a_{15} = a_1 + 14$

$$\begin{cases} (a_1+8)(a_1+16) > 7(2a_1+13)+12 \quad (1) \\ (a_1+10)(a_1+14) < 7(2a_1+13)+47 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $a_1^2 + 24a_1 + 128 \geq 14a_1 + 91 + 12$

$a_1^2 + \cancel{8a_1}\, 10a_1 + 25 \geq 0$

$D = 0$

$a_1 = \frac{-10}{2} = -5$

т.е $a_1 \neq -5$.

(2) $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 100 - 4\cdot 2 = 92$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2}$

Чистовик

$$\frac{-10-\sqrt{92}}{2} \qquad \frac{-10+\sqrt{92}}{2} \qquad a_1$$

$$\frac{-10-\sqrt{92}}{2} = -5-\sqrt{23}$$

$$\frac{-10+\sqrt{92}}{2} = -5+\sqrt{23}$$

по условию a_1 целое

$$4<\sqrt{23}<\sqrt{25}=5$$

тогда подходят $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

№ 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b; 25) & (2) \end{cases}$$

рассмотрим (1)

это ~~отд~~ круг с центром $(a; b)$ и радиусом 25

рассмотрим (2)

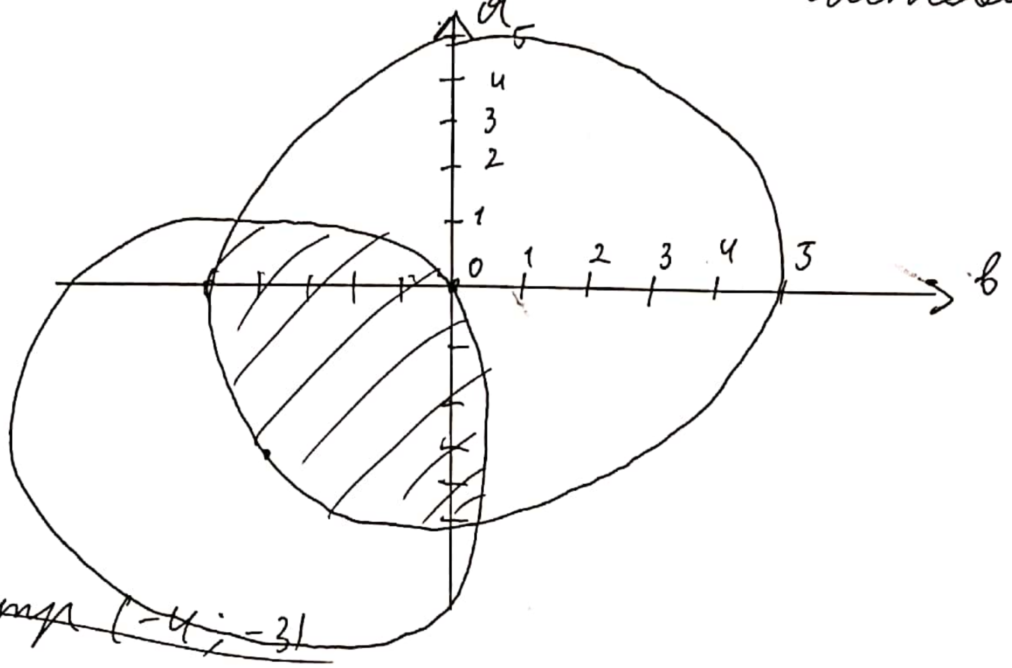
$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases}$$

строго в осях $(a;b)$

это два круга один с центром $(-4; -3)$ и $R=5$

а другой с центром $(0; 0)$ и $R=5$

Чистовик



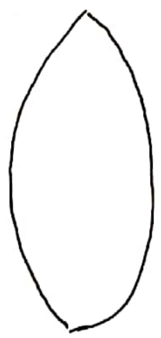
~~центр (−4; −3)~~

центр (−4; −3) попадает на ~~вторую окружн~~ второй круг

по итогу решение это линза

т.е при каждом a и в из этой линзы

в осях x и y строится круг



после того как мы переместим

в координаты x и y

получится так:

т.е появится такая полоса шириной 5, т.к

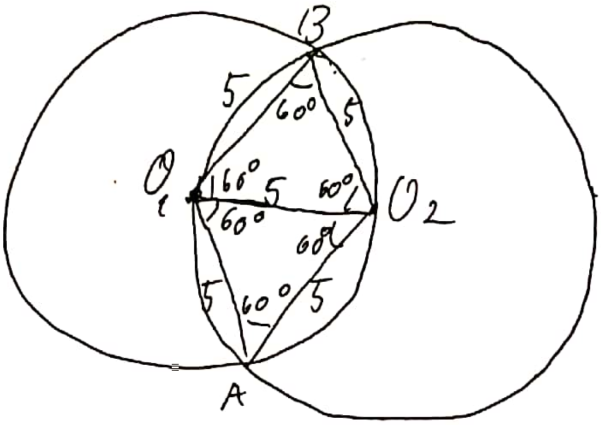
радиус ~~окр~~ круга в x и y = 5

тогда нужно найти площадь полученного

предмета

Чистовик

$\cancel{S_{\text{линзы}} = \frac{120}{360}\pi \cdot 5^2}$



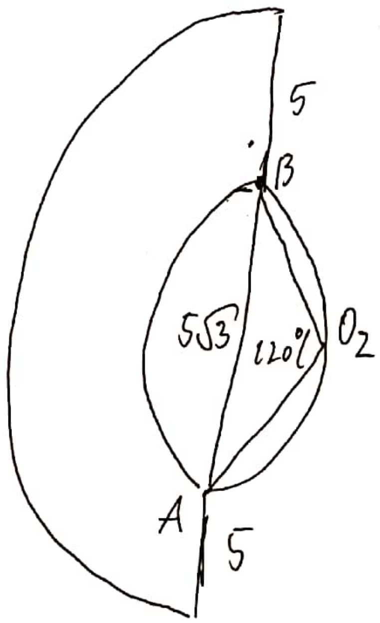
$S_{\text{сектора}} = \frac{1}{3}\pi 5^2 = \frac{25\pi}{3}$

$S_{AO_1B} = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin 120° =$

$= \frac{25}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$S_{\text{линзы}} = 2(S_{\text{сектора}} - S_{AO_1B}) =$

$= 2\left(\frac{25\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{4}\right)$

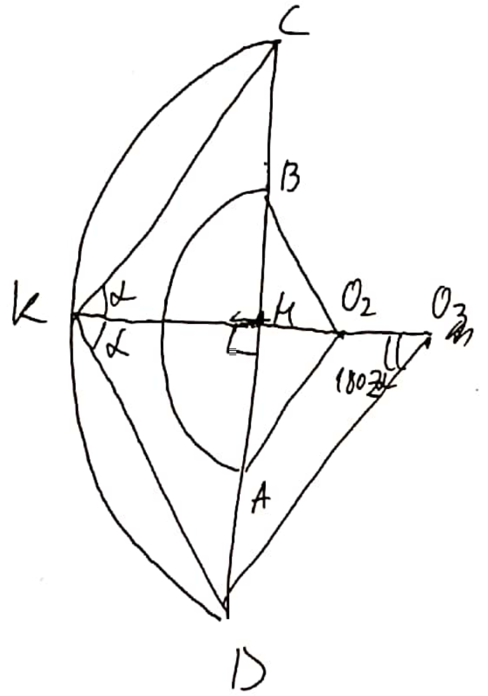


$AB = 2 \cdot 5 \cancel{\cos} \sin 60 = 5\sqrt{3}$

перерисовать

Чистовик

O_3 - центр этой полоски



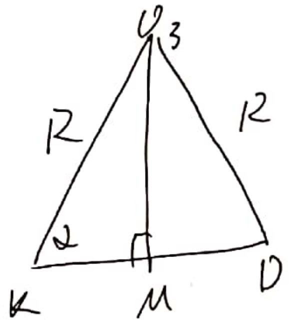
$KM = 5 + 2{,}5 = 7{,}5$

$CM = 5 + 2{,}5\sqrt{3} = 5 + \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$tg\,\alpha = \frac{CM}{KM} = \frac{5+2{,}5\sqrt{3}}{5+2{,}5}$

R - радиус $= KO_3 = O_3D$

$KD = \sqrt{CM^2 + KM^2}$



$KM = \frac{KD}{2} = \frac{\sqrt{CM^2+KM^2}}{2}$

~~$tg\,\alpha =$~~

~~$O_3M =$~~

$O_3M = KM\,tg\,\alpha = \sqrt{\frac{CM^2+KM^2}{2}} \cdot \frac{CM}{KM}$

$R = \sqrt{KM^2 + O_3M^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{CM^2+KM^2}{4} + \frac{CM^2+KM^2}{4} \cdot \frac{CM^2}{KM^2}\right)} = \cancel{\sqrt{\left(\frac{CM^2+KM^2}{4} + CM^2+KM^2\right)}} =$

$= \sqrt{\frac{CM^2+KM^2}{4}\left(1 + \frac{CM^2}{KM^2}\right)} = \frac{CM^2+KM^2}{2KM}$

$S_{O_3CKD} = \cancel{R \cdot 360 - 4\alpha \frac{2\pi - 4\alpha}{2\pi} = R\left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)} = \pi R^2 \cdot \left(\frac{2\pi - 4\alpha}{2\pi}\right)$

$S_{O_3CD} = \frac{1}{2} R^2 \sin(360^\circ - 4\alpha)$

$S_M = \cancel{2(S_3CKD - O_3CD)} = 2(S_{O_3CKD} - S_{O_3CD})$

6

Чистовик

~~$S_M = 2R^2\left(\frac{1}{2}\sin(2\pi-4\alpha)\right)$~~

Ответ:

$$S_M = 2R^2\left(\pi\left(\frac{2\pi-4\alpha}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\sin(2\pi-4\alpha)\right),\text{ где}$$

$$R=\frac{(5+2{,}5\sqrt{3})^2+(5+2{,}5)^2}{15}$$

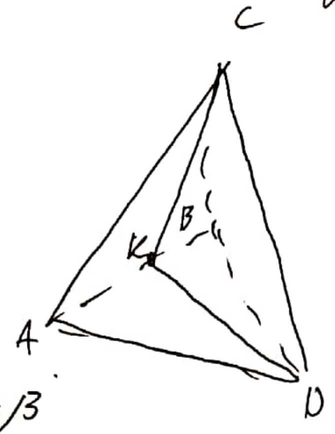
$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{5+2{,}5\sqrt{3}}{7{,}5}\right)$$

№2

чтобы тетраэдер имел наименьший радиус CD должно лежать на боковой поверхности конуса.

А точки A и B должны располагаться на боковой поверхности конуса.

найду угол между гранями ABC и ABD



K середина AB

т.к. AD = DB и AC = CB

=> CK и DK высоты

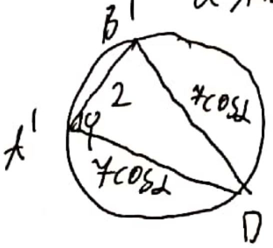
$DK=\sqrt{AD^2-AK^2}=\sqrt{48}$

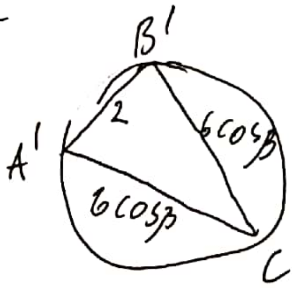
$CK=\sqrt{35}$

угол CKD = углу между гранями ABC и ABD

пусть угол между ABD и основанием конуса $=\alpha$, а угол между ABC и основанием $=\beta$

спроецирую ABD на основание и ABC



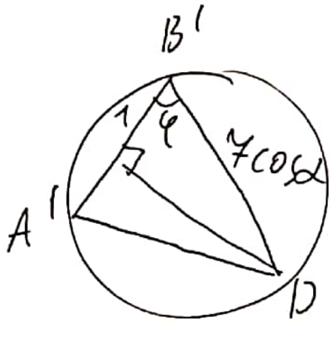


7

Чистовик

~~т.к радиус минимален~~ $\Rightarrow 7\cos\alpha$

~~как~~ $\boxed{7\cos\alpha = 6\cos\beta}$



$$\cos\varphi = \frac{1}{7\cos\alpha}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{1}{7\cos\alpha}\right)^2}$$

$$R = \frac{7\cos\alpha}{2\sqrt{1-\left(\frac{1}{7\cos\alpha}\right)^2}} =$$

$$= \frac{(7\cos\alpha)^2}{2\sqrt{49\cos^2\alpha-1}} = \frac{49\cos^2\alpha}{2\sqrt{49\cos^2\alpha-1}}$$

$49\cos^2\alpha = t$

$\cancel{R = \frac{49t}{2\sqrt{\ }}}$ $\quad R = \frac{t}{2\sqrt{t-1}}$ ~~т.к R должно~~ R должно быть минимальное

$$R'(t) = \frac{2\sqrt{t-1} - \frac{t}{\sqrt{t-1}}}{4(t-1)} = 0$$

$2\sqrt{t-1} = \frac{t}{\sqrt{t-1}}$ $\quad$ при $t = 2$ радиус минимален

$2t - 2 = t$

$t = 2 \Rightarrow 49\cos^2\alpha = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{6}$

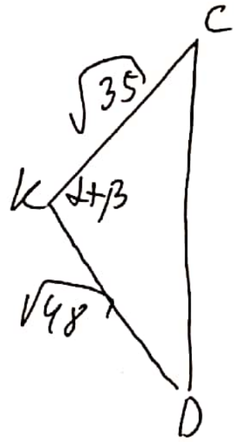
$\angle CKD = \alpha + \beta$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{2}{49}} = \frac{\sqrt{47}}{7}$

$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{2}{36}} = \frac{\sqrt{34}}{6}$

8

по т косинусов Чистовик



$$CD=\sqrt{KC^2+KD^2-2KC\cdot KD\cdot\cos(\alpha+\beta)}=$$

$$=\sqrt{35+48-2\sqrt{35}\sqrt{48}\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=$$

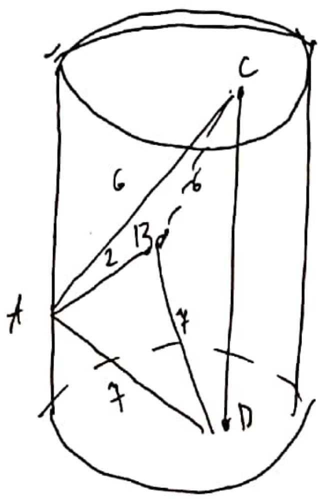
$$=\frac{\sqrt{2}}{7}\cdot\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{47}}{7}\cdot\frac{\sqrt{34}}{6}=$$

$$=\frac{2-\sqrt{47\cdot34}}{42}$$

Ответ:

$$CD=\sqrt{83-2\sqrt{35\cdot48}\left(\frac{2-\sqrt{47\cdot34}}{42}\right)}$$

Черновик



$7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Черновик

$\frac{9+17}{2}=13$ $\frac{11+15}{2}=13$ 12345

3 · 5 = 15

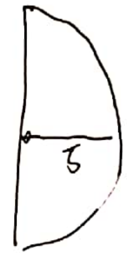
$\cancel{S=\frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot n=a_{8}\cdot 15a_6}$

$15a_6-a_{15}$

$a_9+a_{17}=a_{11}+a_{15}$

$a_9a_{17}>S+12$ $\frac{2,5\sqrt{3}}{2,5\sqrt{3}}$

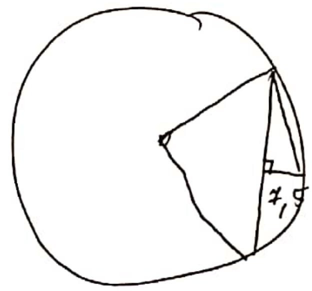
$a_{11}a_{15}<S+47$



$a_{11}=a_9+2d$

$a_{17}=a_{15}+2d$

$16\times8=128$



$a_9(a_{15}+2d)>S+12$

$(a_9+2d)a_{15}<S+47$

$\cancel{2da_9}$

$\cancel{2da}$

$2da_{15}$

$a_9a_{15}+2da_9>n$

$a_9a_{15}+2da_{15}<n+35$

$2da_{15}-2da_9\le33$

$(a_1+8\cancel{d})$

$2d(6d)\le33$

$\frac{92}{2}=46=23$

$12d<34$

$d<\frac{\cancel{34}\,17}{\cancel{12}\,6}<\frac{17}{\cancel{46}}$

$91+12=103$

$91+47=138$

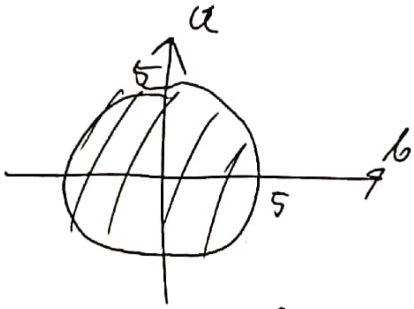
$128-103=25$

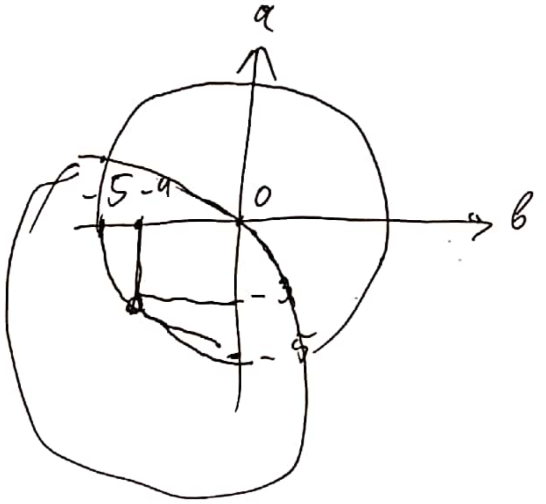
$\sqrt{(5+2,5\sqrt{3})^2+(2,5)^2}$ $5+2,5\sqrt{3}$

Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$ - круг с центром $(a; b)$ радиусом $= 5$

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b; 25)$



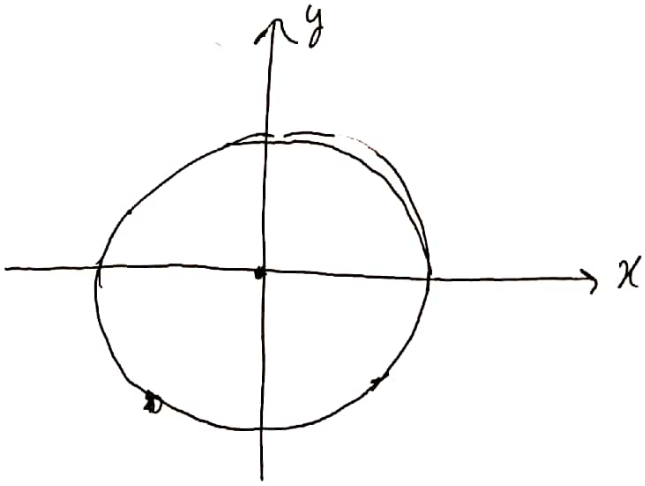


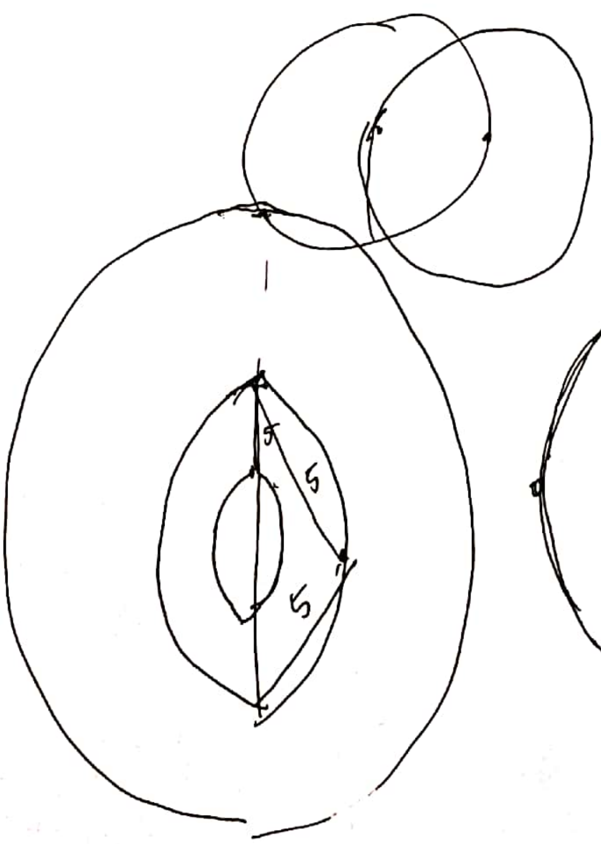
$a^2+b^2 \le -8a-6b$

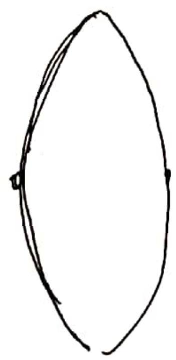
$a^2+8a+b^2+6b \le 0$

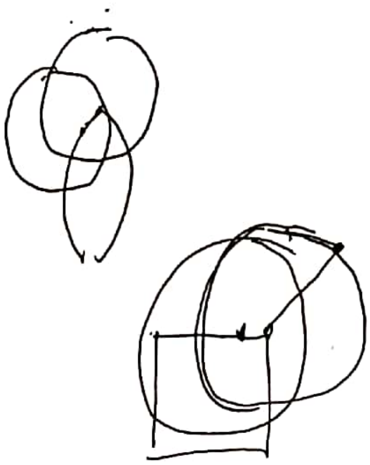
$(a^2+4)^2-16+(b+3)^2-9$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$









Черновик

Чистовик

№ 1

пусть d - разность прогрессии

$a_{17} = a_{15} + 2d$

$a_{11} = a_9 + 2d$

запишу неравенства из условия

$$\begin{cases} a_9(a_{15}+2d) > S+12 \\ (a_9+2d)a_{15} < S+47 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a_9 a_{15} + 2a_9 d > S+12 \\ a_9 a_{15} + 2a_{15} d < S+47 \end{cases}$$

Эти неравенства дают нам понять, что $a_9 a_{15} + 2a_{15} d - a_9 a_{15} - 2a_9 d < 35$

$2d(a_{15} - a_9) < 35$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12}$ (1)

по условию прогрессия возрастающая и все члены целые $\Rightarrow d \in N$

вып-ие (1) подходят из ~~усл~~ натуральных только $d = 1$, значит у нашей прогрессии $d = 1$

Чистовик

теперь запишем

$a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 + n - 1$, т.к $d = 1$

$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = \frac{a_1 + a_1 + 14 - 1}{2} \cdot 14 = 7(2a_1 + 13)$

$a_9 = a_1 + 8$

$a_{17} = a_1 + 16$

$a_{11} = a_1 + 10$

$a_{15} = a_1 + 14$

$$\begin{cases} (a_1+8)(a_1+16) > 7(2a_1+13) + 12 \quad (1) \\ (a_1+10)(a_1+14) < 7(2a_1+13) + 47 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12$

$a_1^2 + \cancel{8a_1} 10a_1 + 25 > 0$

$D = 0$

$a_1 = \frac{-10}{2} = -5$

т.е $a_1 \neq -5$.

(2) $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 100 - 4 \cdot 2 = 92$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2}$

Чистовик

$-\frac{10-\sqrt{92}}{2}$ $-\frac{10+\sqrt{92}}{2}$ a_1

$-\frac{10-\sqrt{92}}{2}=-5-\sqrt{23}$

$-\frac{10+\sqrt{92}}{2}=-5+\sqrt{23}$

по условию a_1 целое

$4<\sqrt{23}<\sqrt{25}=5$

тогда подходят $-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1$

Ответ: $-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1$

№ 3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b;25) & (2)\end{cases}$$

рассмотрим (1)

это ~~отр~~ круг с центром $(a;b)$ и радиусом 25

рассмотрим (2)

$(2)\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2\le -8a-6b\\ a^2+b^2\le 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}$

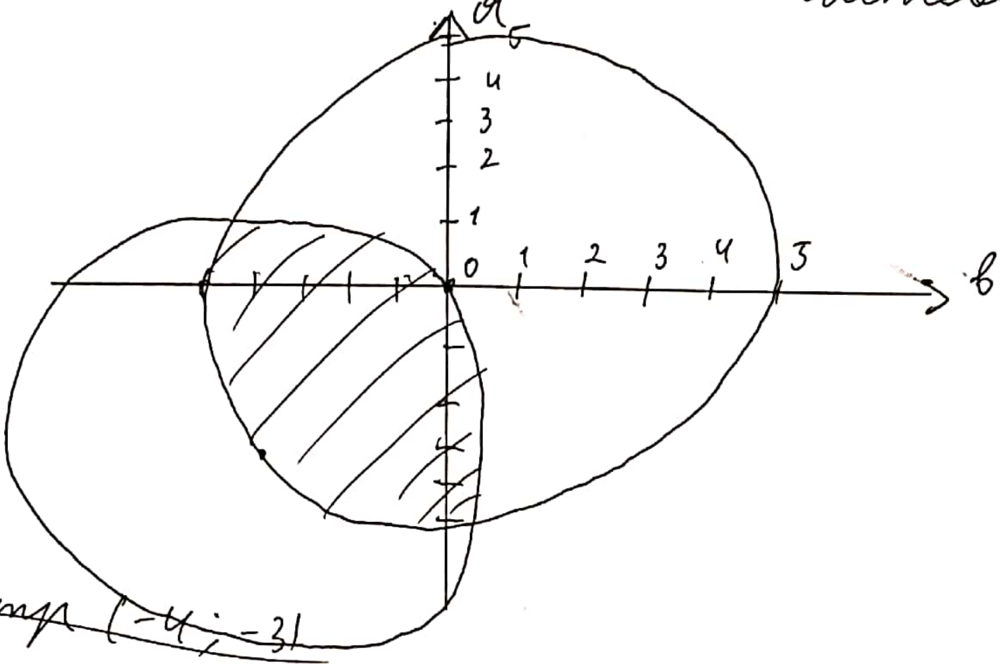
строго в осях $(a;b)$

это два круга один с центром $(-4;-3)$ и $R=5$

а другой с центром $(0;0)$ и $R=5$

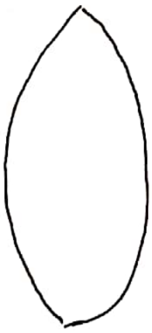
3

Чистовик

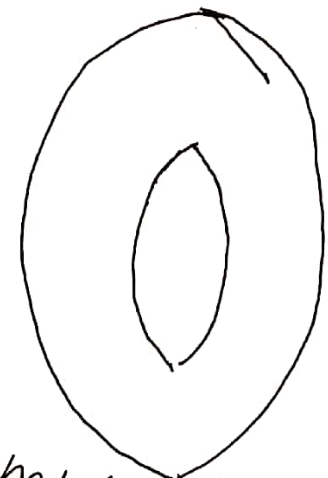


~~центр (−4; −3)~~

центр (−4; −3) попадает на втор~~ую~~ой ~~окружн~~ круг
по итогу решение это линза
т.е при каждом a и в из этой линзы
в осях x и y строится круг



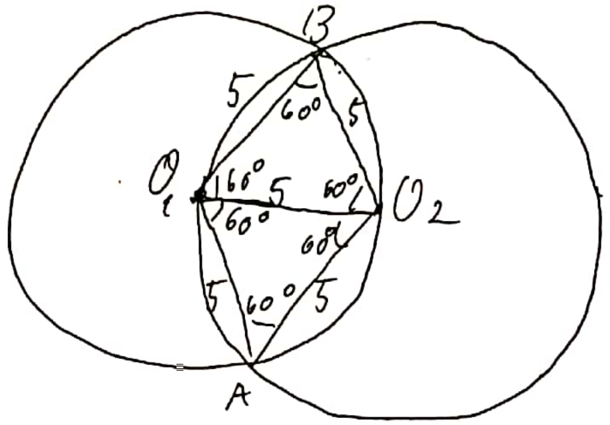
после того как мы переместим
в координаты x и y
получится так:



т.е появится такая полоса шириной 5, т.к
радиус ~~окр~~ круга в x и y = 5
тогда нужно найти площадь полученного
предмета

Чистовик

~~$S_{\text{линзы}} = \frac{120}{360}\pi \cdot 5^2$~~



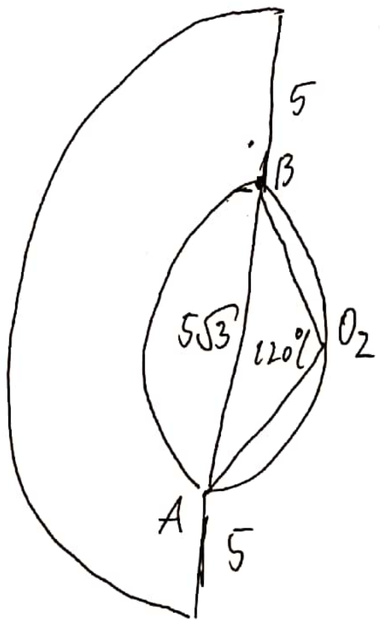
$$S_{\text{сектора}} = \frac{1}{3}\pi 5^2 = \frac{25\pi}{3}$$

$$S_{AO_1B} = \frac{1}{2}\cdot 5^2 \cdot \sin 120° =$$

$$= \frac{25}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{линзы}} = 2\left(S_{\text{сектора}} - S_{AO_1B}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{25\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{4}\right)$$



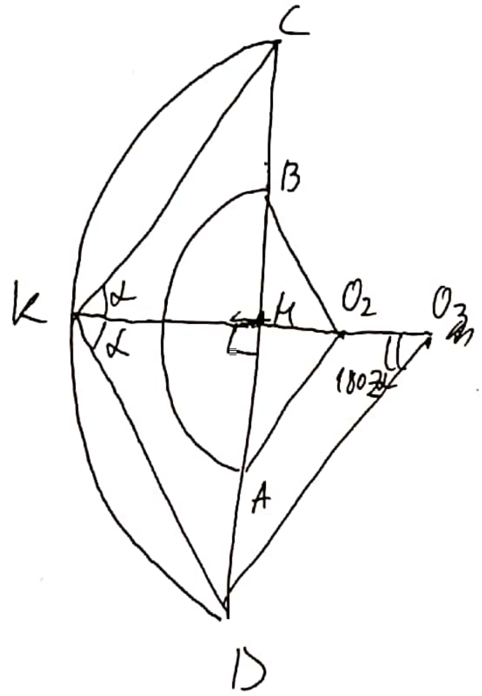
$AB = 2\cdot 5\,\cancel{\cos}\,\sin 60 = 5\sqrt{3}$

перерисовать

5

Чистовик

O_3 - центр этой полоски



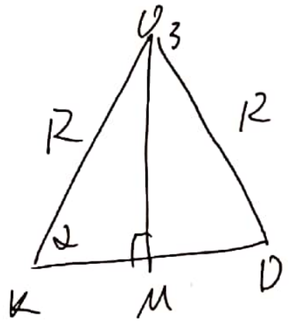
$KM = 5+2,5 = 7,5$

$CM = 5+2,5\sqrt{3} = 5+\frac{5\sqrt{3}}{2}$

$tg\,\alpha = \frac{CM}{KM} = \frac{5+2,5\sqrt{3}}{5+2,5}$

R - радиус $= KO_3 = O_3D$

$KD = \sqrt{CM^2+KM^2}$



$KM = \frac{KD}{2} = \frac{\sqrt{CM^2+KM^2}}{2}$

~~tgα =~~

~~O_3M~~

$O_3M = KM\,tg\alpha = $

$= \frac{\sqrt{CM^2+KM^2}}{2} \cdot \frac{CM}{KM}$

$R = \sqrt{KM^2+O_3M^2} =$

$= \sqrt{\frac{CM^2+KM^2}{4} + \frac{CM^2+KM^2}{4}\cdot\frac{CM^2}{KM^2}} = \cancel{\sqrt{\frac{CM^2+KM^2}{4} + CM^2+KM^2}} =$

$= \sqrt{\frac{CM^2+KM^2}{4}\left(1+\frac{CM^2}{KM^2}\right)} = \frac{CM^2+KM^2}{2KM}$

$S_{O_3CKD} = \cancel{R \cdot \frac{2\pi-4\alpha}{2\pi} = R\left(1-\frac{2\alpha}{\pi}\right)} = \pi R^2 \cdot \left(\frac{2\pi-4\alpha}{2\pi}\right)$

$S_{O_3CD} = \frac{1}{2} R^2 \sin(360^\circ-4\alpha)$

$S_M = \cancel{2(S_{O_3CKD} - S_{O_3CD})} = 2(S_{O_3CKD} - S_{O_3CD})$

6

Чистовик

$\cancel{S_M = 2R^2\left(\frac{1}{2}\sin(2\pi-4\alpha)\right)}$

Ответ:

$$S_M = 2R^2\left(\pi\left(\frac{2\pi-4\alpha}{2\pi}\right)-\frac{1}{2}\sin(2\pi-4\alpha)\right),$$ где

$$R=\frac{(5+2,5\sqrt{3})^2+(5+2,5)^2}{15}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{5+2,5\sqrt{3}}{7,5}\right)$$

№2

Чтобы тетраэдр имел наименьший радиус CD должно лежать на боковой поверхности конуса.

А точки A и B должны располагаться на боковой поверхности конуса.

Найду угол между гранями ABC и ABD

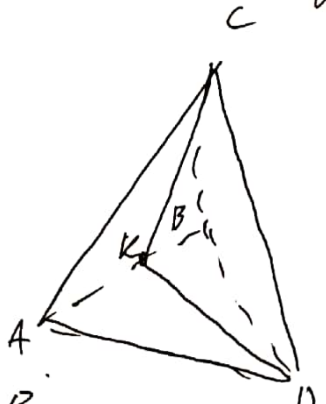
K середина AB

т.к. $AD = DB$ и $AC = CB$ => CK и DK высоты

$DK = \sqrt{AD^2-AK^2} = \sqrt{48}$

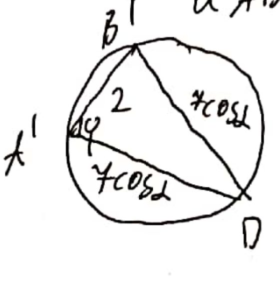
$CK = \sqrt{35}$

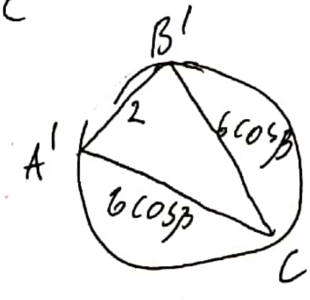
угол CKD = углу между гранями ABC и ABD



Пусть угол между ABD и основанием конуса $=\alpha$, а угол между ABC и основанием $=\beta$

Спроецирую ABD на основание и ABC

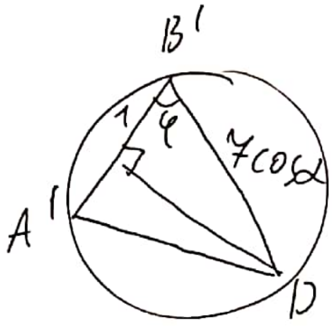




Чистовик

~~т.к радиус минимален~~ $\Rightarrow 7\cos\alpha$

~~как~~ $\boxed{7\cos\alpha = 6\cos\beta}$



$$\cos\varphi = \frac{1}{7\cos\alpha}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{1}{7\cos\alpha}\right)^2}$$

$$R = \frac{7\cos\alpha}{2\sqrt{1-\left(\frac{1}{7\cos\alpha}\right)^2}} =$$

$$= \frac{(7\cos\alpha)^2}{2\sqrt{49\cos^2\alpha-1}} = \frac{49\cos^2\alpha}{2\sqrt{49\cos^2\alpha-1}}$$

$\cancel{R}\, 49\cos^2\alpha = \cancel{49c}\, t$

$\cancel{R = \frac{49t}{2\sqrt{\ }}}$ $\quad R = \frac{t}{2\sqrt{t-1}}$ $\quad$ ~~т.к R минимально~~ R должно быть минимальное

$$R'(t) = \frac{2\sqrt{t-1} - \cancel{2}\frac{t}{\sqrt{t-1}}}{4(t-1)} = 0$$

$$2\sqrt{t-1} = \frac{t}{\sqrt{t-1}}$$ при $t = 2$ радиус минимален

$$2t - 2 = t$$

$$t = 2 \Rightarrow 49\cos^2\alpha = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

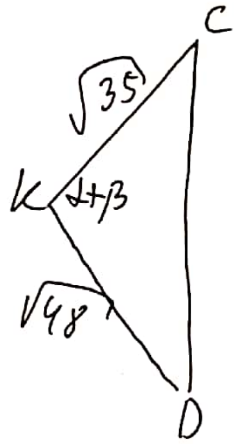
$\angle CKD = \alpha + \beta$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{2}{49}} = \frac{\sqrt{47}}{7}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{2}{36}} = \frac{\sqrt{34}}{6}$$

8

по т косинусов Чистовик



$$CD = \sqrt{KC^2 + KD^2 - 2KC\cdot KD\cdot\cos(\alpha+\beta)} =$$

$$= \sqrt{35 + 48 - 2\sqrt{35}\sqrt{48}\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$$

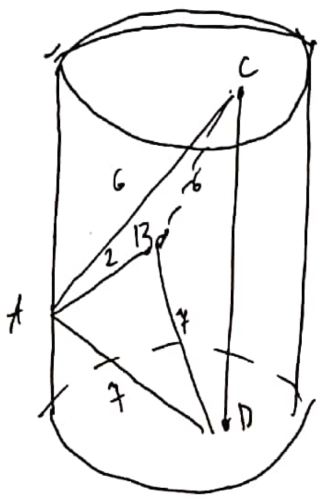
$$= \frac{\sqrt{2}}{7}\cdot\frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{47}}{7}\cdot\frac{\sqrt{34}}{6} =$$

$$= \frac{2 - \sqrt{47\cdot 34}}{42}$$

Ответ:

$$CD = \sqrt{\cancel{55}83 - 2\sqrt{35\cdot 48}\left(\frac{2-\sqrt{47\cdot 34}}{42}\right)}$$

Черновик



$7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

Черновик

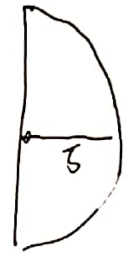
$\frac{9+17}{2}=13$ $\frac{11+15}{2}=13$ 12345

$3\cdot 5=15$

$\cancel{S=\frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot n}$

$15a_6-a_{15}$

$a_9+a_{17}=a_{11}+a_{15}$



$\frac{2,5\sqrt{3}}{2,5\sqrt{3}}$

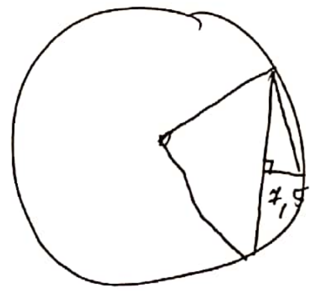
$a_9 a_{17} > S+12$

$a_{11} a_{15} < S+47$

$a_{11}=a_9+2d$

$a_{17}=a_{15}+2d$

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 8 \\ \hline 128 \end{array}$$



$a_9(a_{15}+2d) > S+12$

$(a_9+2d)a_{15} < S+47$

$\cancel{2da_9}$

$\cancel{2d}$

$2da_{15}$

$a_9 a_{15}+2da_9 > n$

$a_9 a_{15}+2da_{15} < n+35$

$2da_{15}-2da_9 \le 33$

(a_1+8d)

$2d(6d) \le 33$

$\frac{92}{2}=46=23$

$12d<34$

$d<\frac{34}{12}<\frac{17}{6}$

$$\begin{array}{r} +91 \\ 47 \\ \hline 138 \end{array}$$

$91+12=103$

$\sqrt{(5+2,5\sqrt{3})^2+(2,5)^2}$

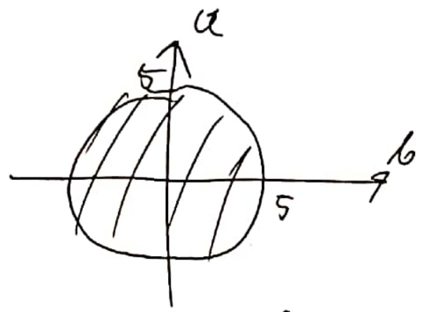
$5+2,5\sqrt{3}$

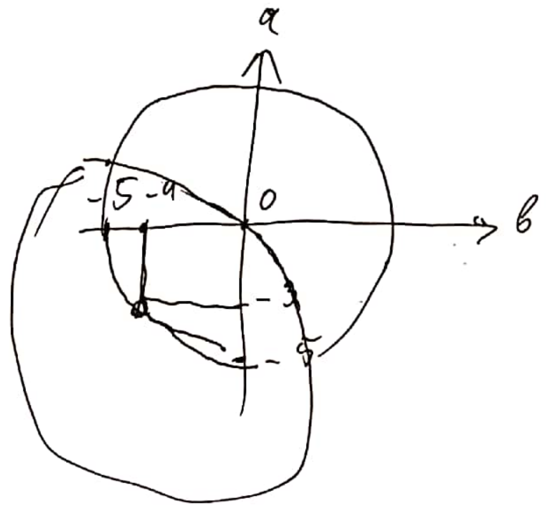
$$\begin{array}{r} -128 \\ 103 \\ \hline 25 \end{array}$$

Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$ - круг с центром $(a; b)$ радиусом $= 5$

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b; 25)$



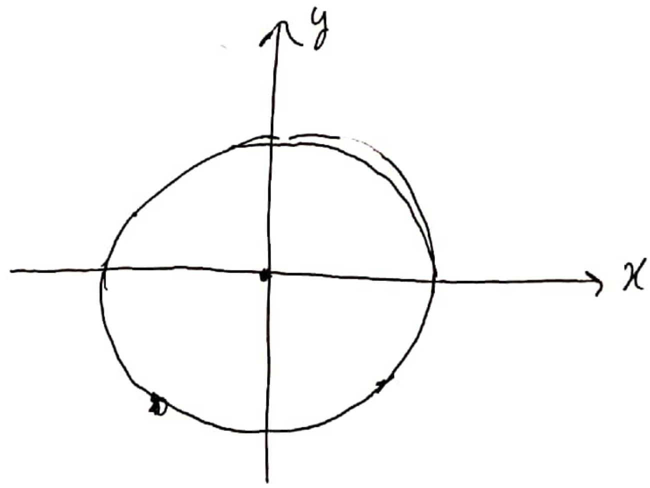


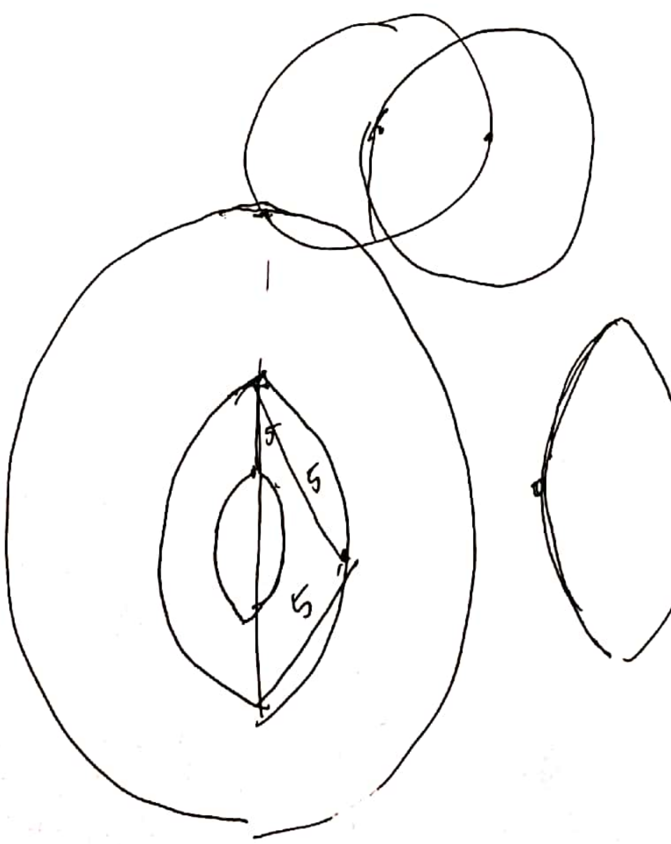
$a^2+b^2 \le -8a-6b$

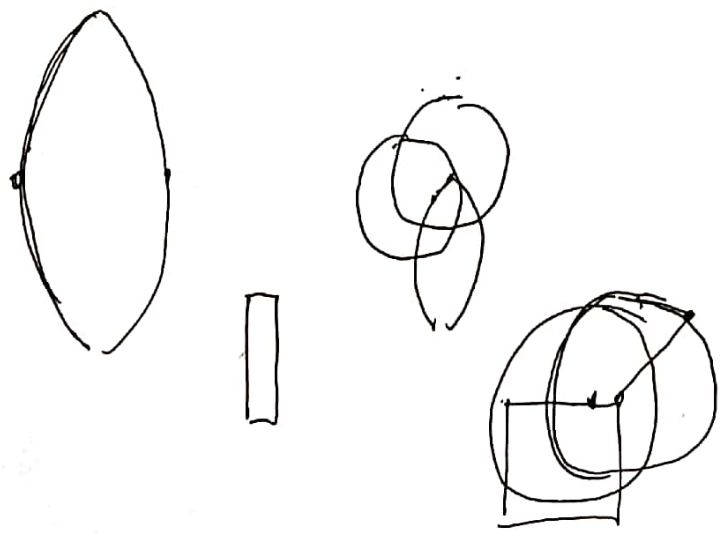
$a^2+8a+b^2+6b \le 0$

$(a^2+4)^2-16+(b^{\cancel{2}}+3)^{2}-9$

$(a^{\cancel{2}}+4)^2+(b+3)^2 \le 25$







Черновик

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103740**

ID профиля: **349014**

Вариант 19

№4. Чистовик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=\cancel{7}\cdot 3 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

$a=3^k\cdot 7^m$ где $k, d, t \in \mathbb{Z}$

$b=3^d\cdot 7^q$ одно из них 1, одно из них

$c=3^t\cdot 7^\alpha$ 17, а другое лежит между ними.

где m, q, α ~~каждое из них~~ $\in \mathbb{Z}$, одно из них 1, одно 15, а другое лежит между ними.

~~пусть $k=1, t=17$~~

~~тогда есть 15 вариантов для d;~~ ~~(варианты $d=1$ и $d=17$~~

пусть $k=17$; $t=1$

17 вар. для d.

~~на~~ итого 6 случаев в сумме

итого $17\cdot 6=102$ варианта

аналогично для m, q, α

получаем

$15\cdot 6=90$ вариантов

итого поэтому только

пусть $k = 1$; $t = 17$ Чистовик

есть 15 вариантов для d ($d = 1$ и $d = 17$ учту потом)

$k = 17$; $t = 1$

+ 15 вариантов

и так 6 случаев

$15 \cdot 6 = 90$

теперь варианты, когда 2 числа $= 17$, одно 1

и 2 числа $= 1$, одно 17. Это дает + 6 вариантов

аналогично для m, q, α

$13 \cdot 6 + 6 = 84$

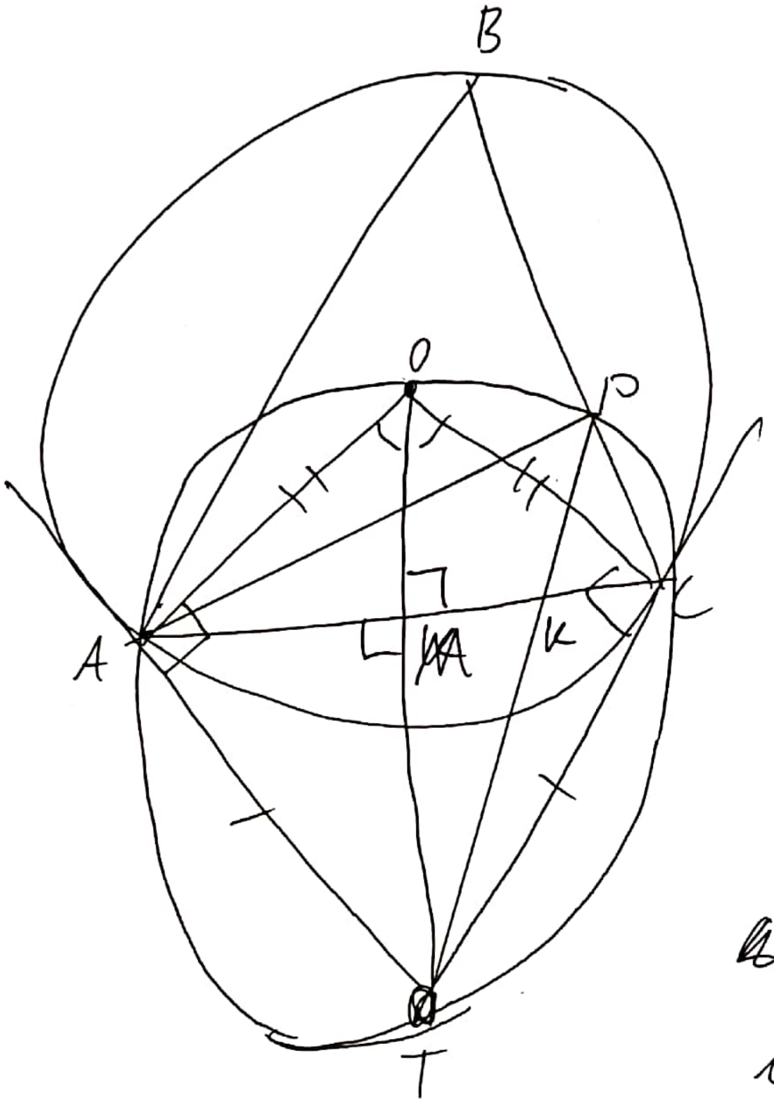
итого для числа a, b, c $84 \cdot 96$ вариантов

Ответ: $84 \cdot 96$ вариантов троек.

②

№ 6

Черновик



т.к $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ поэтому T должна лечь на окружность вокруг $\triangle AOC$ причем OT будет диаметром

$\triangle AOT = \triangle COT$ по $AO = OC$ ~~и~~ $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ ~~и~~. OT общей $\Rightarrow AT = TC$

~~и~~ из равенства этих $\triangle$ следует что $\angle AOT = \angle TOC$

M ~~M~~ точка пересечения OT и AC

OM - биссектриса в равнобедр $\triangle \Rightarrow AM = MC$ и $\angle AMT = 90°$

т.к $S_{AKP} = 10$; $S_{PKC} = 6$ и PH - общая высота $\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$KC = 2x$; $MK = 6x$; $AM = 8x$

произвед хорд равны

$OM \cdot MT = AM \cdot MC = 64x^2$

3

Чистовик

№5

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

ОДЗ

1) $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2>0$

2) $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2\neq 1$

3) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$

4) $\sqrt{x-\frac{11}{4}}\neq 1$

5) $x-\frac{11}{4}>0$

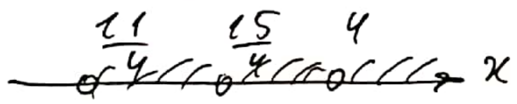
6) $x>2$

7) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$

8) $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1$

9) $\left(x-\frac{11}{4}\right)^2>0$

из всех этих ОДЗ следует



$x>\frac{11}{4}$; $x\neq\frac{15}{4}$ и $x\neq 4$

преобразую

1) $\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

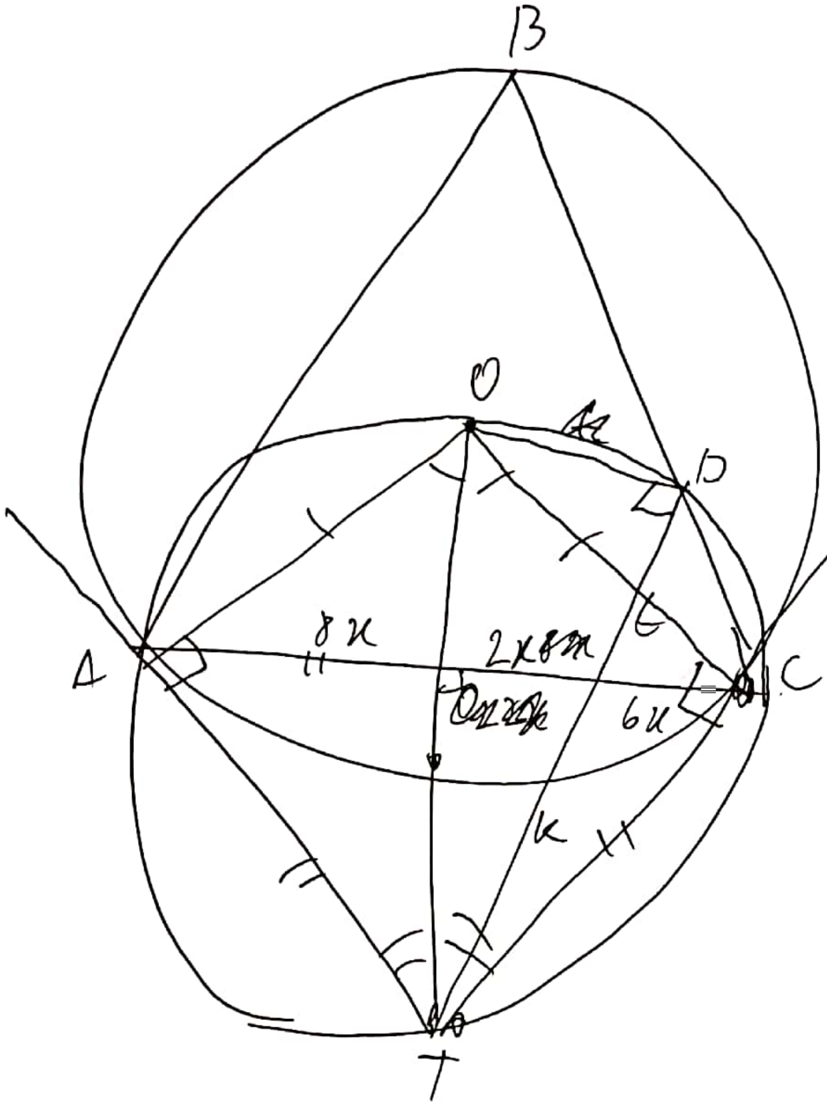
2) $2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

3) $2\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

модули не ставлю т.к они раскрываются единственным образом на ОДЗ

4

Черновик

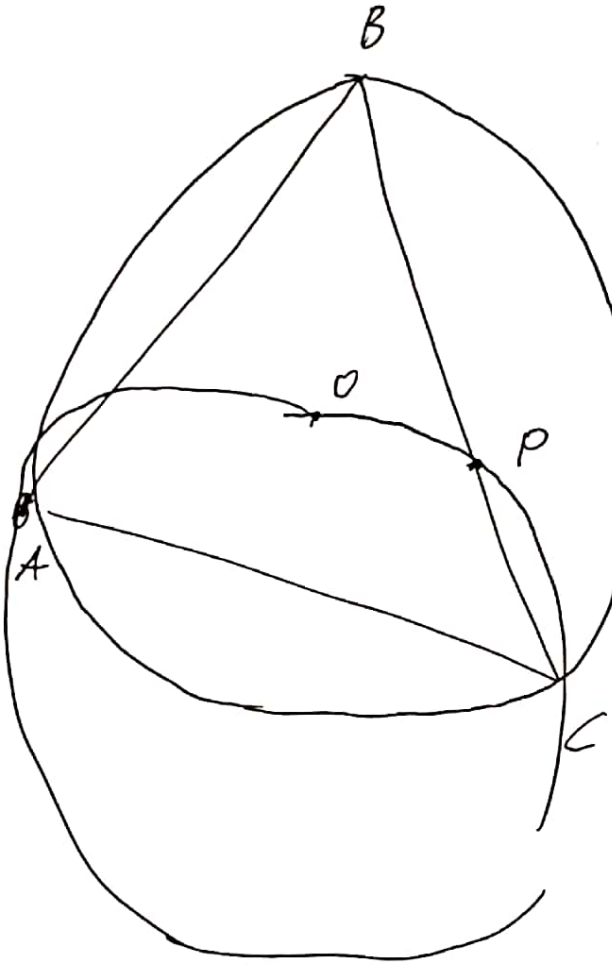


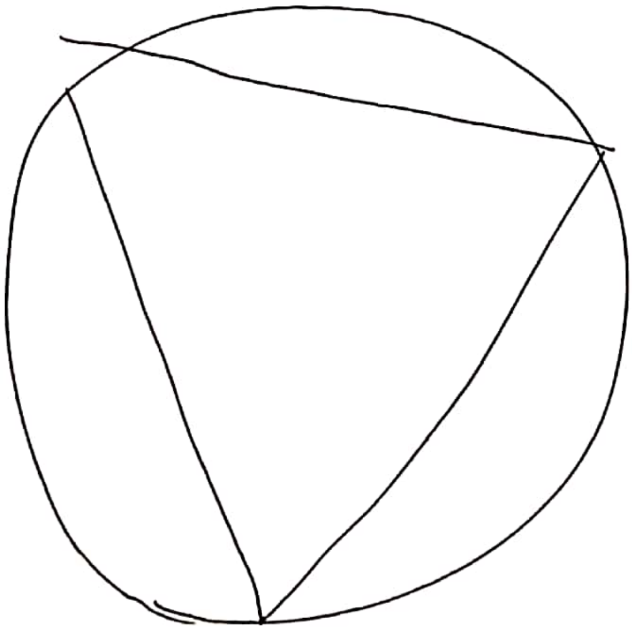
$kt = 60x^2$

$\frac{2x}{OD} = \frac{k}{t}$

$OD = \frac{2xt}{k}$

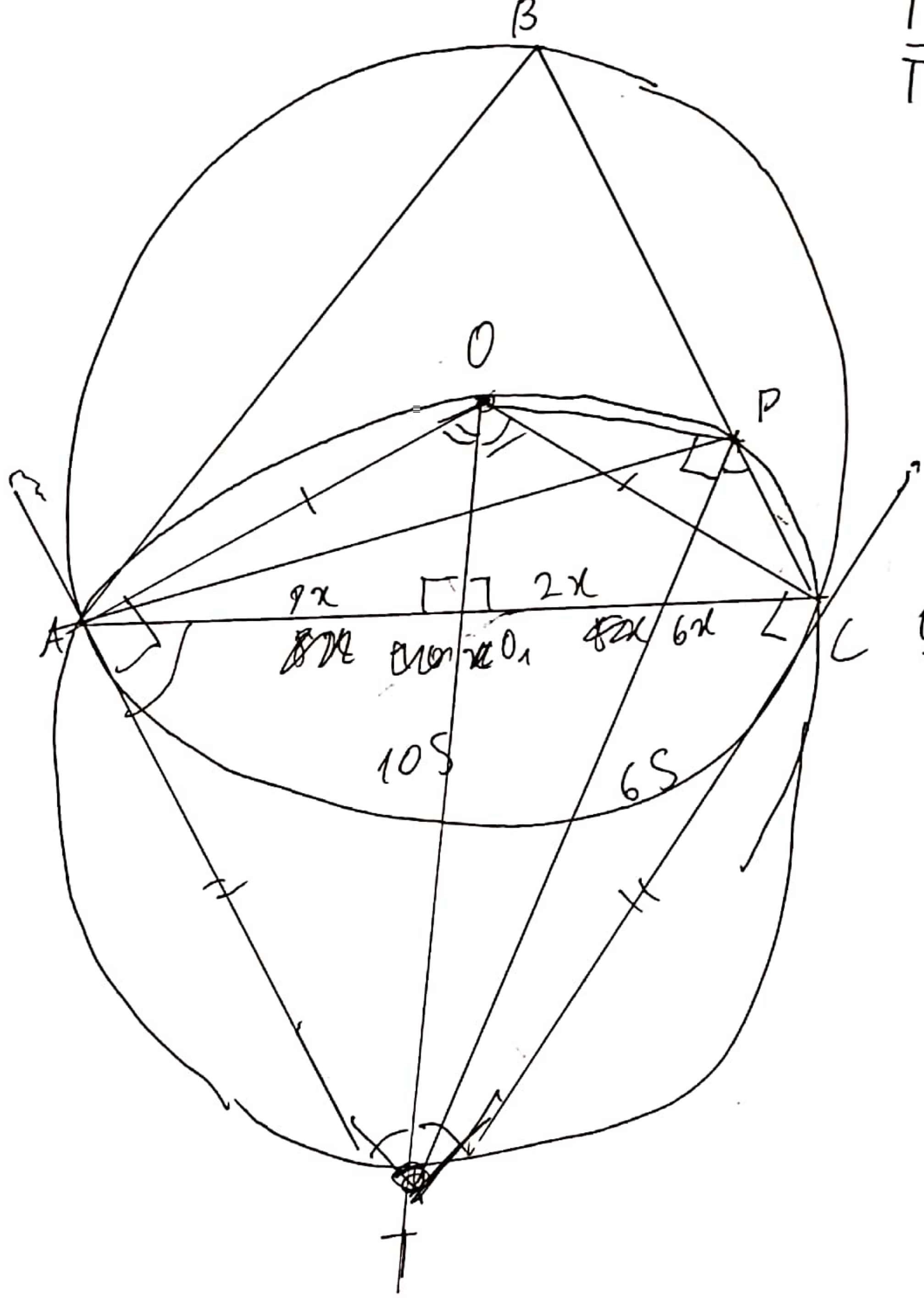
Черновик





Черновик

$$\frac{TC}{TO_1} = \frac{TO}{TC}$$



$$\frac{16x}{\sin 2\alpha} = \frac{t}{\sin \alpha}$$

№4 Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21=7\cdot 3 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

$a=3^k\cdot 7^m$ где k, d, t каждое из них $\in [1;15]$ (целые)

$b=3^d\cdot 7^q$ как мин одно из них $=1$, т.к в НОДе

$c=3^t\cdot 7^x$ одна тройка

где m, q, x каждое из них $\in [1;13]$ (целые) как мин. одно из них $=1$ т.к в НОДе 1 тройка

$k+d+t=17$

пусть $k=1$

$d+t=16$

есть 15 вариантов выбрать d и t

так при каждом d задается t.

т.е всего вариантов $15\cdot 3=45$.

умножаю на три т.к зa 1 можно взять

$17\cdot 6=$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

48

84

№4 Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

!!

$a=3^k\cdot 7^m$

$b=3^d\cdot 7^q$

$c=3^t\cdot 7^\alpha$

~~, где k, m, d, q, t, α ∈ [1;~~

где k, d, t каждое из них ∈ [1; 15]

где m, q, α каждое из них ∈ [1; 13]

$k+d+t=17$, т.к НОК

два заданных параметра задают автоматически третий

пусть $k=1$, тогда есть 15 способов выбрать d, а параметр t задается сам автоматически.

пусть $k=2$, тогда 14 способов выбрать d. t задается сам.

По итогу кол-во способов задать k, d, t это $1+2+3\ldots+14+15=\frac{1+15}{2}\cdot 15=$

Черновик

$a \ \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$b \ 2\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$c \ 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

$\frac{x^2}{4}-x+1$

$x^2-5{,}5x+\left(\frac{11}{4}\right)^2$

$3a-b=\frac{3x}{2}-3-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4}$

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ NOK(a\,b\,c)=3^{14}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

$a=3^{k}\cdot 7^{m}$

$b=3^{d}\cdot 7^{q}$

$c=3^{t}\cdot 7^{\alpha}$

$k+d+t=17.$

$k=1$

$d=15$

$k=2$

$d=14$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

ОДЗ   Черновик

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2>0 \\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^2\neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ \cancel{\sqrt{x-\frac{11}{4}}\neq 0} \\ \sqrt{x-\frac{11}{4}}\neq 1 \\ x-\frac{11}{4}\geq 0 \\ \frac{x}{2}-1>0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1 \\ \left(x-\frac{11}{4}\right)^2>0 \end{cases}$$

1) ~~x~~ $\frac{x}{2}-1\neq 0$

$x\neq 2$

2) $\frac{x}{2}-1\neq 1;-1$

$x\neq 4 \quad x\neq 0$

3) ~~$\frac{x}{2}>\frac{1}{4} \Rightarrow x>0,5$~~

4) $x-\frac{11}{4}\neq 1$

$x\neq\frac{15}{4}$

5) $x>\frac{11}{4}$

6) ~~$x>0,5$~~ ~~6) $x>2$~~

7) ~~$x>0,5$~~

~~8) $\frac{x}{2}\neq\frac{5}{4}$~~

~~$x\neq 2,5$~~

9) ~~$x\neq\frac{11}{4}$~~

$x>\frac{11}{4}$

$x\neq\frac{15}{4} \quad x\neq 4$