Часть 1

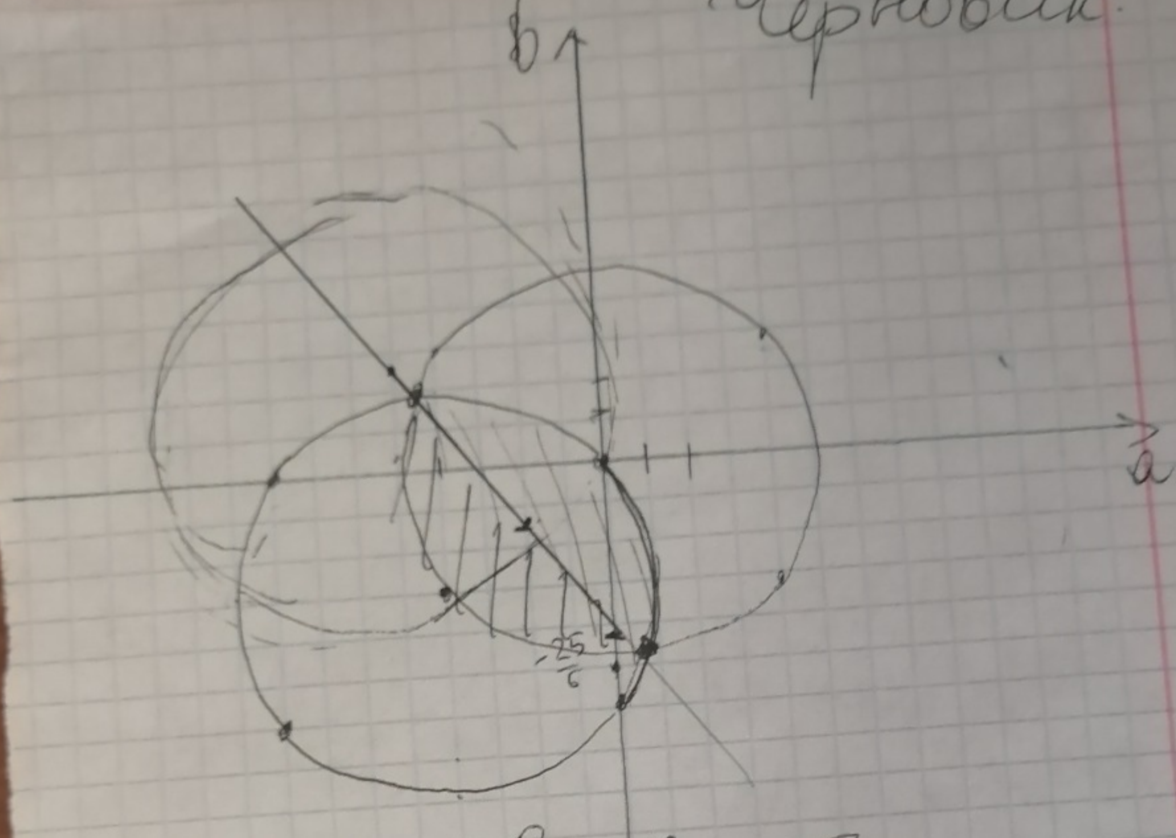
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103710**

ID профиля: **131534**

Вариант 19

Черновик



-80

$$b = \frac{-8a-25}{6}$$

$$(a+4)^2+\left(\frac{-8a-25}{6}+3\right)^2=25$$

$$a^2+8a+16+\frac{(8a+7)^2}{36}$$

Черновик

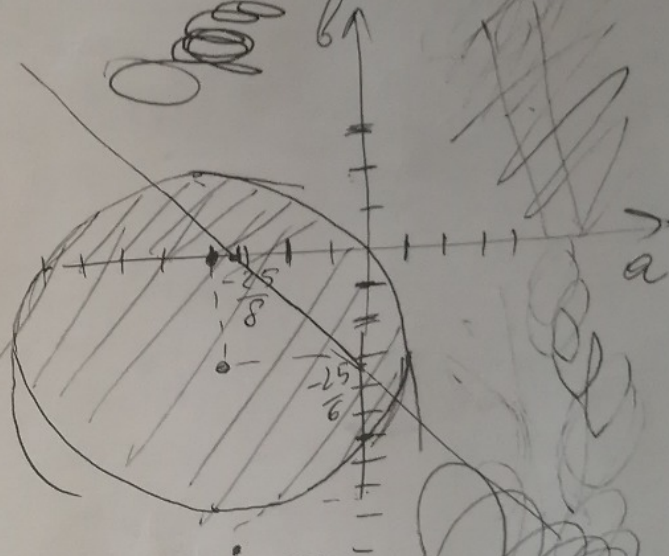
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$

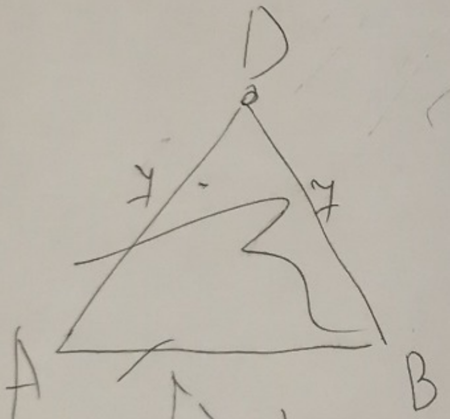
$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$

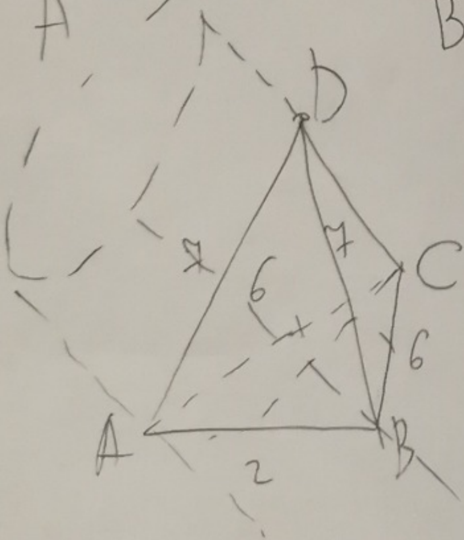
при $-8a-6b \le 25 \iff b \ge \frac{-8a-25}{6} = -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

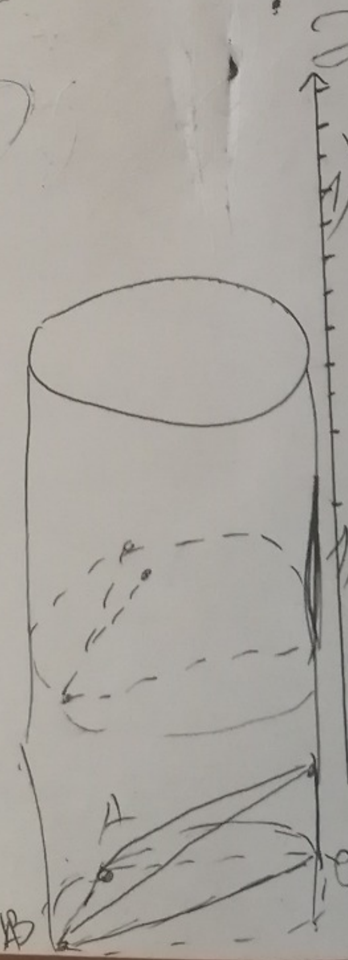
$a^2+8a+b^2+6b \le 0$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$









1) $CD = \sqrt{7^2-6^2} = \sqrt{13}$

$CD = \sqrt{7^2+6^2} = \sqrt{85}$

1) $CD = \cancel{\sqrt{34}}$

$CD = \sqrt{34+}$

$CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{47} + \sqrt{34}$.

Черновик

$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7 \cdot (2a_1 + 13b) = 14a_1 + 91b$

$a_9 \cdot a_{17} = (a_1 + 8b) \cdot (a_1 + 16b) = a_1^2 + 24a_1b + 128b^2 > 14a_1 + 91b =$ $+12$

$\cancel{a_1^2 + 24a_1b -}$

$\Leftrightarrow \cancel{a_1^2 + 10a_1b + 128b^2 > 91b} + 12$

$a_{12} \cdot a_{15} = (a_1 + 10b)(a_1 + 14b) = a_1^2 + 24a_1b + 140b^2 > S+47$

$a_1^2 + 24a_1b + 128b^2 > 14a_1 + 91b + 12$

$a_1^2 + 24a_1b + 140b^2 < \cancel{S+47}\ 14a_1 + 91b \cancel{+47}$

$> 14a_1 + 91b \geq a_1^2 + 24a_1b + 140b^2 - 47$

$a_1^2 + 24a_1b + 128b^2 - 12$

$35 > 12b^2,\ b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = 1, \cancel{0},$

$\cancel{a_1^2}\ 14a_1 + 91 > a_1^2 + 24a_1 + 93$

$14a_1 + 91 < a_1^2 + 24a_1 + 128 - 12$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -5$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 100 - 8 = 92 = 4 \cdot 23$

$a_1 = \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} = -5 \pm \sqrt{23} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \in (-5 - \sqrt{23}; -5 + \sqrt{23})$

$a_1 = -9; -8; -7; -6$

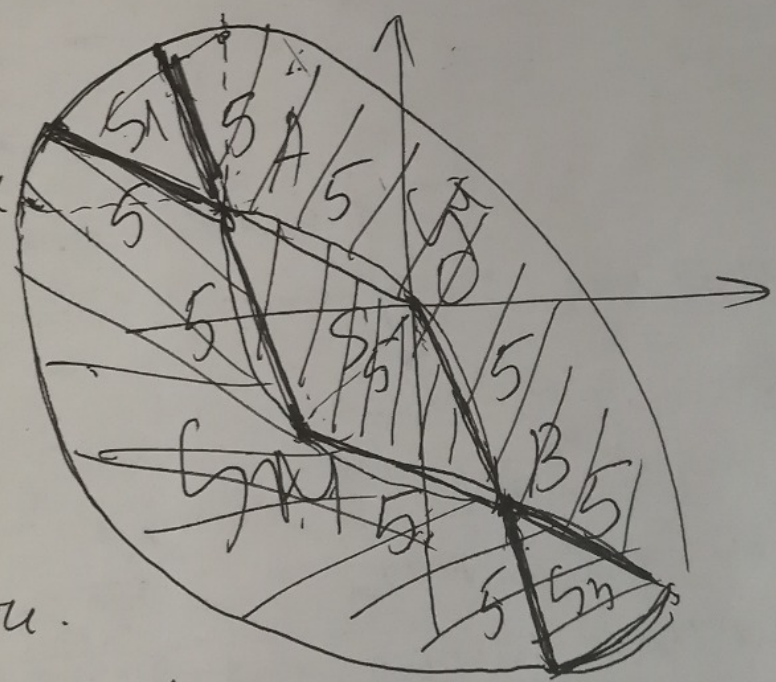
$\Rightarrow$ Ответ: $-4; -3; -2; -1$

$a_1 \neq 3$

21103710 (U131534 M1297071)

Беловик стр. 6.

~~В перв.~~ в (1) график данного уравнения — это окр-сть с центром в т. (а; в) и радиусом 5, ~~т.е.~~ . А т.к. у нас есть ограничение на а и в, то центр может лежать в закрашенной нами фигуре. И края фигуры М определяются окр-стями центра которых ~~крайними точками~~ крайние точки закраш. фигуры. Построим примерный рисунок:



В силу симметрии

$S_1 = S_3$; $S_2 = S_4$

$S_{\Sigma} = 2S_1 + 2S_2 + S_5 =$

$= 2(S_1 + S_2) + S_5$

S_1 — сектор. окр-сти с ценром в точке А и радиусом 5.

S_2 — разность площадей секторов с центром в т. О и радиусами 5 и 10.

S_5 — площадь нами закраш. фигуры на первом графике.

21103710 (U131534 M1297071)

Беловик, стр. 5

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,\ 25) & (2)\end{cases}$$

Сначала поработаем с (2):

1) при $-8a-6b\le 25 \Leftrightarrow b\ge \frac{-8a-25}{6}$

$a^2+b^2\le -8a-6b \Leftrightarrow (a+4)^2+(b+3)^2\le 25$

2) при $-8a-6b\ge 25 \Leftrightarrow b\le \frac{-8a-25}{6}$

$a^2+b^2\le 25.$

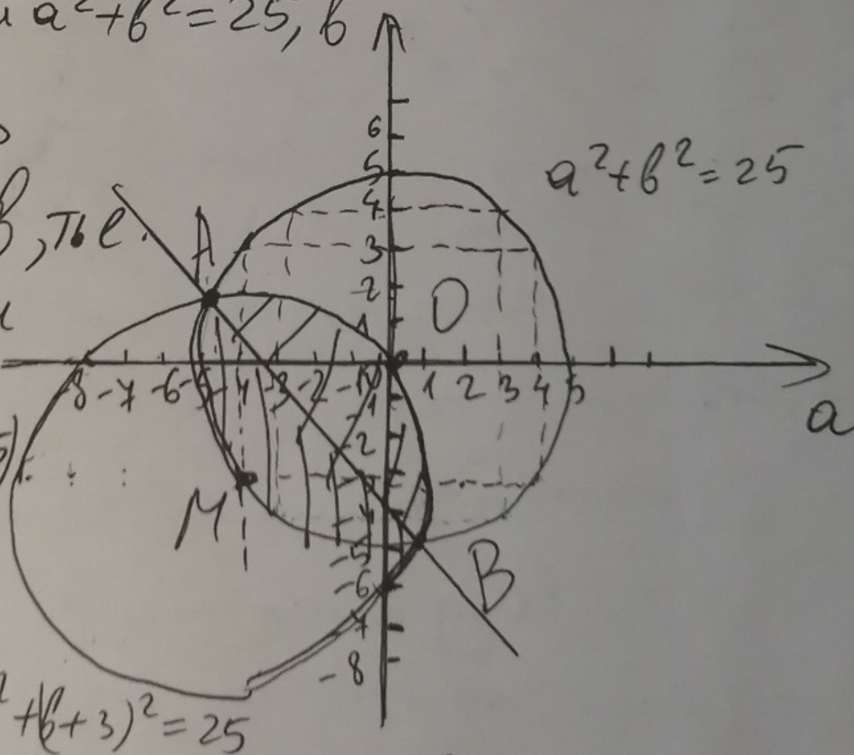
Построим графики этих уравнений:

Заметим, что при $a^2+b^2=25$, в

$8a+6b+50=25 \Leftrightarrow$

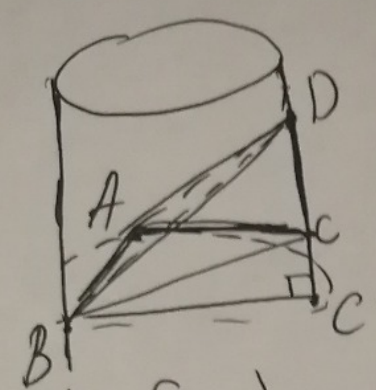
$\Leftrightarrow 25=-8a-6b$, т.е.

наши две окр-сти и линию условия ($-\cancel{8a}\ b\ge(\le)\frac{-8a-25}{6}$) пересекаются в одних точках

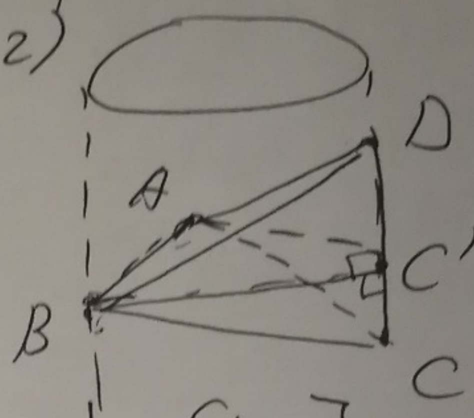


Теперь закрасим, как требовалось. Подходящая нам фигура — AOBM, где O(0; 0), M(-4; -3).

Всего может быть два варианта проекции:

1) 

$C' \in [DC)$

2) 

$C' \in [DC]$

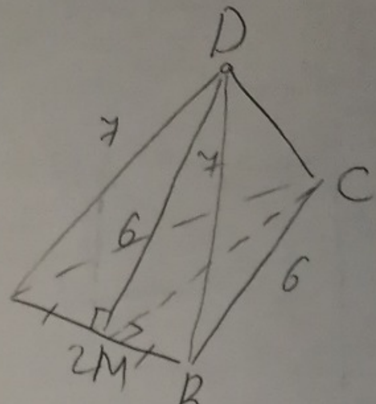
Случай, когда $C' \in [CD)$ невозможен, т.к. выйдет, что $BD < BC$, но по усл. это не так.

Заметим, что $DC \perp$ осн $\Rightarrow DC \perp (ABC') \Rightarrow$
$(ABC') \parallel$ осн $\Rightarrow \angle CC'B$ и $\triangle DC'B$ – п/у

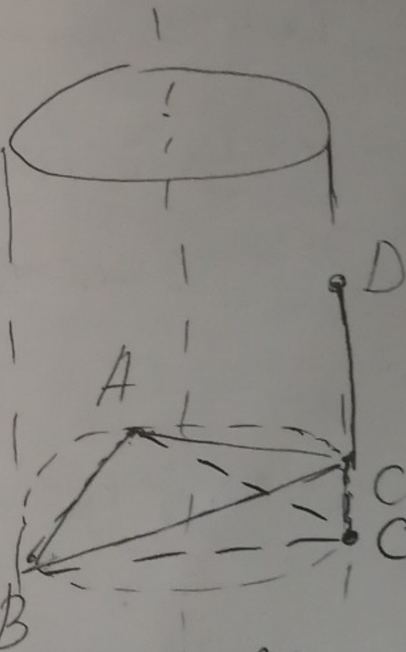
в 1): $CD = DC' - CC' = \sqrt{BD^2 - BC'^2} - \sqrt{BC^2 - BC'^2} =$
$= \sqrt{47} - \sqrt{34}$

в (2): $CD = DC' + CC' = \sqrt{47} + \sqrt{34}$.

Ответ: 1) $CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$
2) $CD = \sqrt{47} + \sqrt{34}$.



№21) Можно заметить, что ΔADB и ΔACB – р/б с осн. AB =>
=> Высоты на основание Δ падают в одно и то же место – сер. AB. Пусть это т. M.
Тогда видно, что $(CMD) \perp AB$ => высота из т. D ~~б~~будет так же лежать в (CMD).



г) Ан-но ~~видн~~ очевидно, что AB пар-но основанию цилиндра, иначе бы не было р/б ΔABD и ΔABC.
~~Также~~ Из этого следует, что если построить сечение через AB (как на рис.), то получим п-ть, пар-ную основанию. Спроецируем ΔABC на эту п-ть: т.к. $CD \parallel$ оси => $CD \perp$ основанию =>
=> C проекц. в C', $C' \in (CD)$
Получился равнобедренный $\Delta AC'B$

$$R_{окр-сти} = \frac{AB}{2\sin\angle AC'B}$$

$$R_{min} = \frac{AB}{2\cdot\sin 90^\circ} \Rightarrow \sin\angle AC'B = 90^\circ \Rightarrow AC' = BC' = \sqrt{2}.$$

$$a_1 = \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$$

$\Rightarrow a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23})$

$a_1 \in Z$

$a_1 \neq -5$

$\Rightarrow$

Ответ:

$\Rightarrow a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$ (т.к. $\sqrt{23} \in (4;5)$)

Беловик

№1. $S = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7 \cdot (2a_1 + 13b) = 14a_1 + 91b$, где b - шаг прогрессии.

$a_9 \cdot a_{17} = (a_1 + 8b) \cdot (a_1 + 16b) = a_1^2 + 24a_1 b + 128b^2 >$

$> S + 12 = 14a_1 + 91b + 12$ (1)

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10b) \cdot (a_1 + 14b) = a_1^2 + 24a_1 b + 140b^2 <$

$< 14a_1 + 91b + 47$ (2) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 24a_1 b + 140b^2 - 47 < 14a_1 + 91b < a_1^2 + 24a_1 b +$

$+ 128b^2 - 12 \Leftrightarrow a_1^2 + 24a_1 b + 140b^2 - 47 < a_1^2 + 24a_1 b +$

$+ 128b^2 - 12 \Leftrightarrow 12b^2 < 35 \Leftrightarrow b < \sqrt{\frac{35}{12}} < 2$

$\left.\begin{matrix} a_1 \in Z \\ a_2 \in Z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_2 - a_1 = b \in Z \\ b > 0 \\ b < 2 \end{matrix}\right| \Rightarrow b = 1.$

Подставим в (1): $a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Leftrightarrow (a_1 + 5)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -5.$

в (2): $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 100 - 8 = 92 = 4 \cdot 23$

Часть 2

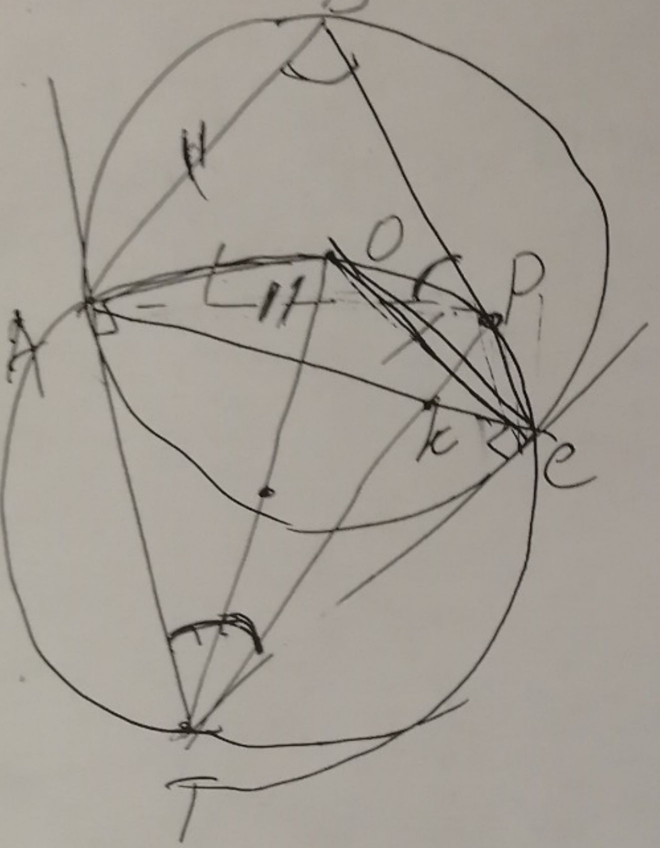
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

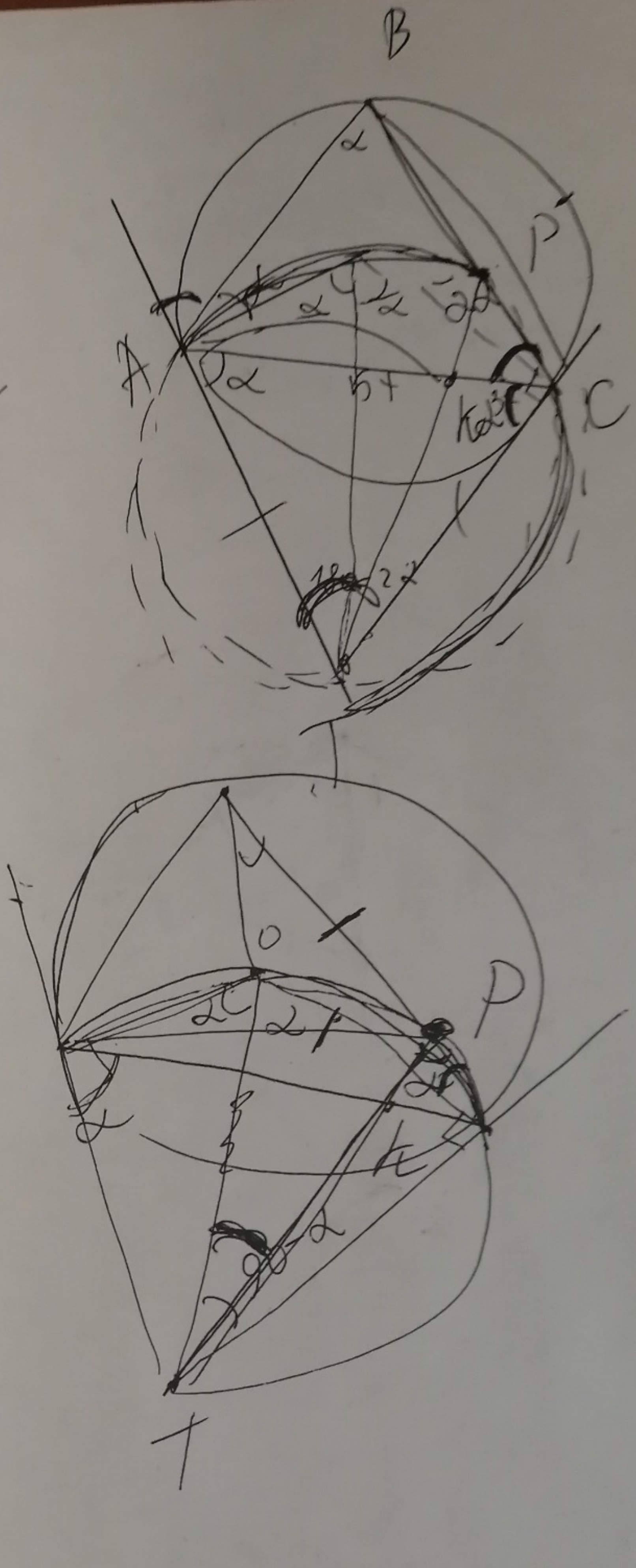
Шифр: **21103710**

ID профиля: **131534**

Вариант 19

Черновик:

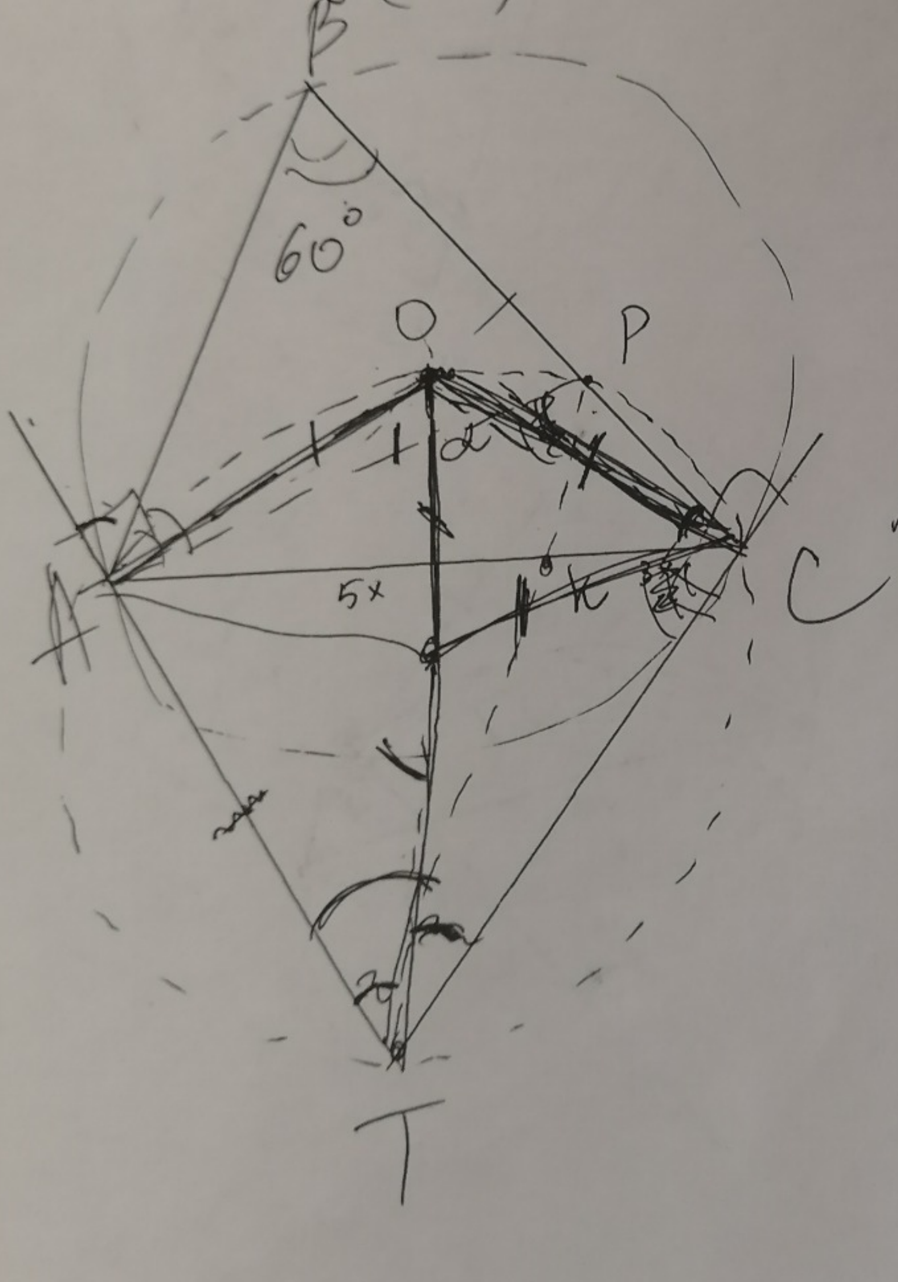


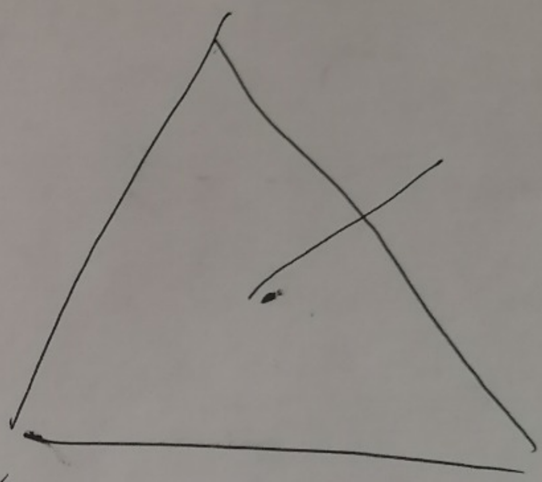


Черновик

$$\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

$$4\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)=$$





$\max(x_1; x_2; x_3) = 16$ $\Rightarrow$ Пусть $x_1 = 0$;

$\max(y_1; y_2; y_3) = 14$.

Возможно след. варианты:

$a = 21 \cdot 7^0, 7^1, 7^2 \ldots 7^{14}$

~~при 7^{x_1} $x_1 \neq 0$; $x_1 \in 1;13$~~

I. при $y_1 = 0$: $a = 21$

1) $b = 21 \cdot 3^{16} \cdot 7^{y_2}$ $(y_2 \in 0; 14)$ =

$c = 21 \cdot 3^{x_3} \cdot 7^{14}$ $x_2 \in (0; 16)$ =

= $15 \cdot 17$ вар-тов

2) $b = 21 \cdot 3^{16} \cdot 7^{14}$ — $15 \cdot 17$ вар тов

$c = 21 \cdot 3^{x_3} \cdot 7^{y_3}$

1) 0 ; 2) 14

0 14 0

16 y_2 y_3

y_3 — 16 вар-тов

~~II. при $y_2 = 14$~~;

$a = 21 \cdot 7^{y_1}$

$b = 21 \cdot 3^{x_2} \cdot 7^{y_2}$

$c = 21 \cdot 3^{x_3} \cdot 7^{y_3}$

		0	14	0	0
0	y_1	14	0	16	14
16	y_2	y_3	y_3	y_3	y_3 — 13 вар-тов
x_3	y_3				

~~15~~ 6 вар-тов $78 = 6 \cdot 13 + 6 =$

$= 84$

$96 \cdot 84 = 8400 - 336 = 8064$.

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times 84 \\ \hline 384 \\ 768 \end{array}$$

21103710 (U131534 M1297072)

Черновик Пусть $a \le b \le c$

$НОД(a;b;c) = 21$

$НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$x > \frac{11}{4}$; $x \ne \frac{15}{4}$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \cancel{2}\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\log_{\frac{x}{2}-1} \frac{x}{2}-\frac{1}{4} = 4\frac{1}{\log_{\frac{x}{2}-1}\left(x-\frac{11}{4}\right)}$

$\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}\right.$

$\cancel{a = 21 \cdot k}$ $НОК(a;b;c) =$

$b \cancel{= 21 \cdot l}$

$c = 21 \cdot m$

$a = 21 \cdot 3^{x_1} \cdot 7^{y_1}$ $НОК = 3^{17} \cdot 7^{15} = 3 \cdot 7 \cdot 3^{\max(x_1;x_2;x_3)}$

$b = 21 \cdot 3^{x_2} \cdot 7^{y_2}$ $\cdot 7^{\max(x_1;x_2;x_3)}$

$c = 21 \cdot 3^{x_3} \cdot 7^{y_3}$. Одновременно $x_1, x_2, x_3 > 0$ не может быть, ан-но y_1, y_2 и y_3

$\Rightarrow x_1, x_2$ или x_3

y_1, y_2 или $y_3 = 0$.

21103710 (U131534 M1297072)

Беловик

№2. $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$;

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

ОДЗ: $x > \frac{11}{4}$; $x \neq \frac{15}{4}$; 4;

$\angle ABC = arctg 2 \Rightarrow$

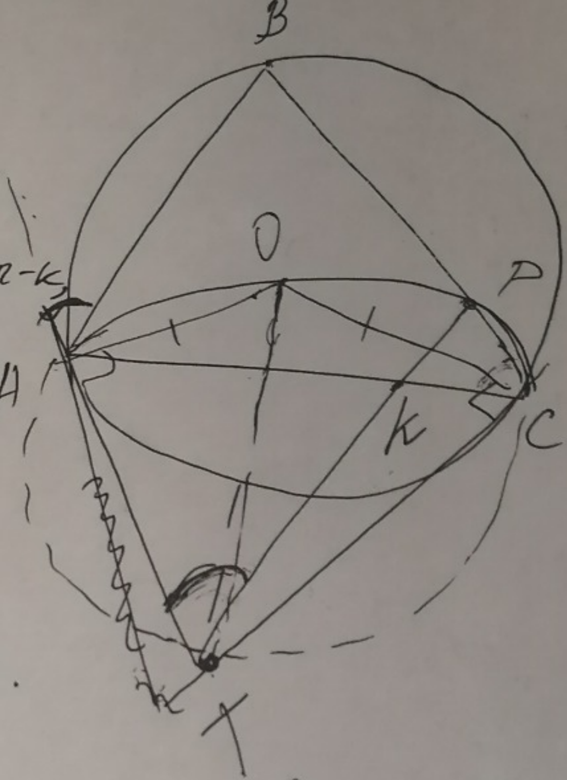
$\Rightarrow tg \angle ABC = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \sin \angle ABC = \cos \angle ABC$

$\frac{5}{4} \sin^2 \angle ABC = 1 \Rightarrow \sin \angle ABC = \frac{2}{\sqrt{5}} \angle ABC$

~~AC~~ =

Ответ: $S_{ABC} = \frac{128}{3}$.

Беловик стр. 3



№3. Рассм-им AOCT:

$\angle OCT = \angle OAT = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ AOCT - вписанный четыр-к,

$P \in \omega_1$, ~~и A, O, C~~,

где ΔAOC вписан в ω_1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow T \in \omega_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ AOPCT - впис. в ω_1.

$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{3}$ (т.к. одна высота)

$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{PC}{BC}$ (одна высота)

$\angle PCK = \angle(TA; AB)$ (т.к. TA - кас-нал)

$\angle PCK = \angle ATP$ (опираются на одну дугу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle(TA; AB) = \angle ATP \Rightarrow AB \parallel TP \Rightarrow$

$\Rightarrow PK \parallel AB \Rightarrow$ ~~$\frac{PC}{BC}$~~ $\Delta PCK \sim \Delta BCA \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{CK}{AC} =$

$= \frac{3}{8} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{8}{3} \cdot (10+6) = \frac{128}{3}$.

21103710 (U131534 M1297072)

Беловик стр. 2.

слева возможно 6·15 ~~групп~~ троек, когда $x_3 \neq 1; 17$

(т.е. $x_3 \in [2;16]$)

+ 6 троек, когда $x_3 = 1; 17$ (1;17;17) (1;1;17) и т.д.

т.е. всего 96 троек степеней слева

Ан-но считается кол-во троек степеней справа:

$6 \cdot 13 + 6 = 84$.

Итого возможно $96 \cdot 84 = 8064$ тройки.

Ответ: 8064.

Беловик стр. 1

№1. $\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases} \Rightarrow a=3^{x_1}\cdot 7^{y_1}$; где x_1, x_2, x_3,

$b=3^{x_2}\cdot 7^{y_2}$; $y_1, y_2, y_3 \in Z$.

$c=3^{x_3}\cdot 7^{y_3}$;

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 1$. Но одновременно x_1, x_2 и y_3 быть больше одного не могут, т.к. $НОД(a;b;c)=21$, а был бы иначе $21\cdot 3^n$, где $n \in Z$. $\Rightarrow$ хотя бы одно из них $=1$, ~~а д~~

Ан-но док-ся для y_1, y_2 и y_3, что один из них равен 1.

К тому же $НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15}$

$a=3^{x_1}\cdot 7^{y_1}$

$b=3^{x_2}\cdot 7^{y_2}$

$c=3^{x_3}\cdot 7^{y_3}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1, x_2 \text{ или } x_3 = 17 \\ y_1, y_2 \text{ или } y_3 = 15 \end{cases}$

В итоге среди x_1, x_2 и x_3 обяз-но есть 1 и 17; среди y_1; y_2 и y_3 — 1 и 15.

Тогда возможно такое распределение степеней

1	1
17	15
$x_3(x_1;x_2)$	$y_3(y_1;y_2)$.
(для 3)	(для 7)