Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103705**

ID профиля: **287964**

Вариант 19

№1.

~~Пон~~ Пусть $a_1 = a$, а ~~разд~~ разность прогрессии – d. По условию $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{14} = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots$
$+ (a+13d) = 14a + (1+2+\ldots+13)d = 14a + 91d.$

Чистовик №1.

$$\begin{cases} 14a + 91d = S \\ (a+8d)(a+16d) > S + 12 \\ (a+10d)(a+14d) < S + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 24ad + 128d^2 > 14a + 91d + 12 \quad \cdot(-1) \\ a^2 + 24ad + 140d^2 < 14a + 91d + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a^2 - 24ad - 128d^2 < -14a - 91d - 12 \\ +\; a^2 + 24ad + 140d^2 < 14a + 91d + 47 \end{cases}$$

$$12d^2 < 35$$

$d^2 < \frac{35}{12}$ Т.к. $a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{Z}$, а $d = a_2 - a_1$, то $d \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow d^2 \in \mathbb{Z}$.

Тогда $d^2 < \frac{35}{12}$ – то же самое, что $d^2 \leq \left\lfloor \frac{35}{12} \right\rfloor = 2$

$$d^2 \leq 2$$

$-\sqrt{2} \leq d \leq \sqrt{2}$ Аналогично, $\lceil -\sqrt{2} \rceil \leq d \leq \lfloor \sqrt{2} \rfloor$

$-1 \leq d \leq 1$

Но прогрессия – возрастающая, $\Rightarrow d > 0$, поэтому $d = 1$.

~~1) $d = -1$~~

$$\cancel{\begin{cases} a^2 - 24a + 128 > 14a - 91 + 12 \\ a^2 - 24a + 140 < 14a - 91 + 47 \end{cases}}$$

~~$d = 1$~~

$$\begin{cases} a^2 + 24a + 128 > 14a + 91 + 12 \\ a^2 + 24a + 140 < 14a + 91 + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 10a + 25 > 0 \\ a^2 + 10a + 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+5)^2 > 0 \\ (a - (-5-\sqrt{23}))(a - (-5+\sqrt{23})) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \neq -5 \\ a \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23}) \end{cases}$$

$$-5-\sqrt{23} < a < -5+\sqrt{23}$$

$$\lceil -5-\sqrt{23} \rceil \leq a \leq \lfloor -5+\sqrt{23} \rfloor$$

$$\begin{cases} -9 \leq a \leq -1 \\ a \neq -5 \end{cases}$$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.$

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25 \\ a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b, 25)\end{cases}$$

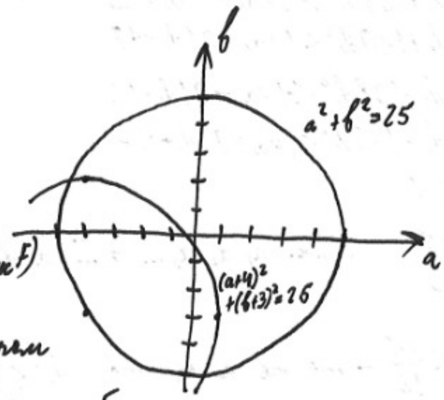
~~Черновик~~ Чистовик 2.

Неравенство $a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b, 25)$ эквивалентно системе

$$\begin{cases}a^2+b^2 \leq -8a-6b \\ a^2+b^2 \leq 25\end{cases}$$

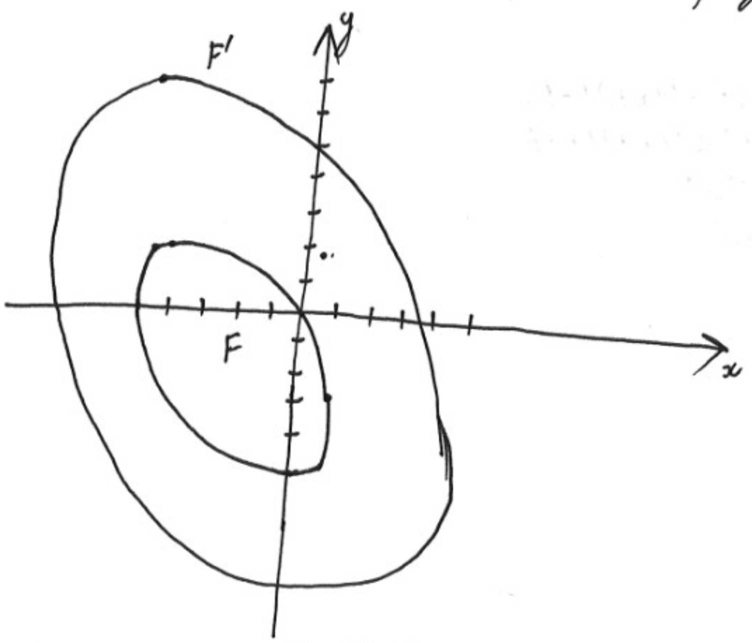
$$\begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25 \\ a^2+b^2 \leq 25\end{cases}$$

~~Это~~ Построим координатную плоскость для a и b.



~~И~~ Решение системы с a и b — пересечение двух кругов с центрами $(-4; -3)$ и $(0; 0)$ и радиусом 5 (обозначим эту фигуру как F)

Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25$ также задаёт круг с центром в $(a; b)$. Если мы перенесём фигуру F в координаты $(x; y)$, то она будет состоять из центров подходящих ~~окружностей~~ кругов. Тогда искомая фигура — объединение всех этих кругов. ~~Поскольку м~~ Достаточно рассмотреть лишь те круги, чьи центры лежат на границе фигуры F, так как все остальные уже будут находиться внутри искомой фигуры. Искомая фигура — F'.



$S_{F'} \approx 3S_{\omega} = 75\pi$

$S_{\omega} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$

Ответ: $\approx 75\pi$.

21103705 (U287964 M1302712)

№1 $a_1+a_2+a_3...+a_{14}=S$

$a_9 a_{17} > S+12$ $a_1 - ?$

$a_{11} a_{15} < S+47$

Черновик 1.

$a_1=a$ $a_2=a+d$

$a+(a+d)+(a+2d)+...+(a+13d)=S$

$14a+d(1+2+...+13)=S$

$14a+d\frac{13\cdot14}{2}=S$

$$\begin{cases}14a+91d=S\\(a+8d)(a+16d)>S+12\\(a+10d)(a+14d)<S+47\end{cases}$$

$a^2+24ad+128d^2>14a+91d+12$

$a^2+24ad+140d^2<14a+91d+47$

$-a^2-24ad-128d^2<-14a-91d-12$

$12d^2<35$ Т.к. $a_1, a_2, ... \in \mathbb{Z}$, а $d=a_2-a_1$, то $d\in\mathbb{Z}$, $\Rightarrow d^2\in\mathbb{Z}$

$d^2\le 2$

$-1\le d\le 1$

1) $d=-1$

$\cancel{14a-91}$ $a^2-24a+128>14a-91+12$

$a^2-38a+219-12>0$

$a^2-38+207>0$

$D=38^2-828=616=4\cdot154=8\cdot7\cdot11$

$a_{1,2}=\frac{38\pm\sqrt{616}}{2}=19\pm\sqrt{154}$

$a\in(-\infty;\ 19-\sqrt{154})\cup(19+\sqrt{154};\ +\infty)$

$a\in(-\infty;\ 6]\cup[32;+\infty)$

$19-13<19-\sqrt{154}<19-12$

$a^2-24a+140<14a-91+47$

$a^2-38a+184<0$

$D=1444-4\cdot184=708=2\cdot354=4\cdot177$

$a_{1,2}=\frac{38\pm2\sqrt{177}}{2}=19\pm\sqrt{177}$

$a\in(19-\sqrt{177};\ 19+\sqrt{177})$

$a\in[6;\ 32]$ $a=6;\ 32$

$38\times38=304+114=1444$

$1444-828=616$

$207=69\cdot3$ $23\cdot9$

$1444-736=708$

$184=46\cdot4$

2) $d=0$

$S=14a$

$$\begin{cases}a^2>14a+12\\a^2<14a+47\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2-14a-12>0\\a^2-14a-47<0\end{cases}$$

$D=196+4\cdot12=196+48=244=4\cdot61$

$a_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{244}}{2}=7\pm\sqrt{61}$

$a\in(-\infty;\ 7-\sqrt{61})\cup(7+\sqrt{61};+\infty)$

$a\in(-\infty;\ -1]\cup[15;+\infty)$

$D=196+4\cdot47=188+196=384=4\cdot96$

$a_{1,2}=\frac{14\pm2\sqrt{96}}{2}=7\pm\sqrt{96}$

$a\in(7-\sqrt{96};\ 7+\sqrt{96})$

$a\in[-2;\ 16]$

$a=-2;-1;\ 15;16$

3) $d=1$

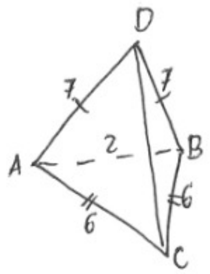
$$\begin{cases}a^2+10a+25>0\\a^2+10a+2<0\end{cases}$$ $(a+5)^2>0$ $a\ne-5$

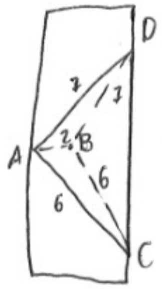
21103705 (U287964 M1302712)

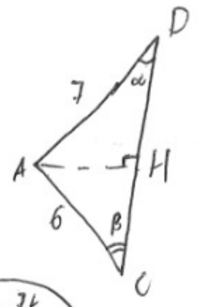
$D=100-4\cdot2=92=4\cdot23$ -5 $a\in(-5-\sqrt{23};\ -5+\sqrt{23})$

$a_{1,2}=\frac{-10\pm2\sqrt{23}}{2}=-5\pm\sqrt{23}$ $a\in[-9;\ -1]$

Черновик 7.







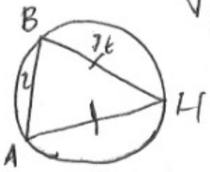
$\sin\alpha = \frac{AH}{7}$

$\sin\beta = \frac{AH}{6}$

$AH = 7\sin\alpha$

$AH = 6\sin\beta$

$\sin\beta = \frac{7\sin\alpha}{6}$



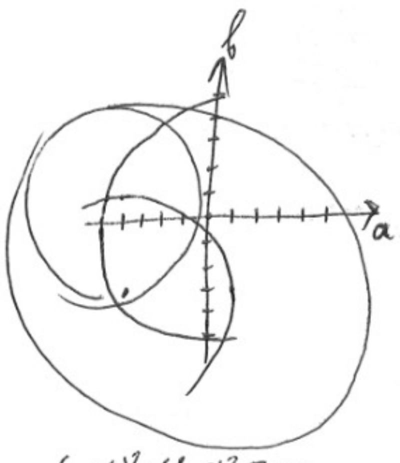
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25\\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b;\ 25)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le -8a-6b \quad -8a-6b \le 25\\ a^2+b^2 \le 25\end{cases}$$

$a^2+8a+b^2+6b \le 0$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9 \le 16+9$

$$\begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25\\ a^2+b^2 \le 25\end{cases}$$



$(a+4)^2+(b+3)^2 = 25$

$a^2+b^2=25$

$8a+6b=-25$

~~$a = \frac{-24-6b}{}$~~

$b = \frac{-8a-25}{6}$

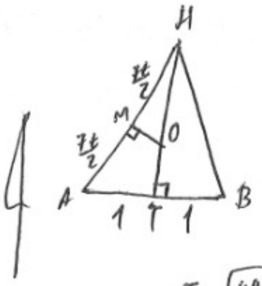
$a^2 + \frac{(-8a-25)^2}{36} = 25$

$a^2 + \frac{64a^2+400a+625}{36} = 25$

$36a^2+64a^2 \ldots$

$100a^2+400a+625=900$

$AH = 7t$



$DH = 7\cdot\cos\alpha$

$CH = 6\cdot\cos\beta$

$CD = 6\cos\beta + 7\cos\alpha$

cos

$\sin\alpha = t$

$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{7t}{6}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{49t^2}{36}} = \sqrt{\frac{36-49t^2}{36}} = \frac{\sqrt{36-49t^2}}{6}$

$CD = \sqrt{36-49t^2} + 7\sqrt{1-t^2}$

$HT = \sqrt{49t^2-1}$

$\frac{HO}{AH} = \frac{HM}{HT}$

$HO = \frac{HM\cdot AH}{HT} = \frac{\frac{7t}{2}\cdot 7t}{\sqrt{49t^2-1}} = \frac{49t^2}{2\sqrt{49t^2-1}}$

$f(t) = \frac{49t^2}{2\sqrt{49t^2-1}}$

$f'(t) = \frac{(49t^2)'(2\sqrt{49t^2-1}) - (2\sqrt{49t^2-1})'\,49t^2}{4(49t^2-1)} =$

$a_1 = \frac{-4-3\sqrt{3}}{2} \quad b_1 = \frac{4\cdot(4+3\sqrt{3})-25}{6} =$

$= \frac{98t\cdot 2\sqrt{49t^2-1} - \frac{98t}{\sqrt{49t^2-1}}\cdot 49t^2}{4(49t^2-1)}$

$= \frac{16+12\sqrt{3}-25}{6} = \frac{12\sqrt{3}-9}{6} =$

$= \frac{4\sqrt{3}-3}{2}$

$\left(2(49t^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)' = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(49t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot$

$(49t^2-1)' = \frac{1}{\sqrt{49t^2-1}}\cdot 98t$

$\frac{98t\cdot 2(49t^2-1) - 98t\cdot 49t^2}{4(49t^2-1)} = 0$

$\frac{98t(98t^2-1-49t^2)}{4(49t^2-1)} = \quad t=0$

$4a^2+16a+25=36$

$4a^2+16a-11=0$

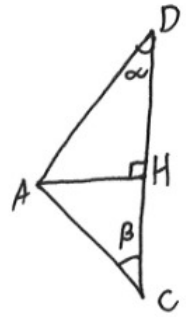
$D = 256+16\cdot 11 = 256+176 = 432 = 2\cdot 216 = 4\cdot 108 = 4\cdot 9\cdot 4\cdot 3 = 4\cdot 36\cdot 3 = (12\sqrt{3})^2$

$a_{1,2} = \frac{-16\pm 12\sqrt{3}}{8} = \frac{-4\pm 3\sqrt{3}}{2}$

№2. Чистовик 3.

Радиус цилиндра совпадает с радиусом окружности, описанной около треугольника ABH, где H — проекция точек C и D на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра и проходящую через AB.

Рассмотрим треугольник ACD.



$\sin\alpha = \frac{AH}{7}$ $\quad \sin\beta = \frac{AH}{6}$

$6\sin\beta = 7\sin\alpha$

$\sin\beta = \frac{7\sin\alpha}{6}$ $\quad \sin\alpha = t$

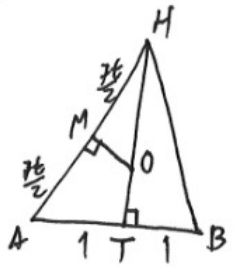
$\sin\beta = \frac{7t}{6}$

$DH = 7\cos\alpha$ $\quad CH = 6\cos\beta$ $\quad \cos\alpha = \sqrt{1-t^2}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{36-49t^2}}{6}$

$CD = \sqrt{36-49t^2} + 7\sqrt{1-t^2}$

Рассмотрим треугольник ABH. Пусть HT — высота. Т.к. ABH — равнобедренный, то она также является его серединным перпендикуляром. Пусть M — середина AH, а O — точка пересечения серединных перпендикуляров.

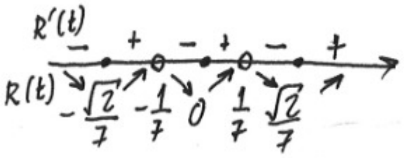


$\Delta HOM \sim \Delta AHT \Rightarrow \frac{HO}{AH} = \frac{HM}{HT}$

$HO = \frac{HM \cdot AH}{HT} = \frac{49t^2}{2\sqrt{49t^2-1}}$

$R = HO = \frac{49t^2}{2\sqrt{49t^2-1}}$

$R(t) = \frac{49t^2}{2\sqrt{49t^2-1}}$ $\quad R'(t) = \frac{98t(49t^2-2)}{4(49t^2-1)}$ Точки экстремума в $t=0$, $t=\frac{\sqrt2}{7}$ и $t=-\frac{\sqrt2}{7}$



Все три точки являются точками минимума.

Но $\sin\alpha \neq 0$, т.к. тогда ΔACD - вырожденный, и $\sin\alpha$ положителен, т.к. $0° < \alpha < 90°$. $\sin t = \frac{\sqrt2}{7}$.

Ответ: $CD = \sqrt{36-49\cdot\frac{2}{49}} + 7\sqrt{1-\frac{2}{49}} = \sqrt{34} + 7\sqrt{\frac{47}{49}}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103705**

ID профиля: **287964**

Вариант 19

№4. Чистовик 1.

~~Пусть~~ Т.к. НОД $(a; b; c) = 21 = 3\cdot 7$, то каждое из чисел a, b, c содержит в разложении на простые множители 3 и 7 в некоторой ~~степени~~, натуральной (целой положительной) степени.

Т.к. НОК $(a; b; c) = 3^{17}\cdot 7^{15}$, то каждое из чисел не содержит в разложении других простых множителей кроме 3 и 7 в некоторой степени.

Пусть $a = 3^k\cdot 7^l$, $b = 3^m\cdot 7^n$, $c = 3^p\cdot 7^q$. Каждое из чисел k, m, p не меньше 1 (см. выше) и не больше 17 (иначе НОК не делилось бы на это число). Аналогично, $1 \le l, n, q \le 15$. При этом хотя бы одно из чисел k, m, p равно 1 и хотя бы одно равно 17 (т.е. $\min(k,m,p)=1$, $\max(k,m,p)=17$), иначе в НОД не входило бы число 3, а в НОК -3^{17}. Аналогично $\min(l,n,q)=1$ и $\max(l,n,q)=15$.

Рассмотрим ~~варианты~~ случаи для k, m, p.

~~1) $k=1$ $1\le p\le 17$ $m=$~~ 1) $k=1$ $1\le m\le 17$ $p=17$ $1\cdot 1\cdot 17 = 17$ вариантов.

2) $k=1$ $m=17$ $1\le p\le 17$ 17 вариантов

3) $1\le k\le 17$ $m=1$ $p=17$ 17 вариантов

4) $1\le k\le 17$ $m=17$ $p=1$ 17 вариантов.

5) $k=17$ $m=1$ $1\le p\le 17$ 17 вариантов

6) $k=17$ $1\le m\le 17$ $p=1$ 17 вариантов.

Итого $6\cdot 17$ случаев. Но ~~случа~~ каждый из случаев $k=1, m=17, p=17$; $k=17, m=1, p=17$; $k=17, m=17, p=1$; $k=1, m=1, p=17$; $k=1, m=17, p=1$; $k=17, m=1, p=1$ (всего 6 случаев) был рассмотрен дважды, поэтому ~~ответ~~ всего случаев для k, m, p $-$ $6\cdot 17 - 6 = 6\cdot 16 = 96$.

Аналогично, для l, n, q случаев $6\cdot 15 - 6 = 6\cdot 14 = 84$.

Для каждой из троек (k, m, p) подходит каждая из троек l, n, q, поэтому всего вариантов $96\cdot 84 = 8064$.

Ответ: 8064.

№5.

ОДЗ для x:
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 > 0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0 \\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 \ne 1 \\ \sqrt{x-\frac{11}{4}} > 0 \\ \sqrt{x-\frac{11}{4}} \ne 1 \\ \frac{x}{2}-1>0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ne 1 \\ \left(x-\frac{11}{4}\right)^2>0 \end{cases}$$
, откуда $x\in\left(\frac{11}{4}; \frac{15}{4}\right)\cup\left(\frac{15}{4}; 4\right)\cup(4; +\infty)$.

Рассмотрим 3 возможных случая.

а) $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)+1$

Пусть $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = a$. Тогда по определению логарифма

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^{2a} = \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \\ \left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{a}{2}} = \left(\frac{x}{2}-1\right) \\ \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a+1} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(x-\frac{11}{4}\right)^{a^2} = \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \\ \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a+1} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \end{cases}$$

$$\left(x-\frac{11}{4}\right)^{a^2(a+1)} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

21103705 (U287964 M1302713)

$a^2(a+1) = 2$

$a^3+a^2-2=0$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$a=1$ или $a^2+2a+2=0$ $\varnothing$

Т.о., $a=1$.

$x - \frac{11}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

Чистовик 2.

$x = 5$

Для случая а) $x=5$, но проверка подстановкой подтверждает.

б) $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2, \quad \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)+1.$

Пусть $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = a.$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^{2a} = \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \\ \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \\ \left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{a+1}{2}} = \left(\frac{x}{2}-1\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(x-\frac{11}{4}\right)^{a(a+1)} = \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \\ \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \end{cases}$$

$$\left(x-\frac{11}{4}\right)^{a^2(a+1)} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

$a^2(a+1) = 2$

$a^3 + a^2 - 2 = 0$

~~Аналогично~~ $a=1$ (аналогично а)).

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x^2 - \frac{11x}{2} + \frac{121}{16}$

$8x - 4 = 16x^2 - 88x + 121$

$16x^2 - 96x + 125 = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \frac{\sqrt{19}}{4}$

$3 - \frac{\sqrt{19}}{4} < \frac{11}{4}$, поэтому не подходит.

$x = 3 + \frac{\sqrt{19}}{4}$, но проверка не подтверждает равенство, поэтому также не подходит.

в) $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2, \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2+1$

Пусть $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = a$

$$\begin{cases} \left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{a}{2}} = \left(\frac{x}{2}-1\right) \\ \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^{2(a+1)} = \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \end{cases} \qquad \cancel{\begin{cases} \left(x-\frac{11}{4}\right)^{a(a+1)} = \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \\ \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \end{cases}}$$

$$\cancel{\left(x-\frac{11}{4}\right)^{a^2(a+1)} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2}$$

$\cancel{a^2(a+1) = 2}$

$\cancel{a^3 + a^2 - 2 = 0}$

~~$a = 1$, аналогично а) и б).~~

$\cancel{\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x-\frac{11}{4}\right)}$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^{2a(a+1)} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \\ \left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{a}{2}} = \left(\frac{x}{2}-1\right) \end{cases}$$

$$\left(x-\frac{11}{4}\right)^{a^2(a+1)} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

$a^2(a+1) = 2$

$a^3 + a^2 - 2 = 0 \quad a = 1$, аналогично а) и б).

$$\left(\frac{x}{2}-1\right)^4 = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

Т.к. $\frac{x}{2} - 1 > 0$ и $x - \frac{11}{4} > 0$, то

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 = x - \frac{11}{4}$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = x - \frac{11}{4}$

$x^2 - 4x + 4 = 4x - 11$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-3)(x-5) = 0$

Но $x=5$ соответствует случаю а) ~~поэтому $x=3$.~~ а $x=3$ не подходит, если его подставить в выражение.

Ответ: ~~3; $3+\frac{\sqrt{19}}{4}$; 5.~~ 5.

Черновик 1.

№4. $\begin{cases} НОД(a; b; c) = 3\cdot 7 \\ НОК(a; b; c) = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$

$3^a\cdot 7^b;\ 3^c\cdot 7^d;\ 3^e\cdot 7^f$

$a = 21m$

$b = 21n$

$c = 21k$

$21^3 mnk = 3^{18}\cdot 7^{16}$

$a, b, c, d, e, f \geq 1$

$\cancel{a, b}\ a, c, e \leq 17$

$b, d, f \leq 15$

$(90+6)(90-6) = 8100 - 36 = 8064$

$a\cdot b\cdot c$ $\quad$ $a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e$

$b\cdot c\cdot d$ $\quad$ c

$c\cdot d\cdot e$

$3^k\cdot 7^l;\ 3^m\cdot 7^n;\ 3^p\cdot 7^q$

~~17 = max (~~

$\cancel{max(k, l,}$ $max(k, m, p) = 17$

$min(k, m, p) = 1$

$max(l, n, q) = 15$

$min(l, n, q) = 1.$

$k = 1 \quad m = 17 \quad 1 \leq p \leq 17$

$6\cdot 17\cdot 6\cdot 15 = 36\cdot 15\cdot 17$

$15\cdot 17 = 256 - 1$

$= 255\cdot 36$

255×36: 1530, 765, 9180

$\cancel{2x \geq 1}$ $2x > 1$

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) =$

$\cancel{= \frac{1}{2}\log_{\left|\frac{x}{2}-1\right|}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}$

$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 > 0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0 \\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 \neq 1 \\ \sqrt{x-\frac{11}{4}} > 0 \\ \sqrt{x-\frac{11}{4}} \neq 1 \\ \frac{x}{2}-1 > 0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0 \quad \frac{x}{2}-\frac{1}{4} \neq 1 \\ \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 > 0 \end{cases}$

$\frac{x}{2} \neq 1 \quad x \neq 2$

$x > \frac{1}{2}$

$x \neq 0 \quad x \neq 4$

$x > \frac{11}{4}$

$x \neq \frac{15}{4}$

$x > 2$

$x > \frac{1}{2}$

$x \neq \frac{5}{2}$

$x \neq \frac{11}{4}$

$\frac{x}{2} - 1 = 1 \quad -\frac{x}{2} + 1 = 1$

$x = 4 \quad x = 0$

$\cancel{4a}\ 2a - 1 \neq 4$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

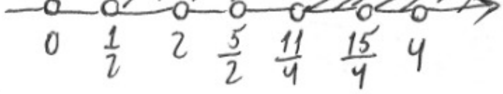
$2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = a$

$\cancel{\frac{x}{2}-1 = b}$ $\frac{x}{2}-1 = a - \frac{3}{4}$

$x - \frac{11}{4} = 2a - \frac{9}{4}$



$x \in \left(\frac{11}{4}; \frac{15}{4}\right) \cup \left(\frac{15}{4}; 4\right) \cup (4; +\infty)$

$\frac{1}{2}\log_{a-\frac{3}{4}}(a)$

$2\log_{2a-\frac{9}{4}}\left(a-\frac{3}{4}\right)$

$2a = x - \frac{1}{2}$

$2a - \frac{9}{4}$

$\cancel{\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = 4a}$

$\cancel{\frac{x}{2}-1 = 4a-3}$

$\cancel{\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = a}$

$\cancel{2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = a}$

$2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right) = a+1$

21103705 (U287964 M1302713)

Черновик 2.

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=a \qquad \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=a+1$$

$$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=a$$

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{2}-1\right)^{2a}=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\\ \left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{a}{2}}=\left(\frac{x}{2}-1\right)\\ \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a+1}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2\end{cases}$$

$$x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$$

$$4x-11=2x-1$$

$$\left(x-\frac{11}{4}\right)^{a^2}=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$2x=10$$

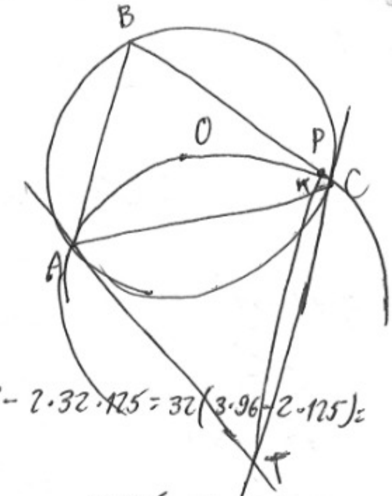
$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a+1}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

$$x=5$$

$$\left(x-\frac{11}{4}\right)^{a(a+1)}=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{11}{4}\right)^{a^2(a+1)}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$



$$a^2(a+1)=2 \qquad a=1$$

$$a^3+a^2-2=0$$

	1	1	0	−2
1	1	2	2	0

$$\cancel{t^2-96xt+2000=0}$$

$$D=96^2-4\cdot16\cdot125=96\cdot96-2\cdot32\cdot125=32(3\cdot96-2\cdot125)=$$

$$=64(3\cdot48-125)=64\cdot19$$

$$(a-1)(a^2+2a+2)=a^3+2a^2+2a-a^2-2a-2=a^3+a^2-2$$

$$D=4-4\cdot2<0$$

$$x_{1,2}=\frac{96\pm8\sqrt{19}}{32}$$

$$3-\frac{\sqrt{19}}{4} * \frac{11}{4}$$

$$12-\sqrt{19} * 11$$

а) $x=5$

$$\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{9}{4}\right)=1 \qquad \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)=1$$

$$\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{9}{4}\right)^2=2$$

$$\left(x-\frac{11}{4}\right)^{a(a+1)}=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

б) б) $x=3$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)=1 \qquad \log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$x=3+\frac{\sqrt{19}}{4}=\frac{12+\sqrt{19}}{4}$$

б в

$$\log \qquad \log_{\left(\frac{12+\sqrt{19}}{8}-1\right)^2}\left(\frac{12+\sqrt{19}}{8}-\frac{2}{8}\right)=\log_{\left(\frac{4+\sqrt{19}}{8}\right)^2}\left(\frac{10+\sqrt{19}}{8}\right)$$

21103705 (U287964 M1302713)

$$\left(\frac{4+\sqrt{19}}{8}\right)^2=\frac{16+8\sqrt{19}+19}{64}=\frac{35+8\sqrt{19}}{64}$$