Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103495**

ID профиля: **809243**

Вариант 19

Чистовик.

Задача 1.

1) Обозначим a_1 как a, а разность как d.

$\begin{cases} a_{11}a_{15} < S+47 \\ a_9 a_{17} < S+12 \end{cases} \Rightarrow a_{11}a_{15}-47 < S < a_9a_{17}-12 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{11}a_{15}-47 < a_9a_{17}-12$

$a_{11}a_{15} < a_9a_{17}+35$

$(a+10d)(a+14d) < (a+8d)(a+16d)+35$

$\cancel{a^2+24ad}+140d^2 < \cancel{a^2+24ad}+128d^2+35$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$

$d < \sqrt{2\frac{11}{12}}$

$1 < \sqrt{2\frac{11}{12}} < 2$) т.к. d - натуральное (положительное целое), то $d=1$.

2) $S = 14a + \frac{1+13}{2}\cdot 13\cdot d = 14a+91d = 14a+91$;

$\begin{cases} 14a+91 > a^2+24a+140-47 \\ 14a+91 < a^2+24a+128-12 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+10a+2<0, \\ a^2+10a+25>0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a+5)^2>0, & (1) \\ a^2+10a+2<0 & (2) \end{cases}$

(1): $a \neq -5$

(2): $D = 100-8=92 = 46\cdot 2 = 4\cdot 23$

$\frac{-10\pm 2\sqrt{23}}{2} = -5\pm 2\sqrt{23}$

$-5+2\sqrt{23} \vee 4$

$2\sqrt{23} \vee 9$

$4\cdot 23 \vee 81$

$92 > 81$

$\boxed{-5+2\sqrt{23} > 4}$

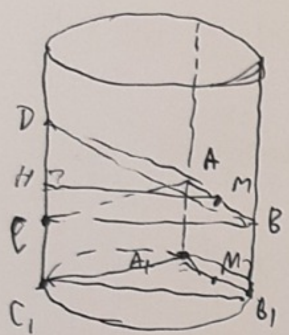
$-5-2\sqrt{23}$

$\boxed{-5-2\sqrt{23} > -14}$

Ответ: Все целые числа на $[-14;4]$, исключая -5.

Черновик.

Задача 2.



Т.к. $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ – равноб., то $CD \perp AB$.
Ясно, что радиус равен радиусу окр-ти, описанной около $\triangle A_1B_1C_1$ (проекцией Δ-k). Т.к. CD „вертикально", $AB \perp CD$, то AB – „горизонтально" $\Rightarrow AB = A_1B_1$.

Ясно, что ~~A_1B_1~~ $A_1C_1 = B_1C_1$.

Найдём радиус через теорему синусов:

$$R = \frac{A_1B_1}{2\sin\angle A_1C_1B_1} \Rightarrow R_{min} = \frac{2}{2\cdot\sin 90^\circ} = 1.$$

Пусть M – серед. AB, M_1 – проекция M на $(A_1B_1C_1)$.

$MC = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$, $DM = \sqrt{48}$;

Пусть $MH \perp CD$; $MH = и \parallel MC_1 \Rightarrow MH = 1$ (как медиана к гипотенузе) $\Rightarrow CH = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$, $DH = \sqrt{47}$.

Ответ: $R_{min} = 1$; CD тогда $= \sqrt{34} + \sqrt{47}$

21103495 (U809243 M1303782)

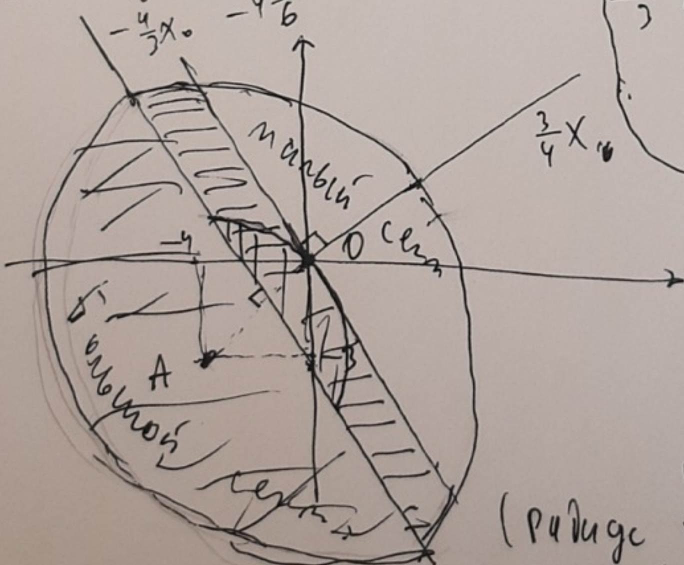
Задача 3. Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,\ 25)\end{cases}$$

Для удобства $x_0=a$, $y_0=b$.

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2\le -8x_0-6y_0\\ -8x_0-6y_0\ge 0,\\ -8x_0-6y_0\le 25\end{cases}\qquad \begin{cases}x_0^2+y_0^2\le 25\\ -8x_0-6y_0>25\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x_0+4)^2+(y_0+3)^2\le 25,\\ y_0\le -\frac{4}{3}x_0,\\ y_0\ge -\frac{4}{3}x_0-4\frac{1}{6}\end{cases}\qquad \begin{cases}x_0^2+y_0^2\le 25\\ y_0< -\frac{4}{3}x_0-4\frac{1}{6}\end{cases}$$



$$-\frac{4}{3}x_0-\frac{25}{6}=\frac{3}{4}x_0$$

$x_0=-2\Rightarrow$
$\Rightarrow$ центры окружностей радиусами 10 симметричны относительно $-\frac{4}{3}x_0-4\frac{1}{6}\Rightarrow$
$\Rightarrow$ пересекают её в одинаковых точках (радиус равен 10, т.к. если круг радиуса 5 является множеством центров кругов радиуса 5, то суммарное мн. - круг радиуса 10).

~~Плош~~ Заштрихованная фигура - и есть фигура M.

Площадь сегмента $\frac{1}{2}R\sqrt{2Rh-2h^2}$;

$S_{больш}=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{20\cdot 7{,}5-2\cdot 7{,}5^2}$;

$S_{мал.}=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{20\cdot 5-2\cdot 5^2}$; $S_{суммарн.}=(S_б-S_м)+S_б=$

$=2S_{больш}-S_m$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25,\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,\ 25)\end{cases}$$

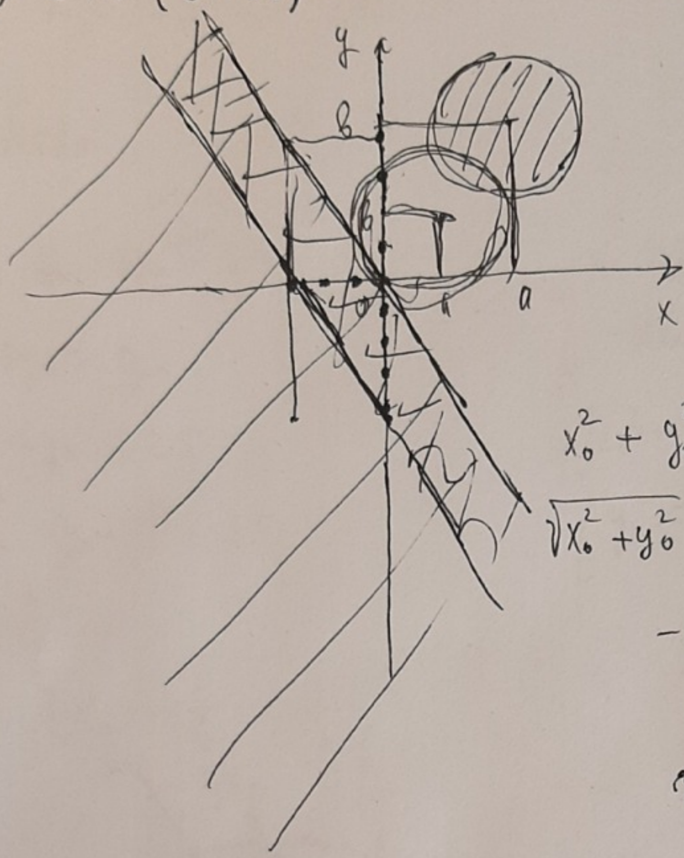
a^2+b^2

Если $a, b>0$, то

$-8a-6b<0$

Поэтому

a или $b\le 0$



$$x_0^2+y_0^2\le \min(-8x_0-6y_0,\ 25)$$

$$\sqrt{x_0^2+y_0^2}\le \min\left(\sqrt{-8x_0-6y_0},\ 5\right)$$

$$-8x_0-6y_0\ge 0$$

$$6y_0\le -8x_0$$

$$\cancel{3y_0}\ y_0\le -\frac{4}{3}x_0$$

$$-8x_0-6y_0\le 25$$

$$\begin{cases}-8x_0-6y_0\le 25,\\ -8x_0-6y_0\ge 0\end{cases}$$

$-8x_0-6y_0>25$

$\cancel{-8x_0-6y_0}$

$6y_0<-8x_0-25$

$6y_0\ge -8x_0-25$

$y_0\ge -\frac{4}{3}x_0-4\frac{1}{6}$

$$\begin{cases}y_0\le -\frac{4}{3}x_0\\ y_0\ge -\frac{4}{3}x_0-4\frac{1}{6}\end{cases}$$

$$\begin{cases}y_0<-\frac{4}{3}x_0-4\frac{1}{6}\\ \cancel{a^2+b^2\le}\\ x_0^2+y_0^2\le 25\end{cases}$$

$y_0^2+x_0^2\le -8x_0-6y_0$

$\frac{3}{4}x=-\frac{4}{3}x-\frac{25}{6}$

$\frac{25}{12}x=-\frac{25}{6}$

$\frac{x}{2}=-1$ $\quad x=-2$

$y_0^2+6y_0+x_0^2+8x_0\le 0$

$(y_0+3)^2+(x_0+4)^2\le 25$

Множество центров: (1) $\begin{cases}(y_0+3)^2+(x_0+4)^2\le 25,\\ y_0\le -\frac{4}{3}x_0,\\ y_0\ge -\frac{4}{3}x_0-4\frac{1}{6}\end{cases}$ или (2) $\begin{cases}y_0<-\frac{4}{3}x_0-4\frac{1}{6},\\ x_0^2+y_0^2\le 25\end{cases}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103495**

ID профиля: **809243**

Вариант 19

32

Чистовик

Задача 1.

Запишем необходимое и достаточное условие системы.

Пусть x_1, x_2, x_3 — степени 3 в числах a, b, c (не обязательно соответственно)

y_1, y_2, y_3 — степени 7.

(Других простых чисел нет).

$$\begin{cases} 17 \geq x_1; x_2; x_3 \geq 1 \\ 15 \geq y_1; y_2; y_3 \geq 1 \\ \exists x_i = 1 \\ \exists y_i = 1 \\ \exists x_i = 17 \\ \exists y_i = 15 \end{cases}$$

Тогда

x_1	x_2	x_3	y_d	y_e	y_f
1	k	17	1	t	15

$1 \leq k \leq 17$ $\quad$ $1 \leq t \leq 15$

Посчитаем варианты без учёта перестановок:

Для $k \in [2; 16]$: $3! \cdot 15$.

Для $k = 1; 17$: $\frac{3!}{2} \cdot 2 = 3!$

В сумме: $(3!) \cdot 16$

Для $t \in [2; 14]$:

$3! \cdot 13$

$t = 1; 15$: $\frac{3!}{2} \cdot 2 = 3!$

В сумме $(3!) \cdot 14$

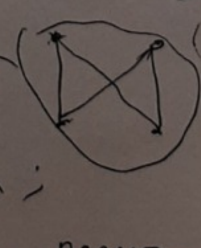
Итого: $(3!)^2 \cdot 16 \cdot 14 = 8064$;

Заметим, что трёх одинаковых $(a = b = c)$ быть не может,

Два одинаковых возможны при наборах: $x: (1; 17; 17), (1; 1; 17)$

схематично показано, что таких наборов 4. $y: (1; 15; 15), (1; 1; 15)$

Поэтому с учётом перестановок:



$(8064 - 4) \cdot 3! + \frac{4 \cdot 3!}{2} = 48372$.

Ответ: $(3!)^2 \cdot 14 \cdot 16 = 8064$ без учёта перестановок;

$(8064 - 4) \cdot 3! + \frac{4 \cdot 3!}{2} = 48372$ — с учётом перестановок.

Задача 2. Чистовик.

Для удобства сделаем замену:

$a = \frac{x}{2} - 1$; $b = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$; $c = x - \frac{11}{4}$;

Ясно, что a, b, c положительны и не равны 1.

Тогда перепишем числа:

$\log_{a^2} b$; $\log_b c^2$; $\log_{\sqrt{c}} a$

Преобразуем:

$\log_{a^2} b$; $\log_b c^2$; $\log_c a^2$

Пусть последняя тройка равна соответсвенно p, m, n.

Заметим, что $pm = \frac{2}{n} \Rightarrow pmn = 2$;

Пусть два равных числа равны y, тогда $y^2(y+1) = 2$

$y^3 + y^2 - 2 = 0$, $y = 1$;

Переберём 3 вар. (p, m, или $n = 2$):

$$\begin{cases} a^2 = b^2 \\ b = c^2 \\ a^2 = c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} c^2 = b^2 \\ a^2 = b \\ a^2 = c \end{cases} \quad \begin{cases} b = a^4 \\ c^2 = b \\ a^2 = c \end{cases}$$

1) $a = b = c$ 2) $b = c = a^2$ 3) $a^4 = c^2 = b$

1) $a \neq b$, т.к. $\frac{x}{2} - 1 \neq \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

2) $b = c \Rightarrow -\frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{11}{4}$, $\frac{x}{2} = \frac{5}{2}$, $x = 5$; проверим: $b = c = \frac{9}{4}$; $a = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} = \sqrt{b}$ (верно)

3) $\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = x - \frac{11}{4}$

$\frac{x^2 - 4x + 4}{4} = \frac{4x - 11}{4}$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-5)(x-3) = 0$

$x = 5$ уже было; ~~$\Rightarrow$~~

проверим $x = 3$; $a^2 = c = \frac{1}{4}$; $b = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \cancel{\frac{9}{4} - \frac{1}{4}}$

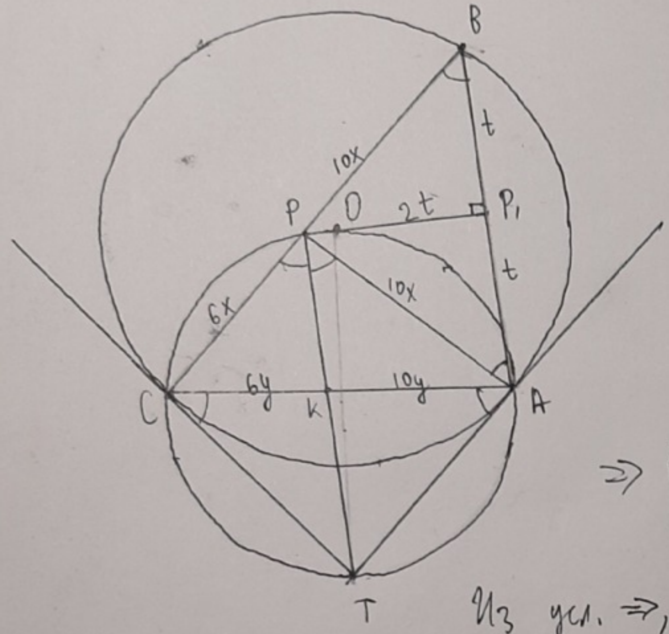
$= \frac{6}{4} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$\frac{1}{16} \neq \frac{5}{4} \Rightarrow$ не подходит

Ответ: $x = 5$.

21103495 (U809243 M1303783)

Задача 3. Чистовик.



а) CT – касат. $\Rightarrow \angle ACT = \angle ABC$, аналогично, $\angle CAT = \angle ABC$.

$\angle AOC = \angle APC$ (как вписан.) $= 2\angle ABC \Rightarrow \angle APC + \angle ATC = 2\angle ABC + (180 - 2\angle ABC) = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow T \in$ окр-ти, описанной около AOC.

Как вписан., $\angle CPT = \angle ATC = \angle TCA = \angle APT = \angle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $PT \parallel AB$

2) PT – биссек. $\angle APT$.

Из усл. $\Rightarrow$, что $AK : CK = 10 : 6 \Rightarrow CP : PB = 6 : 10 \Rightarrow S_{\triangle CPK} : S_{\triangle ABC} = \left(\frac{6}{16}\right)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 6 \cdot \frac{64}{9} = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}$.

Ответ: $S_{\triangle ABC} = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}$.

б) Пусть $CP = 6x$, тогда $AP = 10x$ и $BP = 10x \Rightarrow AP = BP \Rightarrow$ прямая OP – серед. перпендикуляр к отрезку AB. Пусть $AB = 2t$, тогда $PP_1 = 2t$ ($PP_1 \perp AB$) $\Rightarrow BP = t\sqrt{5} = AP$; $CP = \frac{3t\sqrt{5}}{5}$; ~~...~~

Найдём $\sin\angle APC$. $1 + 4 = \frac{1}{\cos^2\angle ABC}$, $\cos\angle ABC = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin\angle ABC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;

$\sin\angle APC = 2 \cdot \frac{2 \cdot 5}{5^2} = \frac{4}{5}$;

$\frac{1}{2} \cdot t\sqrt{5} \cdot \frac{3t\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{4}{5} = 16$

$t^2 \cdot 3 = 16$

$t = \frac{4\sqrt{3}}{3}$;

$AP = \frac{4\sqrt{15}}{3}$,

$CP = \frac{4\sqrt{15}}{5}$;

$\cos\angle APC = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$; $AC^2 = 15\left(\frac{16}{9} + \frac{16}{25}\right) - 2 \cdot \frac{16}{15} \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} = \frac{256}{15} \Rightarrow AC = \frac{16}{\sqrt{15}}$.

Ответ: $AC = \frac{16}{\sqrt{15}}$.