Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103340**

ID профиля: **280878**

Вариант 19

Чистовик. 19-вариант

№1

$a_9 a_{17} > S+12$

$a_{11} a_{15} < S+47$ $\Rightarrow a_{11}a_{15}-47 < S < a_9 a_{17}-12$

$a_{11}a_{15}-47<a_9a_{17}-12$

$(a_1+10d)(a_1+14d)-47<(a_1+8d)(a_1+16d-12)$

$a_1^2+24a_1d+140d^2-47<a_1^2+24a_1d+128d^2-12$

$12d^2<35$

$d^2<\frac{35}{12} \Leftrightarrow d\in\left(-\sqrt{\frac{35}{12}};\sqrt{\frac{35}{12}}\right);$

Т.к. прогрессия возрастает и состоит из целых чисел, то $d>0$, $d\in \mathbb{Z}$, тогда $d=1$ т.к. $\left(1<\sqrt{\frac{35}{12}}<2\right);$

Значит: $a_9a_{17}=(a_1+8)(a_1+16)=a^2+24a_1+128;$

$a_{11}a_{15}=(a_1+10)(a_1+14)=a_1^2+24a_1+140;$

$S=\frac{3a_1+13d}{2}\cdot 14=7(2a_1+13)=14a_1+91;$

$\begin{cases} a_1^2+24a_1+128>14a_1+103; \\ a_1^2+24a_1+140<14a_1+138; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0; \\ a_1^2+10a+2<0; \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1\neq -5 \\ a_1\in(-5-\sqrt{23};-5+\sqrt{23}). \end{cases}$

Т.е. $a_1\in(-5-\sqrt{23};-5)\cup(-5;-5+\sqrt{23})$.

Т.к. $a_1\in \mathbb{Z}$, то $a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$

Ответ: $a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$.

Чистовик.

19 - вариант.

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25; \\ a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b, 25).\end{cases}$$

(2): Если $-8a-6b<25 \Rightarrow a>\frac{-6b-25}{8}$, то

$a^2+b^2 \leq -8a-6b \Leftrightarrow (a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25$ - граница окр. с центром $(-4;-3)$ и $R=5$

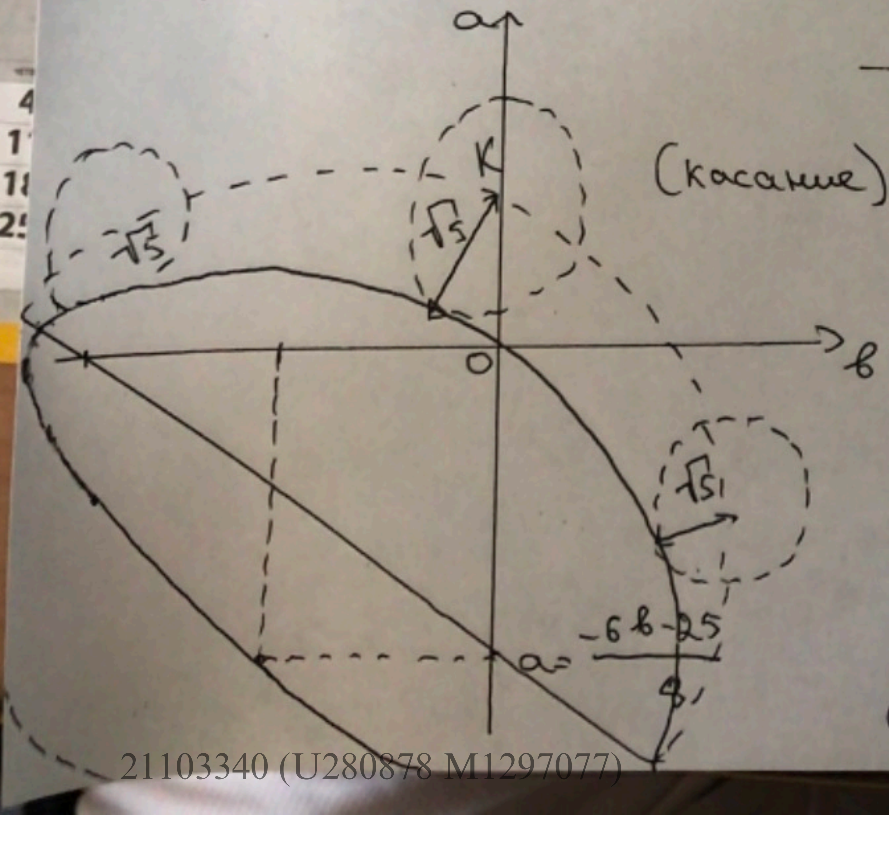
Если $-8a-6b \geq 25 \Leftrightarrow a \leq \frac{-6b-25}{8}$, то

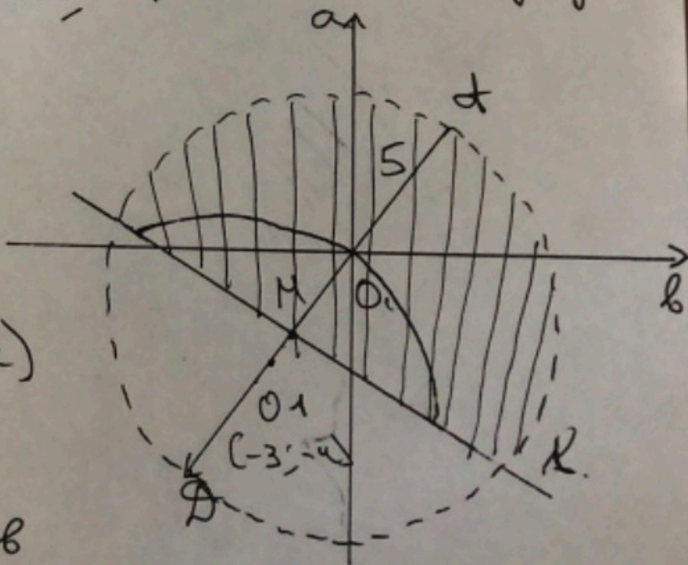
$a^2+b^2 \leq 25$ - окр-ть с центром $(0;0)$ и $R=5$

(1): $(a-x)^2+(b-y)^2 \leq 25$ - круг с центром $(x;y)$ и $R=5$;

Система будет иметь решения, если окр-ть (1) имеет с окр (2) хотя бы одну общую точку, т.е. её центр $(x;y)$ лежит в области, ограниченной двумя окружностями.

Построим (схематично):





(продолж. на след. листе).

2

Чистовик. 19-вариант.

№3 (продолжение)

Ур-ие $O_1M \perp l$ имеет вид $a = \frac{4}{3}b$. Тогда, $\frac{4}{3}b = -\frac{6b-25}{8} \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$; $a = -2$;

$O_1M = \sqrt{\frac{9}{4}+4} = \frac{5}{2}$; Тогда, $\frac{MA}{MO} = \frac{\frac{3}{2}\cdot 5}{\frac{25}{2}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$;

Т.е. $S_{сеч} = \frac{3}{8} S_{круга} = \frac{3}{8}(\pi \cdot 10)^2 = \frac{75}{2}\pi$. Тогда $\Rightarrow$

$S_M = 2 \cdot \frac{75\pi}{2} = 75\pi$

Ответ: 75π

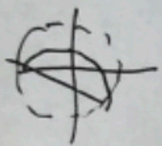
Черновик.

$a_{11}a_{15}-47=a_9a_{17}-12;$

$d^2<\frac{35}{12}$ $d\in(-\sqrt{\frac{35}{12}};\sqrt{\frac{35}{12}};)$

$a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}.$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 25;\\ a^2+b^2\leq\min(-8a-6b;25).\end{cases}$$



$S_M=2\cdot\frac{75\pi}{2}=\frac{2\cdot 75\pi}{2}=75\pi;$

21103340 (U280878 M1297077)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103340**

ID профиля: **280878**

Вариант 19

Чистовик.
19 - вариант.

№5.

Заметим, что

$$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)=$$

$= 2$ при:

$$\begin{cases}(\frac{x}{2}-1)^2\neq 1\\ x\neq 2\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0\\ x\neq\frac{15}{4}\\ x\geq\frac{11}{4}\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 4;\\ x\neq 0;\\ x>\frac{1}{2}\\ x>\frac{11}{4};\\ x\neq\frac{15}{4}\\ x\neq\frac{5}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{11}{4}\\ x\neq\frac{15}{4}\\ x\neq 4\end{cases}$$

Пусть y - одинаковые числа, тогда $y+1-3^{\text{е}}$ - число =>

=> $y\cdot y\cdot(y+1)=2$;

$y^3+y-2=0$;

$y=1$ (корень подбором) => $y^2+y+2=0$ (нет действит. решений).

Поделим столбиком (т. на Безу)

$$\begin{array}{r|l} y^3+y-2 & y-1\\ \underline{-\,y^3-y^2} & \overline{y^2+y+2}\\ -y^2+y & \\ \underline{y^2-y} & \\ -2y-2 & \\ \underline{2y-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Значит $y=1$, тогда

$$\left[\begin{array}{l}\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1;\\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1;\\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(\frac{x}{2}-1)^2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4};\\ \sqrt{x-\frac{11}{4}}=\frac{x}{2}-1;\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

(см. продолж. на след. листе).

Шоовик

19- вариант

№5 (продолжение)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{4} = 0. \\ x - \frac{11}{4} = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2; \\ -x^2 + 6x - \frac{125}{16} = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = 5 \\ x = 3; \\ x = 5 \\ x = 3 \pm \frac{\sqrt{19}}{4}; \end{array}\right.$$

Т.к $x > \frac{11}{4}$, то $x \in \left\{5; 3; 3 + \frac{\sqrt{19}}{4}\right\}$.

~~Ответ: $x \in \left\{5; 3; 3 + \frac{\sqrt{19}}{4}\right\}$~~ Проверка: $x = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{9}{4}} \frac{9}{4} = 1;$

$\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} = 1; \Rightarrow x = 5$ - подходит.

$\log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 2$

$x = 3$: $\log_{\frac{1}{4}} \frac{5}{4}$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$; $\log_{\frac{9}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow x = 3$ - не подходит.

$x = 3 + \frac{\sqrt{19}}{4}$: при подстановке, не получаем равенства $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 + \frac{\sqrt{19}}{4}$ - не подходит $\Rightarrow x = 5$.

Ответ: $x = 5$

Черновик.

Кол-во троек N чисел (a, b, c);

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 21; \\ НОК(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

$21 = 7 \cdot 3 = 3 \cdot 7$;

$34 \,|\, \frac{2}{17}$. 12

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 3 \cdot 7 \\ НОК(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7 \end{cases}$$

Привет.

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})$;

$1 = 2 < 3$ (на 1); (на 1 больше 3 числа).

а 2 первых равные между собой):

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 21; \\ НОК(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 3 \cdot 7; \\ НОК(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15}; \end{cases}$$

$(1; 3; 7)$;

$(1;$

$3^{17} \cdot 7^{15} = НОК(a; b; c)$

$$\begin{array}{r} \times\, 969 \\ 680 \end{array}$$

4 5 5
1

$$\begin{array}{r} \times\, 969 \\ 680 \\ \hline 77520 \\ 5814 \\ \hline 658920 \end{array}$$

21103340 (U280878 M1297078)

Чистовик

19-варианта.

№4

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 21 = 3 \cdot 7 \\ НОК(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15}. \end{cases}$$

Тогда $a = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{p_1}$; $b = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{p_2}$; $c = 3^{\alpha_3} \cdot 7^{p_3}$, причём в разложении каждого из чисел есть хотя бы одна 3 и 7.

(т.к. $НОД(a; b; c) = 3 \cdot 7$)

Не уменьшая общности, положим $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$
$p_1 \geq p_2 \geq p_3$

Тогда:
$1 \leq \alpha_3 \leq \alpha_2 \leq \alpha_1 \leq 17$
$1 \leq p_3 \leq p_2 \leq p_1 \leq 15$

Если $\alpha_1 = 1$, то $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ (1 случай)

$\alpha_2 = 2$, то $\left[\begin{array}{l} \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_3 = 1 \text{ (1 случай)} \\ \alpha_2 = 2 \Rightarrow \alpha_3 \in \{1; 2\} \text{ (2 случая)} \end{array}\right\}$ всего 3 случая.

Значит, если $\alpha_i = i$, то количество комбинаций для α_i равно: $1 + 2 + \ldots + i = \frac{1+i}{2} \cdot i$.

Всего способов будет $N_\alpha = \sum_{i=1}^{17} \frac{1+i}{2} \cdot i = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 +$

$+ 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 + 105 + 120 + 136 + 153 = 969$

Аналогично, для p имеем $N_p = \sum_{i=1}^{15} \frac{1+i}{2} \cdot i = 680$

Всего комбинаций $N_\alpha \cdot N_p = 969 \cdot 680 = 658920$.

Ответ: 658920.

3

21103340 (U280878 M1297078)