Часть 1

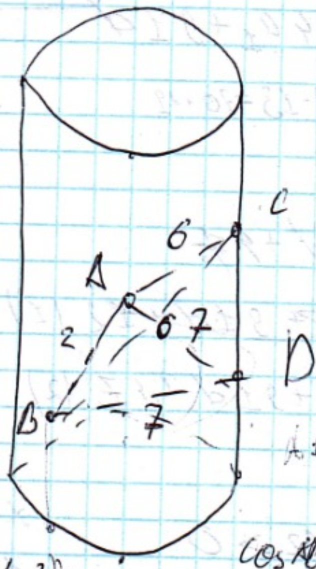
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

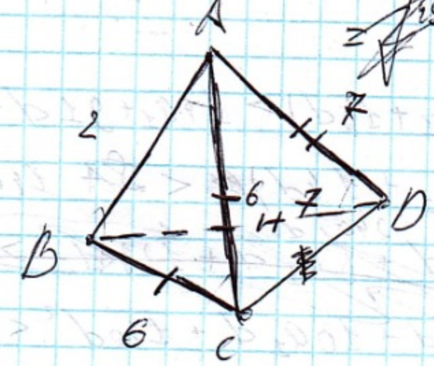
Шифр: **21103240**

ID профиля: **312096**

Вариант 19

Черновик №2





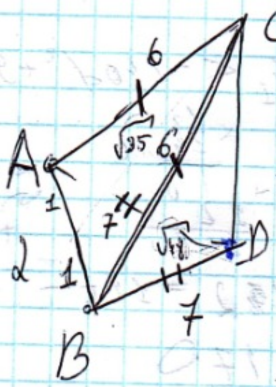
$\sin\sqrt{\frac{49\cdot 49-47\cdot 47}{49\cdot 49}}$

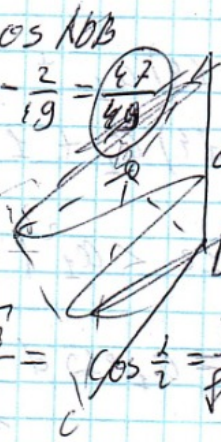
$4 = 2\cdot 49 - 2\cdot 49\cos ADB$

$\cos ADB = \frac{2\cdot 49-4}{2\cdot 49} = 1-\frac{2}{49} = \frac{47}{49}$

$\cos ADB = \frac{47}{49}$

$\cos ACB = \frac{17}{18}$





$\sin\alpha =$

$= 2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{48}}{7} = \frac{2\sqrt{48}}{7}$

$2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$

$\cos\alpha = \frac{2\cdot 35}{36} - \frac{36}{36} =$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{48}}{7}$

$\cos\alpha = \frac{48}{49} - 1\frac{2}{8} = \frac{47}{7}$

$\frac{2\cdot 47}{49}$

Пусть $\angle(ACB;\omega) = \alpha$

$\angle((ABD);\omega) = \beta$

$A_1C_1 = AC\cdot\cos\alpha$

$\sqrt{48}\cdot\cos\alpha = \sqrt{35}\cos\beta$

$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{35}}\cos\alpha = \cos\beta \quad \sqrt{\frac{48}{35}}$

$\frac{2\cdot\cos\alpha}{\sin\angle ACB} = 2R$

$\frac{2\cdot\cos\beta}{\sin\angle ADB} = 2R$

$6\cdot\cos\alpha = 7\cdot\cos\beta$

21103240 (U312096 M1303898)

Черновик №1

$d \geq 0$

$d \in \mathbb{Z}$

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 14a_1 + 91d$

$7 \cdot 13 = 70 + 21$

$\begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$

$\begin{cases} \cancel{a_1^2 + 16a_1 d + 8a_1 d + 128d^2} > 14a_1 + 91d + 12 \ (1) \\ a_1^2 + 14a_1 d + 10a_1 d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \ (2) \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + (24d - 14)a_1 + 128d^2 - 91d - 12 > 0 \\ a_1^2 + (24d - 14)a_1 + 140d^2 - 91d - 47 < 0 \end{cases}$

$-128d^2 + 91d + 12 < a_1^2 + (24d - 14)a_1 < -140d^2 + 91d + 47$

$t = a_1 + 12d$

$(t - 4d)(t + 4d) > 14t - 168d + 12$

$(t - 2d)(t + 2d) < 14t - 168d + 47$

$t^2 - 16d^2 > 14t - 168d + 12$

$t^2 - 4d^2 < 14t - 168d + 47$

$t^2 - 14t + 168d > 16d^2 + 12$

$t^2 - 14t + 168d < 4d^2 + 47$

$16d^2 + 12 < t^2 - 14t + 168d < 4d^2 + 47$

$16d^2 + 12 < 4d^2 + 47$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$

$-\sqrt{\frac{35}{12}} < d < \sqrt{\frac{35}{12}}$

т.к. $d \geq 0$, $d \in \mathbb{Z}$, $d = 1$

$\frac{-10 + \sqrt{92}}{2}$ $\frac{-10 - \sqrt{92}}{2}$ $\sqrt{92} > 8$

21103240 (U312096 M1303898)

Чистовик №1 — Лист №1

№1

$S = \frac{2a_1 + d\cdot 13}{\cancel{2}}\cdot \cancel{14}^{7} = 14a_1 + 91d$

$a_9 \cdot a_{17} = (a_1 + 8d)(a_1 + 16d)$

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d)$

$t = a_1 + 12d$

$a_9 \cdot a_{17} = (t - 8d)(t + 8d) = t^2 - 16d^2$

$a_{11} \cdot a_{15} = (t - 2d)(t + 2d) = t^2 - 4d^2$

~~$S = 14a_1 + 14\cdot 12$~~

$14t = 14a_1 + 14\cdot 12d = 14a_1 + 168d$ $\quad 168 - 91 = 77$

$S = 14t - 77d$

$t^2 - 16d^2 > 14t - 77d + 12$

$t^2 - 4d^2 < 14t - 77d + 47$

$t^2 - 14t + 77d > 16d^2 + 12$

$t^2 - 14t + 77d < 4d^2 + 47$

$16d^2 + 12 < 4d^2 + 47$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$

$-\sqrt{2\frac{11}{12}} < d < \sqrt{2\frac{11}{12}}$, т.к. ~~все~~ прогрессия состоит из целых чисел, то $d \in \mathbb{Z}$, по усл. $d > 0$, зн. $d \in \mathbb{N}$

$d \in \mathbb{N}$

$d < \sqrt{2\frac{11}{12}}$, т.к. $1 < \sqrt{\frac{35}{12}} < 2$

$\sqrt{\frac{12}{12}} < \sqrt{\frac{35}{12}} < \sqrt{\frac{48}{12}}$,

то $\boxed{d = 1}$

21103240 (U312096 M1303898)

$\boxed{\text{Чистовик}}$ Лист №2

$S = 14a_1 + 91$

$a_9 \cdot a_{17} = (a_1+8)(a_1+16) = a_1^2 + 24a_1 + 128$

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1+10)(a_1+14) = a_1^2 + 24a_1 + 140$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47 \end{cases}$$

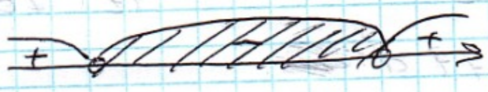
$\cancel{a_1^2 + 24a_1 +}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$$

$(a_1+5)^2 > 0 \quad a_1 \neq -5$

$D = 100 - 8 = 92$

$a_1 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{92}}{2}$



$\dfrac{-10-\sqrt{92}}{2} \qquad \dfrac{-10+\sqrt{92}}{2}$

$-10 < \dfrac{-10-\sqrt{92}}{2} < -9$

$-1 < \dfrac{-10+\sqrt{92}}{2} < 0$, т.к. $a \in [-9; -1]$

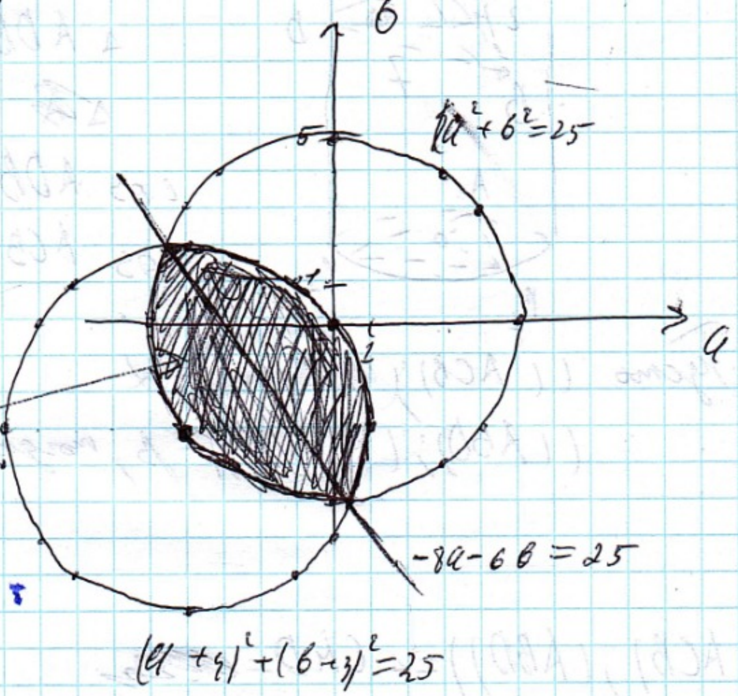
$a \neq -5$

$$\boxed{a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}}$$

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25 & (2)\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b;25) & (1)\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-8a-6b\le 25 & (1)\\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25\end{cases}\\ \begin{cases}-8a-6b\ge 25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}\end{array}\right.$$



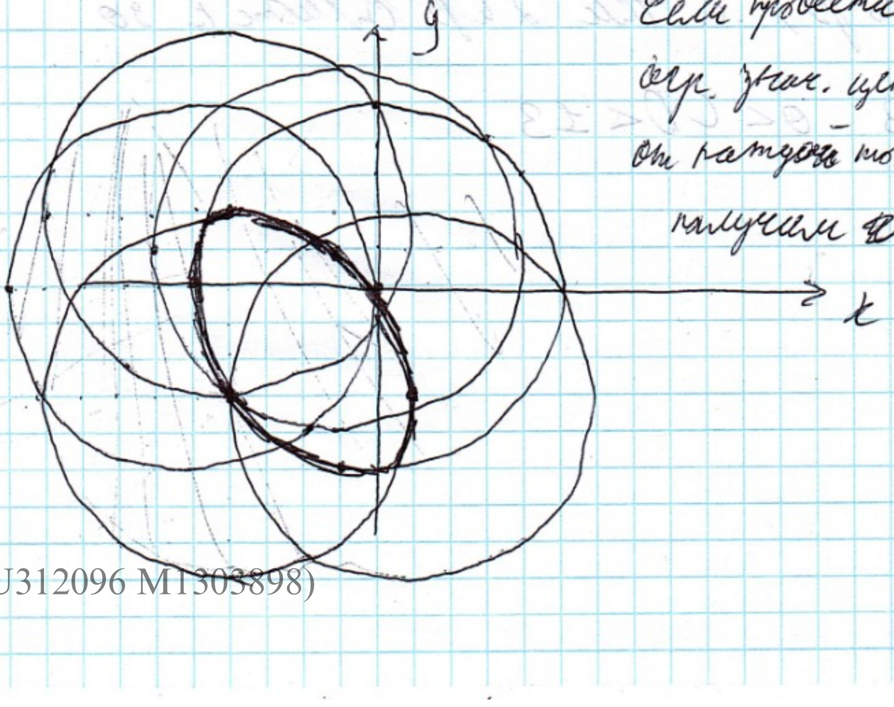
Возможные знач. a и b

~~т.к. центры окр~~

(1)

(2) $(x-a)^2+(y-b)^2=25$ — окр. с центром в $(a;b)$

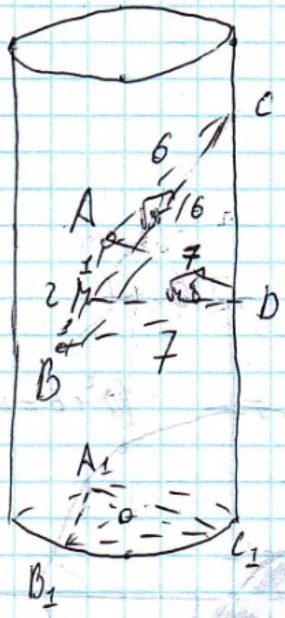
т.е. мн-во, которое мы нашли в пу п. (1) — это ~~мн-во в котор~~ место в котором может располагаться центр окр.



Если провести от фигуры, огр. знач. центра, перпендикуляр от каждой точки длиной 5, получим фигуру, площадь которой надо найти

(Чистовик) Лист № 4

№ 2



Спроецируем △ ~~ACD~~ треугольники на нижнее основание

$\triangle ACB \to \triangle A_1C_1B_1$

$\triangle ADB \to \triangle A_1C_1B_1$

$\cos ADB = \frac{47}{49}$ $\sin ADB = \frac{2\sqrt{48}}{7}$

$\cos ACB = \frac{17}{18}$ $\sin ACB = \frac{2\sqrt{35}}{18}$

Пусть $((ACB);(A_1C_1B_1)) = \alpha$

$((ABD);(A_1B_1C_1)) = \beta$, тогда ~~$A_1C_1 = AC\cdot\cos\alpha = AD\cdot\cos\beta$~~

~~$\frac{6}{7}\cos\alpha = \cos\beta$~~

$((ACB);(ABD)) = \angle CMD =$

$\frac{S'_{ACB}}{S'_{A_1C_1B_1}} = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\frac{S'_{A_1B_1C_1}}{S'_{ABD}} = \cos\beta$

Итог Радиус цилиндр тем меньше, чем меньше $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, т.е. чем α и β ближе к $90°$

~~$0 < CD < 13$~~ $0 < CD < 13$

Черновик #3 ~~-8a-6b~~ Лист 1

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25 \\ a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b;\,25) \end{cases}$$

$-8a-6b \leq 25$

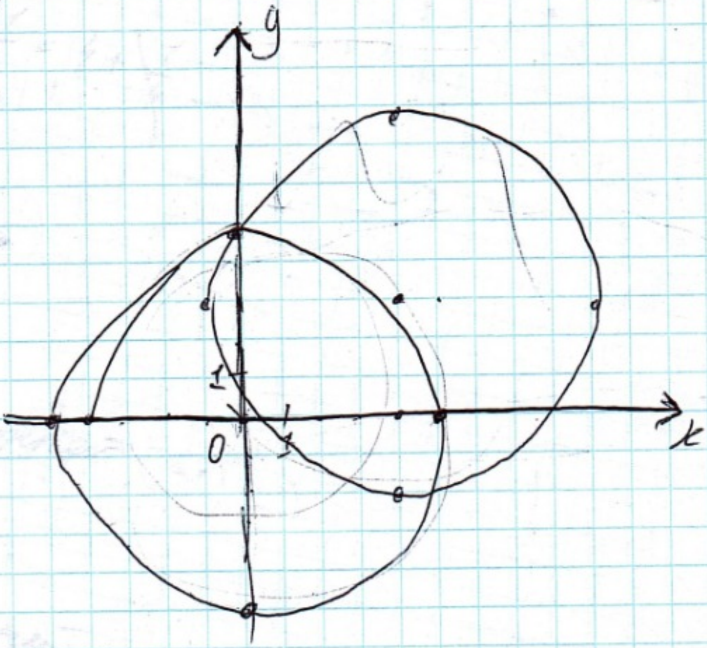
$b \geq -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

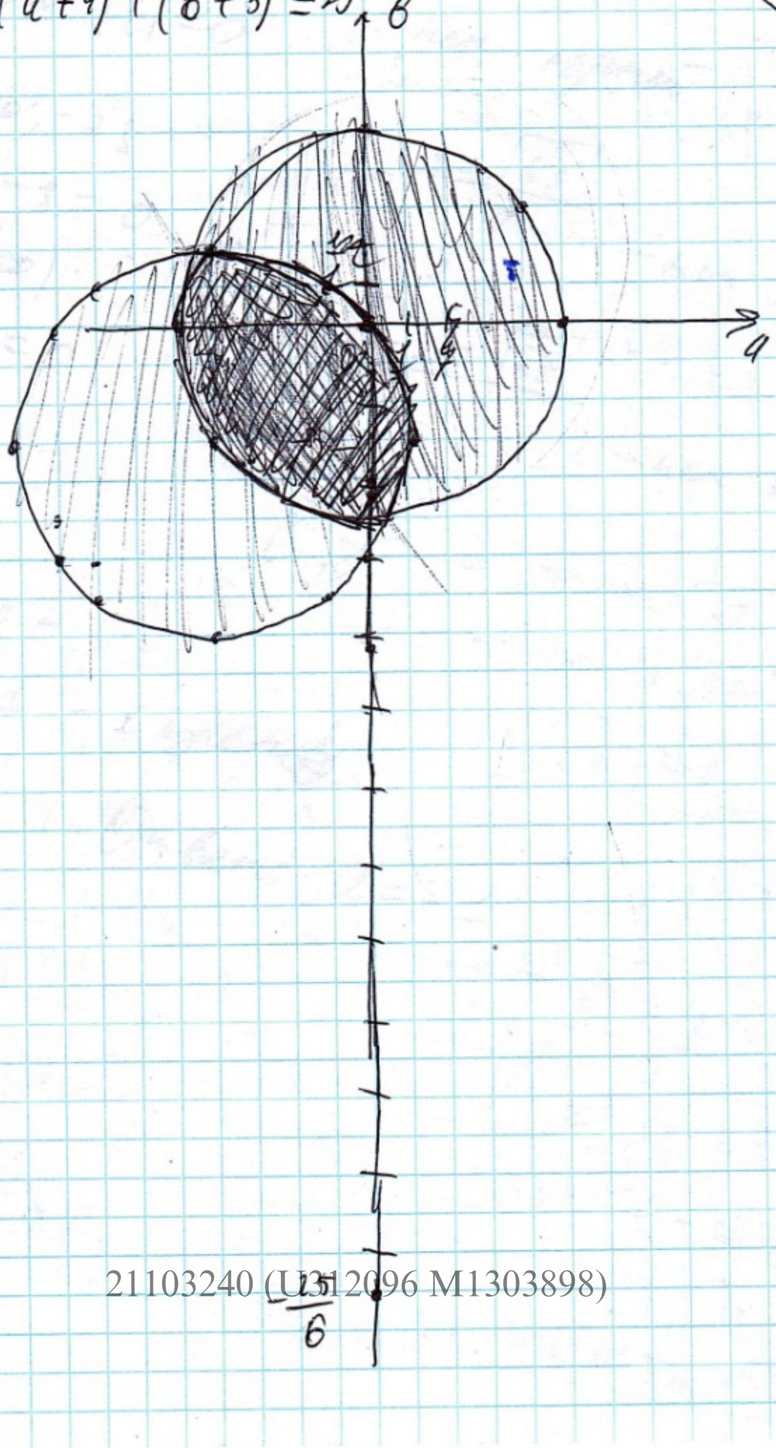
~~$-8a-6b=25$~~

$$b = \begin{cases} -8a-6b \leq 25 \\ a^2+b^2 \leq -8a-6b \end{cases}$$

$(a^2+\overset{2\cdot 4}{8a}+16)+(b^2+\overset{2\cdot 3}{6b}+9) \leq 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25$





21103240 (U312096 M1303898)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103240**

ID профиля: **312096**

Вариант 19

Чистовик

Лист №4

№5

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$x > \frac{11}{4}$

$x \neq \frac{15}{4}$

$x \neq 4$

$\frac{x}{2}-1 = a\cancel{+}\frac{3}{4} = b$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = a$

$x-\frac{11}{4} = 2a-\frac{9}{4} = c$

$\frac{1}{2}\log_{(a-\frac{3}{4})} a$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\log_b a$

$2\log_{2a-\frac{9}{4}}\left(a-\frac{3}{4}\right)$ $\qquad$ $2\log_c b$

$2\log_a\left(2a-\frac{9}{4}\right)$ $\qquad$ $2\log_a c$

1) $\frac{1}{2}\log_b a = 2\log_c b$

$2\log_a c \cancel{+1} = 2\log_c b + 1$

$\log_b a \cdot \log_b c = 4$

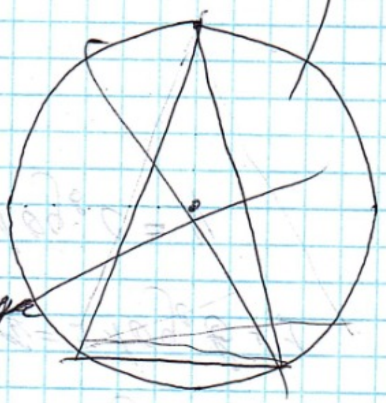
21103240 (U312096 M1303899)

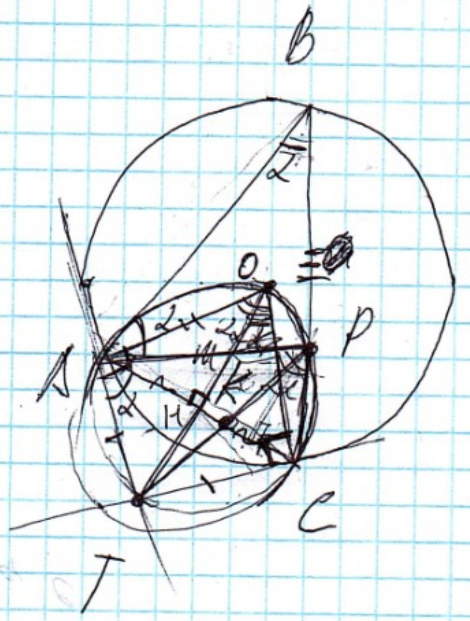
Чистовик

Лист №2

№6

$AT=TC$ (по св-ву касательных)
$AT \perp AO$
$CT \perp OC$





$\angle ABC=\alpha$, тогда

$\angle AOC=2\alpha$,

тогда $\angle APC=2\alpha$,

$\angle APB=180-2\alpha$, тогда $\angle BAP=\alpha$

$\Downarrow$

$\triangle APB$ — р/б ($BP=AP$)

$AOCT$ — вокруг него можно опис окр, причём ту же самую, что и вокруг $\triangle AOC \Rightarrow \angle TOC=\angle TPC$

$\angle TOC=\frac{1}{2}\angle AOC=\alpha \Rightarrow \angle TPC=\alpha \Rightarrow TP$ — биссектриса $\angle APC$

$\Downarrow$

$$\frac{AP}{PC}=\frac{AK}{KC}$$

$$\frac{S_{APK}}{S_{APC}}=\frac{AP\cdot AK}{AP\cdot AC}=\frac{AK}{AC}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8} \Rightarrow \cancel{\frac{AK}{KC}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{3}{5}}$$

$\Downarrow$

$$\frac{AK}{KC}=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{S_{ACP}}{S_{ABC}}=\frac{AC\cdot CP}{AC\cdot BC} \Rightarrow S_{ABC}=S_{ACP}\cdot\frac{PC+PB}{PC}=S_{ACP}\cdot\left(1+\frac{AP}{PC}\right)=$$

$$=16\cdot\frac{8}{3}=\frac{128}{3}$$

Ответ: а) $\frac{128}{3}=S_{ABC}$

Черновик № 1

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(\cancel{\frac{x}{2}}-\frac{11}{4}\right)^2$

$\boxed{x > \frac{11}{2}}$

$\frac{x}{2}-1>0$

$\frac{x}{2}-1\neq 1$

$\frac{x}{2}-\frac{11}{4}>0$

$x-\frac{11}{4}\geq 0$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$

$x-\frac{11}{4}\neq 0$

$x-\frac{11}{4}\neq 1$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1$

$\cancel{x>2}$

$\cancel{x\neq 4}$

$x\neq\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$

$\cancel{x>\frac{11}{4}}$

$x\neq\frac{15}{4}=$

$x\neq\frac{5}{2}$

$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline +156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$

$\cancel{\log_2 x=\log_2 23}$

$\log_2 x = \log_2^{-1} 3$

$\to \log_2 x\cdot\log_2 3=1$

$2\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\cancel{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\cancel{2}\cdot 2\frac{2}{\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{11}{4}\right)}$

$\log_2 x=\log_2^{-1}3$

$\log_2 x$

$\cancel{\frac{1}{\log_2 3}}\ \log_3 2$

$\begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 576 \end{array}$

$\log_f g-\log_h n=0$

$x=2^{\log_3 2}$

$(f-1)(h-1)(g-1)(n-1)(g-h)$

$x=676+160=$

$=836$

$\log_f g-\frac{\log_x n}{\log_x h}=0$

$(2x-1)(4x-11)$

$8x^2-26x-\cancel{8x}+\cancel{11}=16$

$\cancel{\frac{\log_h g}{\log_h f}-\frac{\log_x h}{\log_x h}}$

~~$\log_h g\log_g h-\log$~~

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\geq 0$ $\quad\frac{x}{2}>\frac{1}{4}$ $\quad\cancel{x>\frac{1}{2}}$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1$ $\quad\frac{x}{2}\neq\frac{5}{4}$ $\quad\cancel{x\neq\frac{5}{2}}$

$\frac{x}{2}-1\neq 1$ $\quad\frac{x}{2}\neq 2$ $\quad x\neq 4$

$\frac{x}{2}-1\geq 0$ $\quad\frac{x}{2}>1$ $\quad\cancel{x>2}$

$\begin{cases} x-\frac{11}{4}\neq 1 \\ x-\frac{11}{4}\geq 0 \end{cases}$ $\quad x\neq\frac{15}{4}$ $\quad x>\frac{11}{4}$

Черновик №2

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

39	3
13	13
1	

42	3
14	2
7	7
1	

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$39 = 3 \cdot 13$

$14 = 3 \cdot 2 \cdot 7$

НОД : 3

НОК : $3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 7$

$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 7$

$21 = 3 \cdot 7$

~~У которого числа есть~~ минимум

$a \cdot b \cdot c = 3^{18} \cdot 7^{16}$

a, b, c

$3^1 \quad 7^2$

$3^2 \quad 3^1$

$3^3 \quad 7^3$

3^1

3^3

3^3

18 $3^2 \cdot 7^1$

$3^5 \cdot 7^2$

$3^1 \cdot 7^5$

НОД : $3 \cdot 7$

НОК : $3^5 \cdot 7^5$

$9 \times 4 = 36$

$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$

$3 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \quad 3^2 \cdot 2^2$

36

$15 \times 36 = 540$

$540 \times 17 = 9180$

Чистовик

Лист № 3

б) HO – высота в AOC – р/б

$$HC = \frac{AC}{2}$$

$$OH = \frac{AC \cdot OH}{2 \, tg \angle ABC} = \frac{AC}{4}$$

$$R = \sqrt{\frac{AC^2}{16} + \frac{4AC^2}{16}} = \frac{AC}{4}\sqrt{5}$$

$$S_{APC} = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\angle ABC \cdot AP \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\angle ABC \cdot \frac{5}{3} \cdot AP^2$$

$$S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \cdot \sin(180 - 2\angle ABC) \cdot AP^2$$

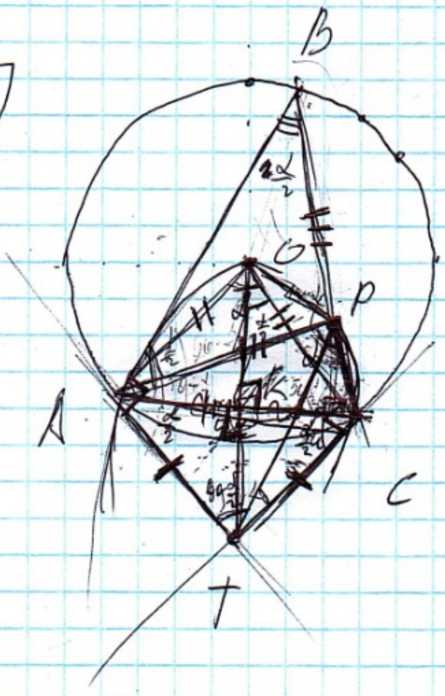
№6

черновик

а) S_{ABC}

$\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{?}{?}$

$AC = ?$



$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 6$

$$\frac{S_{CPK}}{S_{APC}} = \frac{\cancel{PC} \cdot CK}{\cancel{PC} \cdot AC} = \frac{CK}{AC} \Rightarrow$$

$$\frac{CK}{AC} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{CK}{KA} = \frac{3}{5}$$

$AT = TC$

$AO \perp AT$

$CO \perp CT$

$AO = OC$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{PCK}} = \frac{BC \cdot AC}{PC \cdot CK} = \frac{AP}{PC} \cdot \frac{AC}{CK}$$

$\frac{PC}{AP}$

$\frac{S_{APB}}{S} =$

$$\frac{AC}{2 \cdot \sin\alpha} = 2R$$

$$AC = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos\alpha} =$$

$$= R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\alpha}$$

21103240 (U312096 M1303899)

Черновик

Лист №1

№4

$$\begin{cases} НОД = 3\cdot 7 \\ НОК = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$, ~~т.к. $a\cdot b\cdot c = 3^{18}\cdot 7^{16}$~~

~~Т.к. a, b, c состоят только из пр-лей 3 и 7, то~~

Т.к. НОД $= 3\cdot 7$, то у каждого числа есть одна тройка и одна семёрка. ~~Т.к. число сост. только из пр-ей 3 и 7, то одно из них обязательно равно 21, иначе НОД будет другим. Пусть a - наименьшее, c - наибольшее~~

~~$$\begin{cases} a = 3\cdot 7 \\ b = 3\cdot 7\cdot 3^{n}\cdot 7^{m} \\ c = 3\cdot 7\cdot 3^{k}\cdot 7^{p} \end{cases}$$, тогда $|k-n| = 17$, $|m-p| = 15$~~

У каждого числа есть т.к. одна 3 и одна семёрка.

У max степень 3 у числа - 17, 7 - 15

Т.е. у одного числа степень 3 - 1, у другого - 17, у третьего - от 1 до 17

А степень семёрки: у одного - 1, у другого - 15, у третьего - от 1 до 15

Распределить степень тройки можно $3\cdot 2\cdot 17$

Распределить степень семёрки можно $3\cdot 2\cdot 15$

Значит всего таких вариантов:

$$15\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 17 = 9180$$

Ответ: 9180

~~Чистовик~~ Черновик Лист 1

№5

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\cancel{x > \frac{11}{2}}$

$x > \frac{11}{4}$

$x \neq \frac{15}{4}$

$x \neq 4$

① $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$ $x-\frac{\cancel{x}}{4}-\frac{9}{4}$

$\cancel{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\cancel{2}}{\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(x-\frac{11}{4}\right)}$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(x-\frac{11}{4}\right) = 1$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \frac{x}{2}-1^{\log_{x-\frac{11}{4}}\frac{x}{2}-1} = \left(\frac{x}{2}-1\right)^{\left(\log_{\frac{x}{2}-1} x-\frac{11}{4}\right)^{-1}} = \frac{1}{x-\frac{11}{4}}$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{x-\frac{11}{4}}$

$\frac{2x-1}{4} = \frac{4}{4x-11}$

$\cancel{16x^2-45x+11=16}$

$\cancel{16x^2-45x-5=0}$

$8x^2-26x-5=0$

21103240 (U312096 M1303899)