Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103233**

ID профиля: **107098**

Вариант 19

(1) Чистовик

Задача №1

~~С~~ Пусть $a_1 = a,\ a_2 = a+k,\ a_3 = a+2k$ и т.д.

Тогда:

$a_9 = a + 8k \qquad a_{11} = a + 10k \qquad S = 14a + 91k$

$a_{17} = a + 16k \qquad a_{15} = a + 14k$

1) $a_9 \cdot a_{17} > S + 12 \Leftrightarrow (a+8k)(a+16k) > \cancel{S}\ 14a + 91k + 12$

$a^2 + 24ka + 128k^2 > 14a + 91k + 12$

2) $a_{11} \cdot a_{15} < S + 47 \Leftrightarrow (a+10k)(a+14k) < \cancel{S}\ 14a + 91k + 47$

$a^2 + 24ka + 140k^2 < 14a + 91k + 47$

Сложим 1) и 2):

$\cancel{a^2} + \cancel{24ka} + 128k^2 + \cancel{14a} + \cancel{91k} + 47 > \cancel{14a} + \cancel{91k} + 12 + \cancel{a^2} + \cancel{24ka} + 140k^2$

$35 > 12k^2 \overset{(k^2 = <3)}{\Rightarrow} k = 1$

т.к. все члены арифм. пр. целые, k - целое число | т.к. прогрессия возр., k - полож. число

Подставим полученное значение k в 1) и 2)

1) $a^2 + 24a + 128 > 14a + 91 + 12$

$a^2 + 10a + 25 > 0$

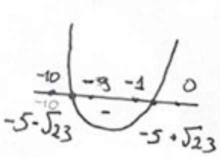
$(a+5)^2 > 0$

$a \neq -5$

2) $a^2 + 24a + 140 < 14a + 91 + 47$

$a^2 + 10a + 2 < 0$

$\left(\begin{array}{l} a^2 + 10a + 2 = 0 \\ D = 100 - 8 = 92 \\ a = \dfrac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} = -5 \pm \sqrt{23} \end{array} \right)$



Т.к. все члены прогрессии целые из 2) подходит решение: $a = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

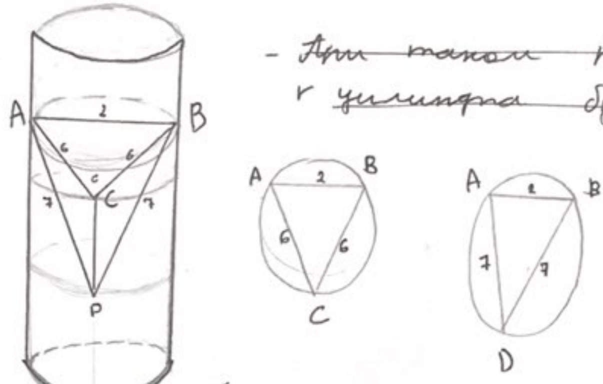
Из 1) мы знаем, что $a \neq -5$

$a_1 = a$

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Задача №2

② Чистовик



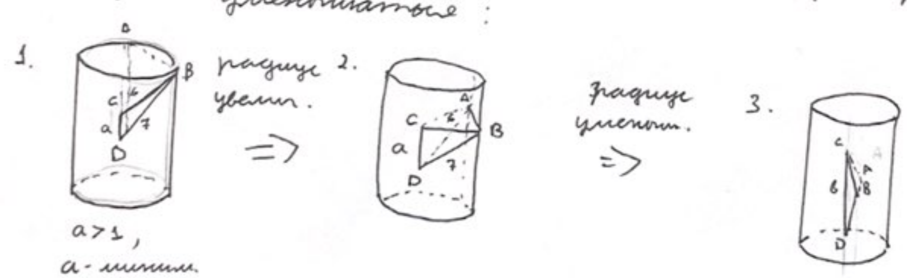
- ~~Для такой расположении r цилиндра будет наименьшим~~

← расположение тетраэдра

Нер-во Δ: (из ΔDCB)

$$\begin{cases} CD + 7 > 6 \\ CD + 6 > 7 \\ 6 + 7 > CD \end{cases} \Rightarrow 13 > CD > 1$$

Чем больше длина CD, тем меньше угол CCB, CD - всегда ∥ оси, значит CB ~~под~~ стремится к тому, чтобы быть ∥ основанию, ~~значит~~ из-за этого радиус цилиндра будет увеличиваться, затем снова уменьшаться:



a > 1,
a - миним. возможное

a < 13,
в - макс. возможное

Ответ: CD может принять значение ~~чуть больше~~ максимально близкое к 1, но больше нее, и максимально близкое к 13, но меньше его.

Задача №3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,\ 25)\end{cases}$$

Т.к. $(x-a)^2+(y-b)\le 25$ - совокупность всех окр-тей с радиусом 5 и центром в т. (a,b) „закрашенных" и не накладывает огр-ний на a и b, то подставив во второе ур-ие вместо a - x, вместо b - y мы получим фигуру, если в каждой т. которой будет центр круга с радиусом 5, то получится искомая фигура M

Подставим

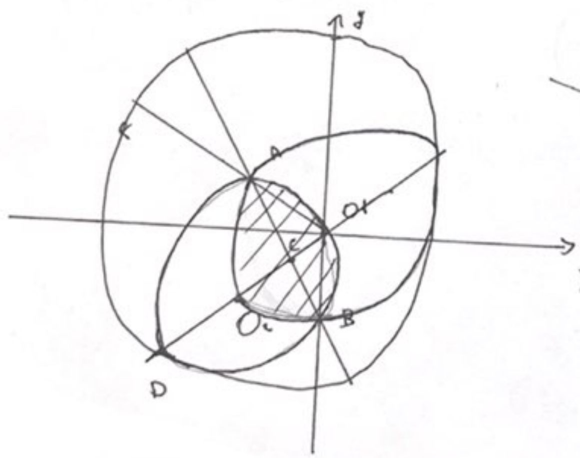
1) $\begin{cases}x^2+y^2\le 25\\ 25\le -8x-6y\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+y^2\le -8x-6y\\ -8x-6y\le 25\end{cases}$ $\Rightarrow$

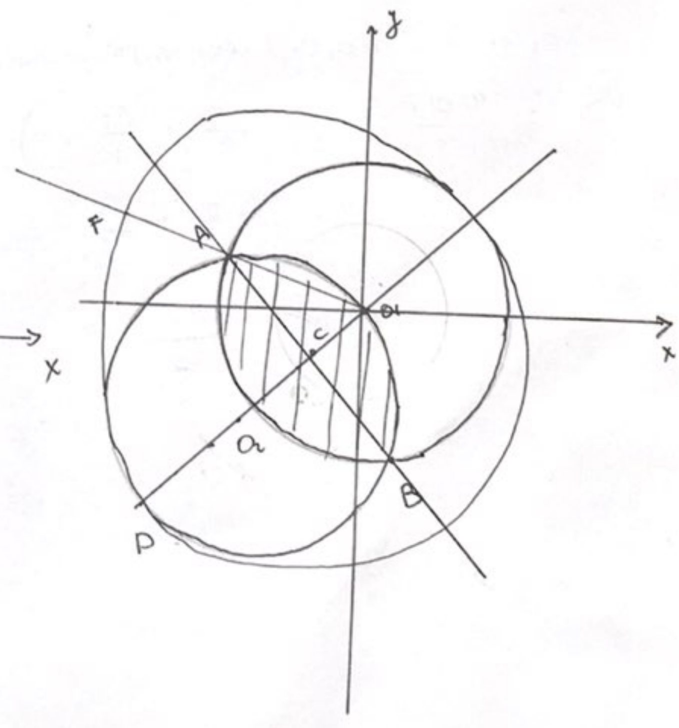
$\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2\le 25 = \omega_1(O_1,5)\\ y\le -\frac{4}{3}x-\frac{25}{6}\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}(x+4)^2+(y+3)^2\le 25 = \omega_2(O_2,5)\\ y\geqslant -\frac{4}{3}x-\frac{25}{6}\end{cases}$

$\omega_1\cap\omega_2$ = т. A, B совпадает в крайних точках $\Rightarrow$

$\Rightarrow -8x-6y=25$

$\Rightarrow (y=-\frac{11}{3}\quad -\frac{25}{6}) = AB$





Чистовик (4)

Закрашенная фигура – всевозможные пары точек (x, y), описав около которых круг с радиусом 5, мы получим ф-ру M. Найдем ее границу. Проводя круг радиусом 5 вдоль $\cup AB$ самые дальние т. от каждой из точек дуги получаются при отдалении на 5 вдоль перпендикуляра и касательной в данной т. дуги. Однако, т.к. данная дуга - часть окр-ти ω_1 (или ω_2), то отходя на 5 вдоль перпендикуляра и касательной, мы получим сектор круга с радиусом 10, ограниченный O_1A и O_1B (O_2A и O_2B соотв.). "Замыкать" не данную ф-ру будет круги с радиусом 5 в т. A и т. B (фигура M обведена ручкой). Она симметрична отн. O_1O_2 и AB, поэтому найдем площадь четверти ф-ры S':

$AO_1 = 5$, $AO_2 = 5$ $\Rightarrow$ $O_1O_2 = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \Rightarrow \angle AO_1O_2 = 60°$

Сектор AFE равен сектору ACO_1 (по дугам) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S' = \underset{\text{сектор}}{S_{O_1FD}} + \frac{1}{2} S_{CO_1O_2}$$

$$S_{O_1FD} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{6}$$

$$S_{CO_1O_2} = S_{AO_1O_2}(\text{сектор}) - S_{AO_1O_2}(\text{тр-к}) = \frac{1}{6}\pi \cdot 25 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 25$$

$$S' = \frac{100\pi}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{25\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 25\right)$$

$$S = 4S' = 4 \cdot \frac{50}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 25 = 75\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $75\pi - \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

$a_1 = a$ $\qquad$ $a_9 = a+8k$ $\qquad$ Чернова

$a_2 = a+k$ $\qquad$ $a_{17} = a+16k$

$a_3 = a+2k$ $\qquad$ $a_{11} = a+10k$

$a_4 = a+3k$ $\qquad$ $a_{15} = a+14k$

$a_5 = a+4k$

$a_6 = a+5k$

$a_7 = a+6k$ $\qquad$ $S_{14} = 14a + 91k$

$a_8 = a+7k$

$a_9 = a+8k$

$a_{10} = a+9k$ $\qquad$ $(a+8k)(a+16k) > 14a+91k+12$

$a_{11} = a+10k$ $\qquad$ $a^2 + 16k\cdot a + 8ka + 128k^2 > 14a+91k+12$

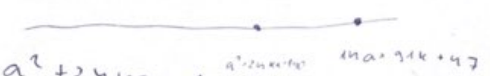
$a_{12} = a+11k$ $\qquad$ $(a+10k)(a+14k) < 14a+91k+47$

$a_{13} = a+12k$

$a_{14} = a+13k$ $\qquad$ $a^2 + 14ka + 10ka + 140k^2 < 14a+91k+47$

$$\begin{cases} a^2+24ka+128k^2 > 14a+91k+12 & (1) \\ a^2+24ka+140k^2 < 14a+91k+47 & (2) \end{cases}$$

(2) - (1):



$14a+91k+47 > a^2+24ka+140k^2$

$12k^2$

$\cancel{a^2}+\cancel{24ka}+128k^2+\cancel{14a}+\cancel{91k}+47 > \cancel{a^2}+\cancel{24ka}+140k^2+\cancel{14a}+\cancel{91k}+12$

$128k^2+47 > 140k^2+12$

$35 > 12k^2$ $\qquad$ ~~k=2~~ $k=1$

$92 = 2\cdot 46 = 4\cdot 23$

$\sqrt{92} = 2\sqrt{23}$ $\qquad$ $91 + 47 = 138$

$a^2+24a+128 > 14a+91+12$ $\qquad$ $a^2+24a+140 < 14a+91+47$

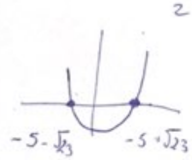
$a^2+24a+128 > 14a+103$ $\qquad$ $a^2+10a+2 < 0$

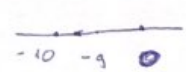
$a^2+10a+25 > 0$ $\qquad$ $D = 100-8 = 92$

$D = 100-100 = 0$ $\qquad$ $a = \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$ $\qquad$ $92 : 4 = 23$

$a = \frac{-10}{2} = -5$

$a \neq -5$ $\qquad$ $\frac{35}{12} =$



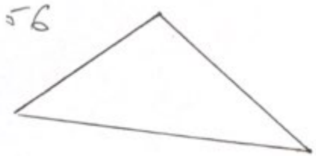


$(a+5)^2 = a^2 +$ $\qquad$ $a <$ $\qquad$ $k^2 < \frac{35}{12}$ $\qquad$ $a \in [-\infty; -10) \cup ((0;$

$k^2 < 3$

Черновик

4 5 6



$\left\{ CD + 7 > 6 \right.$

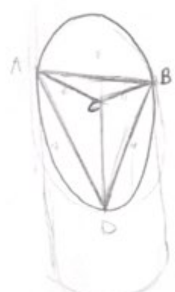
36 + 49 = 85

16 + 25 =

2 6

2 6

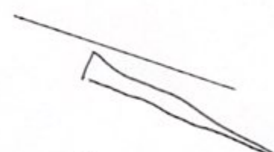
2

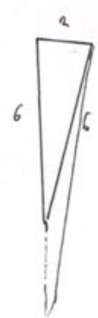


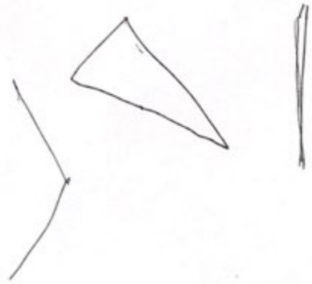
CD > -1

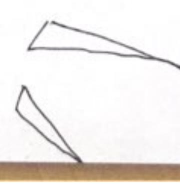
CD > 1

CD < 13









Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103233**

ID профиля: **107098**

Вариант 19

Задача № 4 (1) Чистовик

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 21 = 3\cdot 7 \\ НОК(a;b;c) = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases} \Rightarrow$$ В разложении на простые множители каждого числа a, b и c минимум 1 тройка и 1 7, максимум семнадцать троек и пятнадцать семерок.

Причем иных чисел (кроме 3 и 7) в разложении нет).

Т.к. наибольший общий делитель $(3\cdot 7)$, иных цифр нет, тогда одно из чисел a, b, c должно равняться $3\cdot 7$.

Без ограничения общности, пусть это a $(a = 3\cdot 7)$.

~~Т.к. наименьший общий делитель 21~~

$a = 3^m\cdot 7^n$
$b = 3^k\cdot 7^l$
$c = 3^x\cdot 7^y$

Обозначим степени ~~каждого~~ из 3 и 7 в разложении каждого числа буквами m, n, k, l, x, y - целые, полож.
Одна из степеней ~~должна быть~~ тройки обз. должна быть 1, одна 17; из степеней 7 - одна - 1, другая 15.

Без ограничения общности пусть $m = 1$ $n = 1$
$k = 17$ $l = 15$

Тогда остается рассмотреть все возможные значения для x и y: x - от 1 до 17 включительно. y - от 1 до 15 включительно.

Рассмотрим различные ~~варианты~~ комбинации степеней 3 и 7 для чисел a, b, c

1) $a = 3^1\cdot 7^1$, $b = 3^{17}\cdot 7^{15}$, $c = 3^x\cdot 7^y$ - всего $(17\cdot 15 = 255)$

2) $a = 3^1\cdot 7^{15}$, $b = 3^{17}\cdot 7^1$, $c = 3^x\cdot 7^y$ - всего $(17\cdot 15 = 255)$

3) $a = 3^1\cdot 7^1$, $b = 3^{17}\cdot 7^y$, $c = 3^x\cdot 7^{15}$ (255)

4) $a = 3^1\cdot 7^{15}$, $b = 3^{17}\cdot 7^y$, $c = 3^x\cdot 7^1$ (255)

5) $a = 3^1\cdot 7^y$, $b = 3^{17}\cdot 7^1$, $c = 3^x\cdot 7^{15}$ (255)

6) $a = 3^1\cdot 7^y$, $b = 3^{17}\cdot 7^{15}$, $c = 3^x\cdot 7^1$ (255)

Т.е. различных возможных 5 значений может быть $255\cdot 6$. Но еще нужно учесть, что в каждой тройке мы можем совершить перестановку, например $(a = b,\ b = c,\ c = a)$. Таких перестановок - в каждой ~~паре~~ тройке можно сделать 6.

Значит всего вариантов $255\cdot 6\cdot 6 = 9180$

Ответ: 9180

Задача №5 ③ Чистовик

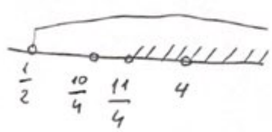
$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \quad ①$$

$$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) \quad ②$$

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \quad ③$$

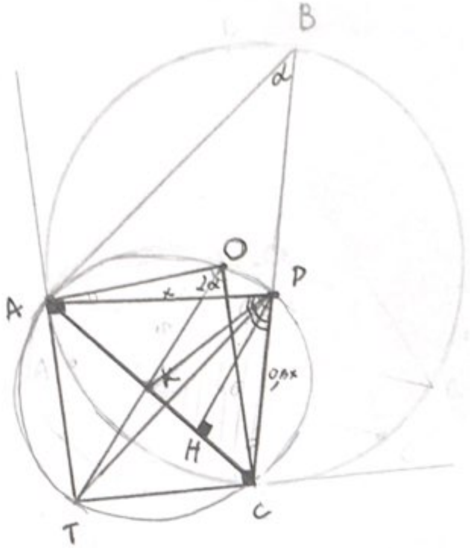
ОДЗ:

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{2}-1\right)^2>0\\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^2\neq 1\\ \sqrt{x-\frac{11}{4}}>0\\ \sqrt{x-\frac{11}{4}}\neq 1\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1\end{cases} \qquad \begin{cases}x\neq 4\\ x>\frac{11}{4}\\ x\neq\frac{15}{4}\\ x>\frac{1}{2}\\ x\neq\frac{5}{2}\end{cases}$$



$$x\in\left(\frac{11}{4};+\infty\right)\setminus\{4\}$$

Задача №6 (2) Чистовик



Пусть ω, опис. около A, O, C называется ω_2

$AO \perp AT$ (т.к. кас.)

$OC \perp TC$ (т.к. кас.)

Пусть $AT \cap \omega_2 = X$

$\angle OAX = 90^\circ \Rightarrow OX$ - диаметр ω_2

Пусть $TC \cap \omega_2 = Y$

$\angle OCY = 90^\circ \Rightarrow OY$ - диаметр ω_2

Но диаметры должны пересекаться в т. центра ω_2. Они имеют общую т. O, значит диаметр OY и OX - совпадают.

Значит и т. X и т. Y - совпадают и на самом деле являются точкой T

$\angle TAC = \frac{1}{2}\cup AC$ (угол м/у. кас. и хорды) $= \angle ABC$ (впис.)

$\angle TPC = \angle TAC$ (опир. на одну дугу TC) $\Rightarrow \angle TPC = \angle ABC$

$\angle ACB$ - общий $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$

Проведем высоту PH к AC

$S_{APK} = AK \cdot PH \cdot \frac{1}{2}$; $S_{CPK} = CK \cdot PH \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{10}{6} \Rightarrow$ коэфф. подобия

$\triangle ABC$ и $\triangle KPC$ $\quad k = \frac{CK}{AC} = \frac{6}{16}$; $S_{ABC} = \frac{S_{CPK}}{k^2} = \frac{6 \cdot 16^2}{36} = \frac{16^2}{6} = 42 \cdot \frac{2}{3}$

б) $\angle AOC = 2\angle ABC$ (AOC - центр, ABC - впис. оба опир. на $\cup AC$)

$\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AT + \frac{1}{2}\cup TC$; $\angle KPC = \frac{1}{2}\cup TC = \angle AOC \Rightarrow \frac{1}{2}\cup AT = \angle ABC = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APK = \angle KPC \Rightarrow PK$ - бис-са $\triangle APC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{10}{6}$, пусть $AP = x \Rightarrow PC = 0{,}6x$

$\frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = 16$ (Т-ма синусов)

$\Rightarrow 0{,}6x^2 \cdot \sin 2\alpha = 32$; $\alpha = \operatorname{arctg} 2$

$0{,}6x^2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 32 \quad 0{,}6x^2 = 32 \cdot \frac{5}{4} = 40 \Rightarrow x^2 = \frac{400}{6} \Rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{6}}$

По теор. синусов: $AC^2 = x^2 + 0{,}36x^2 - 0{,}6x^2 \overset{-\frac{3}{5}}{\cos 2\alpha} = x^2 + 0{,}72x^2 =$

$= \frac{400}{6} + 48 = \frac{688}{6} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{344}{3}}$

Ответ: а) $S_{ABC} = 42\frac{2}{3}$ б) $AC = \sqrt{\frac{344}{3}}$

Черновик

$:7$
$:3$

$a = 7 \cdot 3$
$b =$
$c = 7^{15} \cdot 3^{17}$

$a = 3^{16} \cdot 7$
$b = 7^{15} \cdot 3$
$c = 7^{14} \cdot 3^{17}$

$3 \cdot 7$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 15 \\ \hline 85 \\ +\ 17 \\ \hline 255 \end{array}$$

$\times\ 15$
17

$a = e$
$b = d$
$c = f$

ae bd cf

ae bf cd

ad be cf

ad bf ce

af bd ce

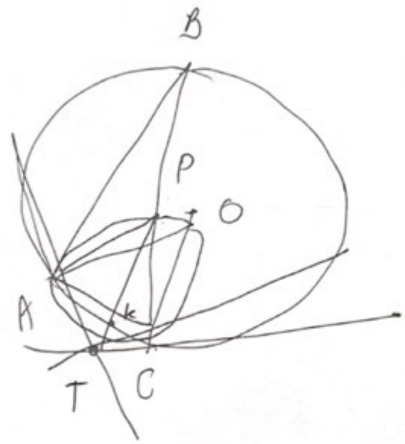
af be cd

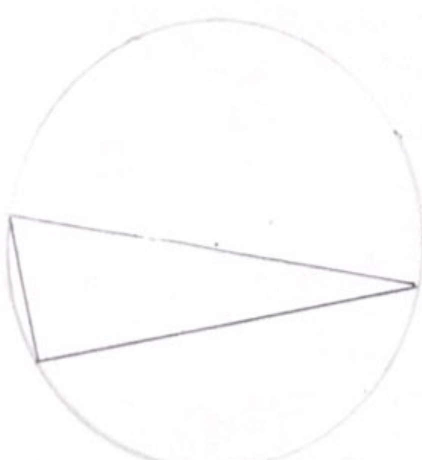
$$\begin{array}{r} 255 \\ \times\ 36 \\ \hline 1530 \\ +\ 765 \\ \hline 9180 \end{array}$$

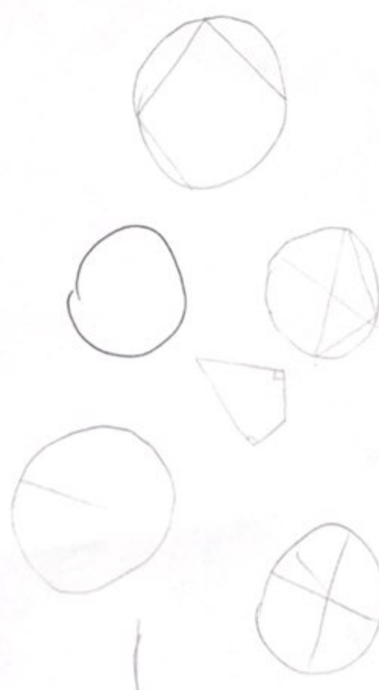
$$\begin{array}{r} 255 \\ \times\ 36 \\ \hline 1530 \\ +\ 765 \\ \hline 9180 \end{array}$$

~~abc~~
~~acb~~
~~bca~~
~~bac~~

Черновик







~~Вариант №~~

~~Чистовик~~

Черновик

$\frac{x}{2} - 1 > 0$

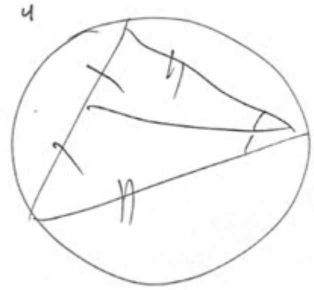
log

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\frac{x}{2} > \frac{1}{4}$

$\log_{\frac{x^2}{4}-x+1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}$

$x > \frac{1}{2}$



$\frac{x}{2} \cdot \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \neq 1$

$\frac{x}{2} \neq \frac{5}{4}$

$x \neq \frac{5}{2}$

$x \cdot$