Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

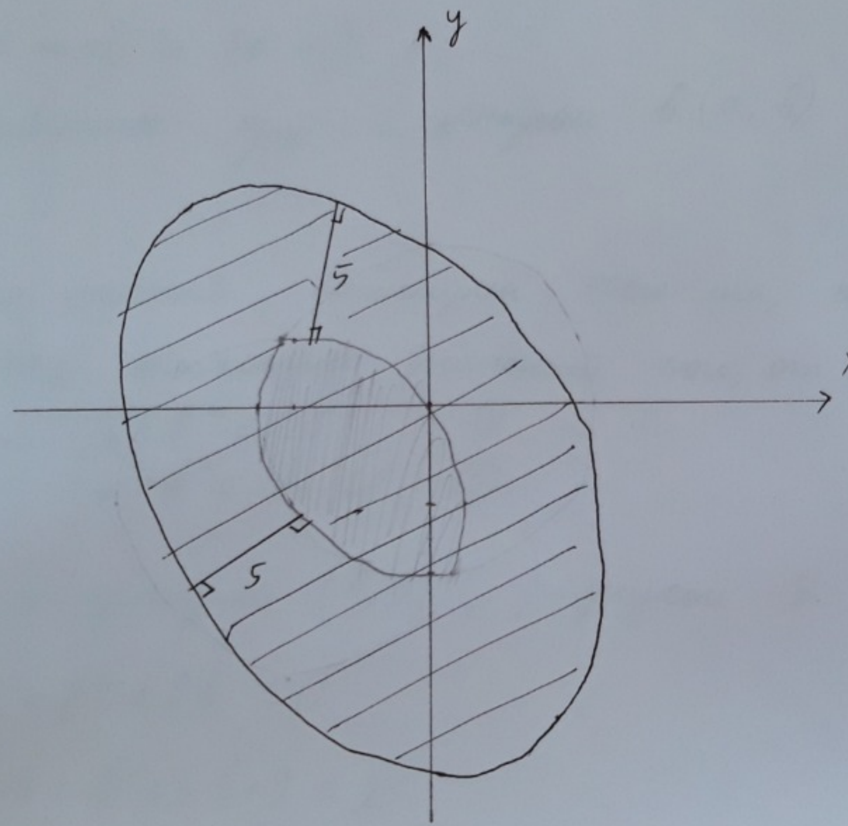
Шифр: **21103219**

ID профиля: **852779**

Вариант 19

Чистовик (4)

Фигура M:



Чистовик ③

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$

первое неравенство – круг с центром в $(a; b)$ и радиусом 5.

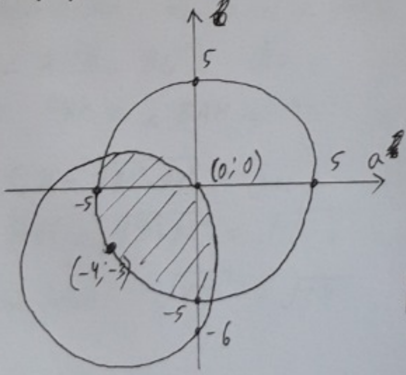
Если число меньше минимума чего-то, то оно меньше всех остальных значений того, от чего берётся минимум. $\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 25 & ① \\ a^2+b^2 \le -8a-6b & ② \end{cases}$

① – круг с центром $(0;0)$, радиусом 5.

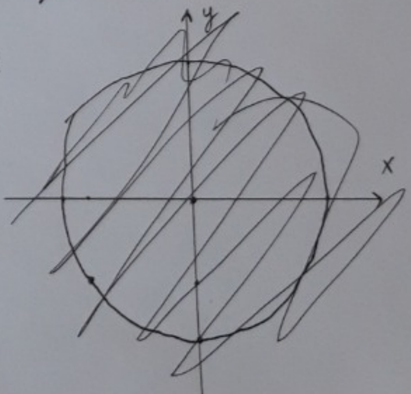
② $a^2+8a+b^2+6b \le 0$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9 \le 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$ – круг с центром $(-4;-3)$ и радиусом 5.

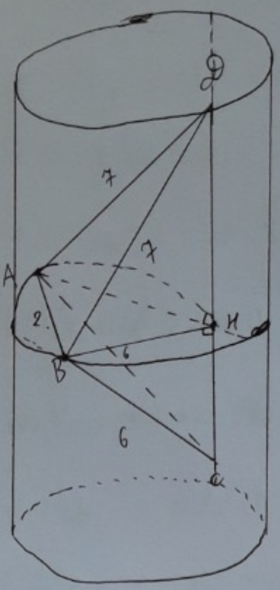


Закрашенная область – место, где могут находиться ~~радиусы~~ центры окружностей из первого неравенства.



Чистовик (2)

2



$\triangle ADC = \triangle BDC$ по 3-м сторонам ($BC = AC$, $BD = AD$, CD – общая). Значит, все элементы в этих тр-ках равны.

Проведём высоту BH в $\triangle BCD$.

Т.к. $\triangle BCD = \triangle ACD$, то высота из A в $\triangle ACD$ тоже попадёт в (·)H.

$BH \perp CD$ и $AH \perp CD \Rightarrow ABH \perp CD$.

Т.к. CD – параллельно оси цилиндра, то ABH – ~~...~~ перпендикулярно ей.

Значит $ABH \parallel$ основанию цилиндра.

Значит основание цилиндра – ~~это~~ равно окружности, описанной около $\triangle ABH$.

По теореме синусов в $\triangle ABH$: $\frac{AB}{\sin AHB} = 2R$.

$R = \frac{1}{\sin\angle AHB}$ – наименьший. $\Rightarrow \frac{1}{\sin\angle AHB}$ – минимальная величина $\Rightarrow \sin\angle AHB$ – максимальный. $\Rightarrow \sin\angle AHB = 1$

$\angle AHB = 90^\circ$. Т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$, то $AH = BH \Rightarrow$ $\angle ABH = \angle BAH = 45^\circ$. $\Rightarrow AH = BH = \sqrt{2}$.

$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

$DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$ $\Rightarrow CD = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{34}$.

Чистовик

1

Пусть d - разность прогрессии. Тогда $a_n = a_1 + (n-1)d$.

$a_9 \cdot a_{17} = (a_1 + 8d)(a_1 + 16d)$. $\quad a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10d)(a_1 + 14d)$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{14} = S \Rightarrow \dfrac{(a_1 + a_{14}) \cdot 14}{2} = S \Rightarrow (2a_1 + 13d) \cdot 7 = S$.

$$\begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12 & (1) \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47 & (2) \end{cases}$$

(1) $a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

$a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 - 14a_1 - 91d > 12$

$a_1^2 + 24a_1d - 14a_1 - 91d > 12 - 128d^2$

(2) $a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$

$a_1^2 + 24a_1d - 14a_1 - 91d < 47 - 140d^2$

$\Downarrow$

$47 - 140d^2 > a_1^2 + 24a_1d - 14a_1 - 91d > 12 - 128d^2$

$\Downarrow$

$47 - 140d^2 > 12 - 128d^2 \Rightarrow 12d^2 < 35$; $d^2 < \frac{35}{12}$. Так как последовательность состоит из целых чисел, и при этом возрастает, то $d \in \mathbb{Z}$ и $d > 0$. $\Rightarrow$ d - натуральное.

$d < \sqrt{\frac{35}{12}}$; $\frac{35}{12} < 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{35}{12}} < 2$. Единственное натуральное число < 2 - это $1 \Rightarrow d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0;\ a_1 \neq -5 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47 \Rightarrow a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0;\ a_1 = -5 \pm \sqrt{25-2} \end{cases}$$

$-5 - \sqrt{23} < -9$, т.к. $23 > 4^2$, $-5 - \sqrt{23} > -10$, т.к. $23 < 5^2$

$-5 + \sqrt{23} \in (-1; 0) \Rightarrow a_1 \in (-5 - \sqrt{23}; -5) \cup (-5; -5 + \sqrt{23})$

Ответ: $-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$.

Черновик

2

$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$; $(a_1+5)^2 > 0$; $a_1 \neq 5$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

$a_1^2 + 10a_1 - 138 < 0$; $a_{1,0} = -5 \pm \sqrt{25+138} = -5 \pm \sqrt{163} \approx -5 \pm 12 =$

$= -17; 7$

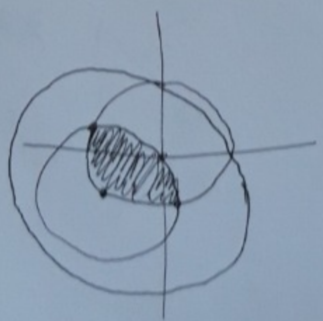
~~$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2b$~~ $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 \leq 25$

$a^2 + b^2 \leq 25 + 2ax + 2by - x^2 - y^2$

$a^2 + b^2 \leq \min(-8a, -6b, 25)$

$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 25 \\ a^2 + b^2 \leq -8a - 6b \end{cases}$; $a^2 + 8a + 16 + b^2 + 6a + 9 \leq 25$

$\begin{cases} a^2 + b^2 \leq 25 \\ (a+4)^2 + (b+3)^2 \leq 25 \end{cases}$



Черновик

1

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{14} = S$; $\frac{(a_1 + a_{14}) \cdot 14}{2} = (2a_1 + 13d) \cdot 7 = 14a_1 + 91d = S$

$a_9 \cdot a_{17} > S + 12 \Rightarrow (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12$

$a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

$a_1^2 + 24a_1 d + \cancel{128d^2} - 14a_1 - 91d > 12 - 128d^2$

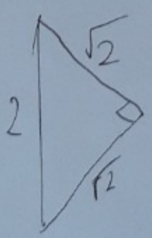
$a_{11} \cdot a_{15} < S + 47 \Rightarrow (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$

$a_1^2 + 24a_1 d - 14a_1 - 91d < 47 - 140d^2$

$47 - 140d^2 > 12 - 128d^2$; $12d^2 < 35$; $d^2 < \frac{35}{12}$; $d = 1$

2) $\cancel{3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}$



$\sqrt{47} + \sqrt{34}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103219**

ID профиля: **852779**

Вариант 19

Черновик 3

$$\log_{a^2} b \cdot \log_{\sqrt{c}} a \cdot \log_b c^2 = \log_a c \cdot \log_{\sqrt{c}} a = \log_a c \cdot \log_c a^2 =$$

$$= \log_a a^2 = 2$$

Черновик

$x > \frac{11}{4},\ x \neq 4;\ \frac{15}{4};$ ②

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\frac{\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2}{\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)} = 1$; $\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(\left(x-\frac{11}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{2}-1\right)^2\right) = 1$

$\log_{(x-\frac{11}{4})^2}\left(\left(\frac{x}{2}-1\right)^4\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right) = 1$

$x-\frac{11}{4} = \pm\frac{x}{2} \mp \frac{1}{4}$

$x = 5;\ 2$

$\frac{x}{2}-1 = x-\frac{11}{4}$; $x = \frac{7}{2} = 3,5$

$\frac{x}{2}-1 = a,\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} = b,\ x-\frac{11}{4} = c$

$\log_{a^2} b,\ \log_{\sqrt{c}} a,\ \log_b c^2$

$x = \log_{a^2} b$, $y = \log_{\sqrt{c}} a = \log_c a^2$, $z = \log_b c^2$

$\begin{cases} x=y \\ y=z \\ z=x \end{cases}$

$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 5 \\ \hline 85 \\ 170 \\ \times\ 255 \\ 36 \\ \hline 1530 \\ 765 \\ \hline 9180 \end{array}$$

$xy = \log_c a^2 \cdot \log_{a^2} b = \log_c b = 2\log_{c^2} b = \frac{2}{z}$

$xyz = 2$

при $a^2 = b$: $c = b+1$

$x-\frac{11}{4} = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}+1$

$\frac{x}{2} = \frac{14}{4}$; $x = 7$ $\varnothing$

$\left[\begin{array}{l} a^2 = b \\ a^2 = c \\ b = c^2 \end{array}\right.$

21103219 (U852779 M1299120)

Черновик

4) $a = 21 \cdot k_a$ ①

$b = 21 \cdot k_b$

$c = 21 \cdot k_c$

$НОД(k_a, k_b, k_c) = 1$

$НОК(k_a, k_b, k_c) = 3^{16} \cdot 7^{14}$

одно из чисел: $3^{16} \cdot 7^{m}$

другое: $7^{14} \cdot 3^{n}$

третье - $3^{k} \cdot 7^{q}$

$(15 \cdot 17)^2 - 1 -$

$\times\, 17$, 15, 170, 85, 255

$\times\, 16$, 14, 64, 16, 224

$\times\, 224$, 255, 1220, 1220, 448, 58220

$(17 \cdot 15)^3 - 16^3 \cdot 14^3 = (255-224)(255^2 + 224 \cdot 255 + 224^2) =$

$= 31 \cdot (479^2 - 224 \cdot 255) = 5.307.851$

$\times\, 479$, 479, 4311, 3353, 1916, 229441

$-\,229441$, 58220

$\times\, 171221$, 31, 171221, 513663, 5307851

$b = c + 1$

$x - \frac{11}{4} + 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$\frac{x}{2} = \frac{3}{2}$, $x = 3$.

21103219 (U852779 M1299120)

Чистовик (2)

Найдём значение $\log_k m \cdot \log_m n = \log_k m \cdot \frac{\log_k n}{\log_k m} = \log_k n \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_k m \cdot \log_m n = \log_k n$. Пусть $\frac{x}{2} - 1 = a$; $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = b$; $x - \frac{11}{4} = c$.

перемножим данные в условии числа:

$\log_{a^2} b \cdot \log_{\sqrt{c}} a \cdot \log_b c^2 = \log_{a^2} c^2 \cdot \log_{\sqrt{c}} a$, (применяя формулу выше). Так как $\log_m n = \log_{m^k}(n^k)$, то

$\log_{a^2} c^2 \cdot \log_{\sqrt{c}} a = \log_a c \cdot \log_c a^2 = \log_a a^2 = 2$.

Произведение всех чисел из условия дало 2. $\Rightarrow$ 2 из чисел равны 1, а одно равно 2. Пусть 2-е число $= 2$. $\log_{\sqrt{c}} a = 2 \Rightarrow a = c \Rightarrow \frac{x}{2} - 1 = x - \frac{11}{4} \Rightarrow$

$\frac{x}{2} = \frac{7}{4}$; $x = \frac{7}{2}$. Проверим ост. слагаемые: $\log_{a^2} b = \log_{\left(\frac{7}{4} - 1\right)^2}\left(\frac{7}{4} - \frac{1}{4}\right) =$

$= \log_{\frac{9}{16}} 2 \neq 1$. $\varnothing$

Пусть 3-е слаг. равно 2: $\log_b c^2 = 2 \Rightarrow x - \frac{11}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$\frac{x}{2} = \frac{10}{4} \Rightarrow x = 5$. Проверим: $\log_{\sqrt{5 - \frac{11}{4}}}\left(\frac{5}{2} - 1\right) = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} = 1$.

$\log_{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{9}{4}\right) = 1$ ✓

пусть 1-е равно 2, 2-е и 3-е равны 1: если 2-е равно 1, то получаем случай выше $\Rightarrow$ 1-е равно 1.

Ответ: $x = 5$

Чистовик (1)

4. $\begin{cases} НОД(a, b, c) = 21 \\ НОК(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$

Каждое из чисел a, b, c кратно 21, т.к. их НОД: 21. Заменим: $a = 21 \cdot k_a$, $b = 21 \cdot k_b$, $c = 21 \cdot k_c$, где k_a, k_b и k_c – натуральные числа. Получим:

$НОД(a, b, c) = 21 \Rightarrow НОД(k_a, k_b, k_c) = 1.$

$НОК(a, b, c) = 7^{15} \cdot 3^{17} \Rightarrow НОК(k_a, k_b, k_c) = 7^{14} \cdot 3^{16}$

Всего чисел вида $3^n \cdot 7^m$, где m и n – ~~натуральные~~ целые такие, что $n \in [0; 16]$, $m \in [0; 14]$: $17 \cdot 15$. Значит на каждое из чисел k_a, k_b, k_c – приходится по $17 \cdot 15$ вариантов. Всего: $(17 \cdot 15)^3$. Нам нужно, чтобы была хотя бы одна 16-я степень при 3 и 14-я степень при 7, чтобы НОК был $7^{14} \cdot 3^{16}$. Так же нужно, чтобы была хотя бы одна степень 0 при 3 и при 7, чтобы НОД = 1. Посчитаем кол-во вариантов, когда k_a имеет степень 16 при 3, а k_b – степень 0 при 3, а ~~затем~~ третье – любую. Затем умножим это число на 3!, т.к. тройки упорядоченные. $\Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot 17 \cdot 3! = 17 \cdot 6.$ То же самое для 7: $1 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 3! = 15 \cdot 6$. Всего таких троек: $17 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 6 = 9180$

Ответ: 9180