Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103214**

ID профиля: **361497**

Вариант 19

Чистовик 1.

№1.

$$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S + 12 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 47 \end{cases} \quad (*)$$

$a_i = a_1 + (i-1)d$, где d – разность ($d>0$ из усл.)

$$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > S+12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+47 \end{cases}$$

$$-\begin{cases} a_1^2 + 24d + 128d^2 > S+12 \\ a_1^2 + 24d + 140d^2 < S+47 \end{cases} \quad (1)$$

$$-12d^2 > -35$$

$d^2 < \frac{35}{12} \Rightarrow d < \sqrt{\frac{35}{12}} < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow d$ может быть равно только 1.

~~$(a_1+8)(a$~~ $\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 152 > S+12 \\ a_1^2 + 164 < S+47 \end{cases}$ из (1)

$S = \frac{a_1 + (a_1+13)}{2} \cdot 14 = 14a_1 + 91$ подставим

$$\begin{cases} a_1^2 - 14a_1 + 48 > 0 & (2) \\ a_1^2 - 14a_1 + 26 < 0 & (3) \end{cases}$$

(2): нули функции слева

$\frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{1} \Rightarrow 6$ и 8 $\Rightarrow a_1 \in (-\infty; 6) \cup (8; +\infty)$

(3): — " —

$\frac{7 \pm \sqrt{49-26}}{1} \Rightarrow$ с учётом $a_1 \in \mathbb{Z}$ $a_1 \in [3; 11]$

Значит, $a_1 \in \{3, 4, 5, 9, 10, 11\}$.

Для всех ~~~~ прогрессий с такими a_1 и $d = 1$ выполняются условия (*).

Ответ: 3, 4, 5, 9, 10, 11.

21103214 (U361497 M1295873)

Чистовик 2.

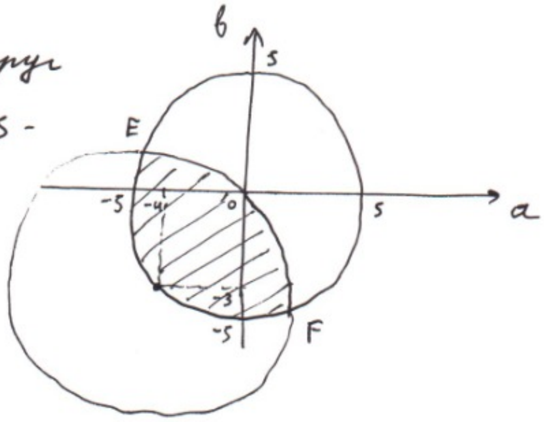
№ 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2\le 25 \\ a^2+b^2\le 25 \\ a^2+b^2\le -8a-6b \end{cases}$$ Эта система равносильна исходной.

Посмотрим какие значения могут принимать a и b:

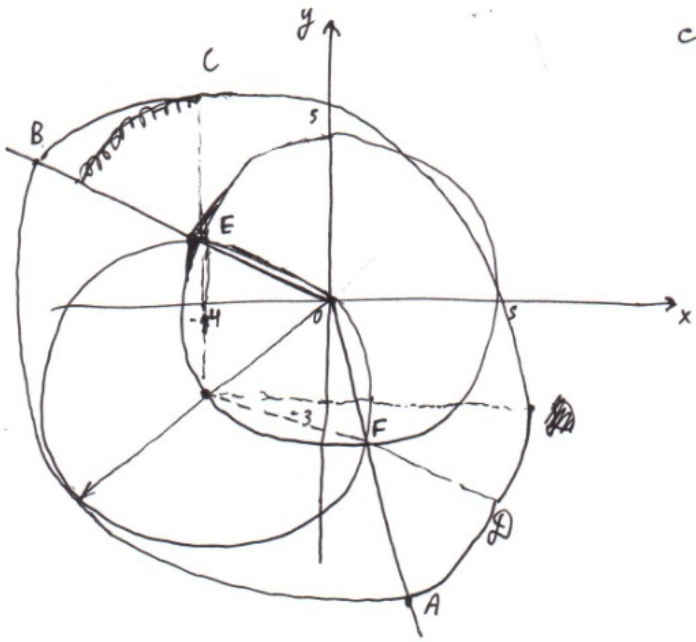
$$\begin{cases} a^2+b^2\le 25 & \text{— круг} \\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25 & \text{—} \end{cases}$$

— круг с центром на окр. $a^2+b^2=25$



$(x-a)^2+(y-b)^2\le 25$ — круг с центром $(a;b)$, радиусом 5.

Значит, система задаёт на Oxy объединение всех таких кругов, центры которых лежат на области возможных значений a и b.



Это объединение представляет собой ~~[illegible]~~ часть ~~[illegible]~~ круга с центром $(0;0)$, радиусом $5+5=10$, ~~[illegible]~~ содержащий ~~[illegible]~~ дугу AB, + часть круга с центром $(-4;-3)$, радиусом 10, содержащий дугу CD + круги ~~[illegible]~~ с центрами в E, F, радиусами 5. (окружности, их ограничивающие проходят через B, C и A, D соот-но).

Найдём коор-ты точек E и F:

$$-\begin{array}{r} (a+4)^2+(b+3)^2=25 \\ a^2+b^2=25 \\ \hline 8a+6b=-25 \end{array}$$

$$a=\frac{-25-6b}{8} \Rightarrow b^2+\left(\frac{-25-6b}{8}\right)^2=25$$

$$64b^2+36b^2+625+300b=1600$$

$$100b^2+300b-975=0$$

$$4b^2+12b-39=0$$

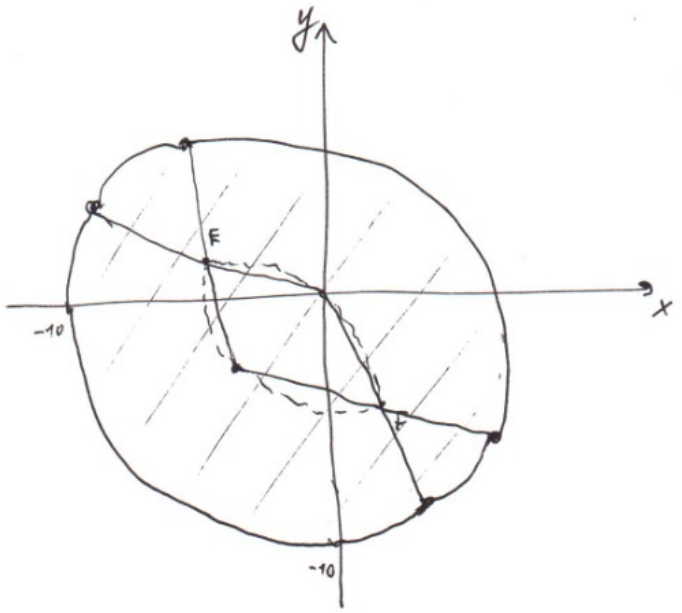
$$b=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{12} \Rightarrow \left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{3};\ -\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\right) - F$$

21103214 (U361497 M1295873)

Чистовик 3.

№3.

$\left(-2-\frac{3}{2}\sqrt{3};\ -\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)$ – E

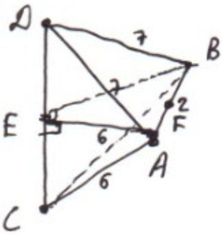


осталось посчитать
эту площадь
но я не успел :(

21103214 (U361497 M1295873)

Чистовик 4.

№2.

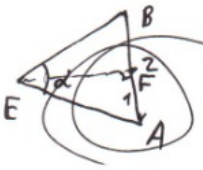


$CD \parallel$ оси цилиндра и $ABCD$ вписан в цилиндр $\Rightarrow$ CD лежит на бок. пов-ти цилиндра.

Проведём $AE \perp CD$ $(E \in CD)$

$\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ - равнобедренные $\Rightarrow$ DF_1 и CF_2 - высоты к AB являются медианами AB $\Rightarrow$ F_1 совпадает с F_2 (обозн. F). $\Rightarrow$

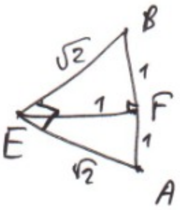
$\Rightarrow AB \perp (DCF) \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow (ABE) \perp CD \Rightarrow BE \perp CD$.



$2R = \frac{2}{\sin\alpha}$ по т. синусов, где R - радиус цилиндра.

$EA = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$CD = CE + ED = \sqrt{36 - \left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2} + \sqrt{49 - \left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2}$



диаметр цилиндра $\geq AB = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_{цилиндра} \geq 1 \Rightarrow R_{min} = 1$, когда равнобедренный $\triangle EBA$ - прямоугольный, т.е. когда $EA = EB = \sqrt{2}$

В этом случае

$CD = CE + ED = \sqrt{36 - EA^2} + \sqrt{49 - EA^2} =$

$= \sqrt{36-2} + \sqrt{49-2} = \sqrt{34} + \sqrt{47}$

Но мы рассмотрели только случай, когда E лежит на отрезке CD.

Еще возможен случай, когда C лежит на отрезке ED.

тогда, рассуждая аналогично, получим:

$CD = ED - CE = \sqrt{49-2} - \sqrt{36-2} = \sqrt{47} - \sqrt{34}$.

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{34}$ и $\sqrt{47} - \sqrt{34}$.

21103214 (U361497 M1295873)

~~$a_1 + a_2 +$~~ $d > 0 \quad a_i \in \mathbb{Z}$

$a_1 + \ldots + a_{14} = S$

$a_9 a_{17} > S + 12$

$a_{11} a_{15} < S + 47$

$a_1 - ?$

$d \; 2d, \ldots 13d$

$\frac{1+13}{2} \cdot 13$ $\quad 7 \quad 91$

$14 a_1 + 91 d = S$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > S + 12$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 47$

$\frac{a_9 + a_{17}}{A} \geq 2\sqrt{a_9 a_{17}} > 2\sqrt{S + 12}$

$a_9 + a_{17} = a_{11} + a_{15}$

$a_{11} + a_{15}$

$a_1 = 1 \quad d = 1$

$\frac{1+14}{2} \cdot 14 \quad 8$

$S = 105$

$9 \cdot 17 = 153 > 105 + 12$

$a_1^2 + 24d + 128d^2 > S + 12$

$- \; a_1^2 + 24d + 140d^2 < S + 47$

$-12d^2 > -35$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12}$

$\frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 4} \quad \frac{35}{12} < 3 \quad 1$

$d^2 < \sqrt{\frac{35}{12}} < 2$

~~1 2~~

1 2

7^2

~~47~~

$a_1 + 1$ $\quad (a_1 + 8)(a_1$

$a_1 + a \quad 23$

$\frac{2a_1 + 13}{2} \cdot 14$

$a_1 + 1$

152

$24 + 128$

$a_1 +$

$S - 117 > a_1^2 > S - 140$

2

a

$a_1 = 3$

$164 - 47 = 117$

~~a_1+~~ $7 \cdot 13$

$(a_1 + 8)(a_1 + 16) > S$

$\frac{6+13}{2} \cdot 14$

$a_1^2 < S - 117$

$14a_1 + 91$

$S = 19 \cdot 7 = 133$

$a_1^2 < 14a_1 - 26$ $\quad 8 \text{ и } 6$

~~19~~

$a_1^2 - 14a_1 + 26 < 0$

9

$\frac{D}{4} = 49 - 26 = 23$

$11 \cdot 19 > 145$

~~47~~

$a_1 = \frac{7 \pm \sqrt{23}}{1}$

$13 \cdot 17 > 180$

$4+$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 13 \\ \hline 51 \\ 17 \\ \hline 221 \end{array}$

$a_1^2 > 14a_1 - 49$

$\sqrt{23} < 5$ $\quad 114$

$a_1^2 - 14a_1 + 49 > 0$

$3 \ldots 11$ $\quad \begin{array}{r} 164 \\ -47 \\ \hline 117 \\ -91 \end{array}$

$(a_1 - 7)^2 > 0$

$\{3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11\}$

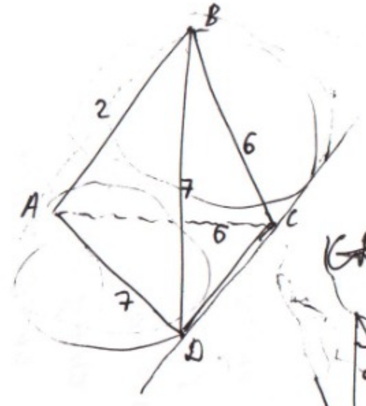
$a_1 \neq 7 \quad \begin{array}{r} 73 \\ -47 \\ \hline 26 \end{array}$

$a_1 \neq 0$

21103214 (U361497 M1295873)

$164 - 47 - 91$

$17 + 9$



36

$\frac{1}{x} = \sin\frac{\alpha}{2}$

$CD = \sqrt{49 - 2R(R+\sqrt{R^2-1})} + \sqrt{36 - 2R(R+\sqrt{R^2-1})}$

$4R(R+\sqrt{R^2-1}) = 13$

$R^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{R^2}}\right)$

$2R^2 \geq R^2 + R\sqrt{R^2-1}$

$R(CD)_{min}$

$R(x)$

$-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$-2 + \frac{3}{4}\sqrt{12}$

$\frac{8}{-16 + 6\sqrt{12}}$

$\frac{8}{-25 - 6\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{12}\right)}$

$\frac{1}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{R^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{R^2}}}$

$1+\sqrt{1-\frac{1}{R^2}}$

$\frac{49-36}{2} = \frac{13}{2}$

$R = \frac{1}{\sin\alpha}$

$1 - 1 + \frac{1}{R^2}$

$R \sim \frac{1}{\sin\alpha}$

$2R = \frac{1}{\sin\alpha}$

$1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos\alpha$

$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 25$

$a^2 + b^2 \leq \min(-8a - 6b, 25)$

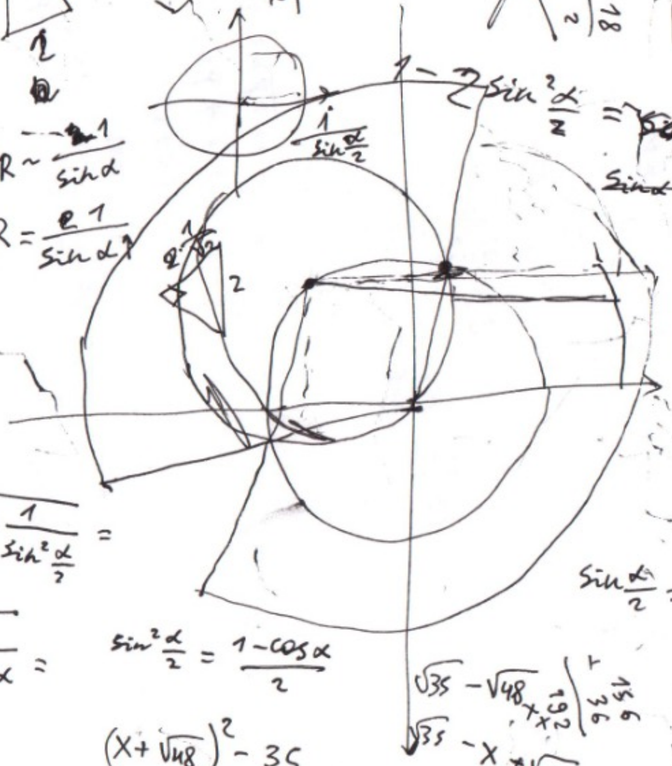
$a^2 + b^2 \leq 25$

$a^2 + b^2 \leq -8a - 6b$

$(a+4)^2 + (b+3)^2 \leq 5^2$

$(b+3)^2 = 5^2$

$\frac{2R}{2} \geq \sqrt{(R-1)(R+1)}$



$\frac{xh}{2} = \sqrt{\ }$

$CD = \sqrt{49 - \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} + \sqrt{36 - \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} =$

$= \sqrt{49 - \frac{2}{1-\cos\alpha}} + \sqrt{36 - \frac{2}{1-\cos\alpha}} =$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{x}$

$(x+\sqrt{48})^2 - 35$

$\sqrt{35} - \sqrt{48} + x$

$\sqrt{35} - x + \sqrt{48}$

$\frac{-6 \pm \sqrt{36 + 39\cdot 4}}{4}$

$\frac{-6 \pm 4\sqrt{12}}{4}$

$\frac{-3 \pm 2\sqrt{12}}{2}$

$4\sqrt{12}$

192

$8a + 6b + 25 = 0$

$a = \frac{25 + 6b}{8}$

$36 + 49 - 2t + 2\sqrt{(36-t)(49-t)} = CD^2$

$\sqrt{48}$

$\sqrt{35}$

$\frac{x + \sqrt{48} + \sqrt{35}}{2}$

$\frac{1}{4}\sqrt{\ }$

$2\cdot 25\cdot 6$

$12\cdot 25$

$25\cdot 64$

1600

975

20

60

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103214**

ID профиля: **361497**

Вариант 19

№4. Чистовик 1.

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 21 \\ НОК(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases} \quad (1)$$

$a = 21 \cdot a_1$
$b = 21 \cdot b_1$, где a_1, b_1, c_1 – взаимно простые, т.к. (1)
$c = 21 c_1$

$\Rightarrow НОК(a,b,c) = 21 \cdot a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 3^{17} \cdot 7^{15}$

$$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 3^{16} \cdot 7^{14}$$

a_1, b_1, c_1 - вз. простые $\Rightarrow$ ~~без ограничения общности считаем, что~~ ~~$a_1 = 3^{16}$, $b_1 = 7^{14}$, $c_1 = 1$~~

1) среди a_1, b_1, c_1 в любом порядке могут быть числа 3^{16}, 7^{14}, 1. Получаем 6 троек (a, b, c).

2) среди a_1, b_1, c_1 в любом порядке могут быть числа $3^{16} \cdot 7^{14}$, 1, 1. Получаем 3 тройки (a, b, c).

Итого 9 троек (a, b, c).

Ответ: 9.

№5. Чистовик 2.

$a = \frac{x}{2} - 1$; $b = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$; $c = \sqrt{x - \frac{11}{4}}$

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \log_{a^2} b$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2} - 1\right) = \log_c a$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 = \log_b c^4$

ОДЗ для x: $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 2;\ x \neq 0;\ x \neq 4 \\ x \neq \frac{5}{2};\ x \neq \frac{11}{4};\ x \neq \frac{15}{4} \\ x > 2;\ x \geq \frac{11}{4} \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x > \frac{11}{4} \\ x \neq 4;\ x \neq \frac{15}{4} \end{cases}$

1) ~~$\begin{cases} \log_{a^2} b = \log_c a \\ \log_b c^4 = \log_c a + 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\log_a b}{2\log_a c} = 1 \Rightarrow \log_c b = 2 \Rightarrow b = c^2$~~

~~$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x - \frac{11}{4}$~~

~~$x = 5$~~

Заметим, что произведение логарифмов равно

$\frac{1}{2}\log_a b \cdot \log_b c \cdot 4 \cdot \log_c a = 2\log_a c \cdot \log_c a = 2$

Пусть 2 каких-либо log равны y $\Rightarrow$ третий равен $(y+1)$ (из усл.)

Тогда

$y \cdot y \cdot (y+1) = 2$

$y^3 + y^2 - 2 = 0$

$(y-1)\left((y+1)^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 1$

Рассмотрим 3 случая:

1) ~~первые 2 log равны:~~

$\begin{cases} \log_{a^2} b = \log_c a = 1 \\ \log_b c^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \\ \sqrt{x - \frac{11}{4}} = \frac{x}{2} - 1 \\ \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow x = 5$ или $x = 1$ (не удовлетворяет ОДЗ). Подставим $x=5$ во 2 и 3 ур-я:

$\sqrt{5 - \frac{11}{4}} = \frac{5}{2} - 1$ верно

$\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(5 - \frac{11}{4}\right)^2$ верно $\Rightarrow x = 5$ подходит.

2) $\begin{cases} \log_{a^2} b = \log_b c^4 = 1 \\ \log_c a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow x = 5 \text{ или } x = 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 \\ x - \frac{11}{4} = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

3) $\begin{cases} \log_c a = \log_b c^4 = 1 \\ \log_{a^2} b = 2 \end{cases}$

Чистовик 3.

№5.

$$\begin{cases} \sqrt{x-\frac{11}{4}} = \frac{x}{2}-1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^4 = \frac{x}{2}-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow x-\frac{11}{4} = \frac{x^2}{4} - x + 1 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 5$ или $x = 3$

подставим 5 и 3 в 3 ур-е:

$\left(\frac{5}{2}-1\right)^4 = \frac{5}{2}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{9}{4}$ неверно

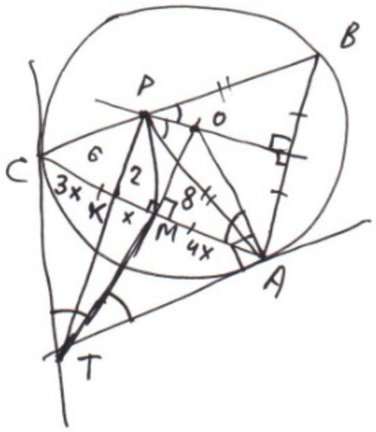
$\left(\frac{3}{2}-1\right)^4 = \frac{3}{2}-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{4}$ неверно $\Rightarrow$ нет решений.

Ответ: 5.

21103214 (U361497 M1295874)

Чистовик 4.

№ 6.



Проведём OT

$OT \perp AC$ и делит пополам

$\Rightarrow$ если $KM = x$, где

$M = OT \cap AC$, то

$\frac{CK}{KA} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$CM = MA$

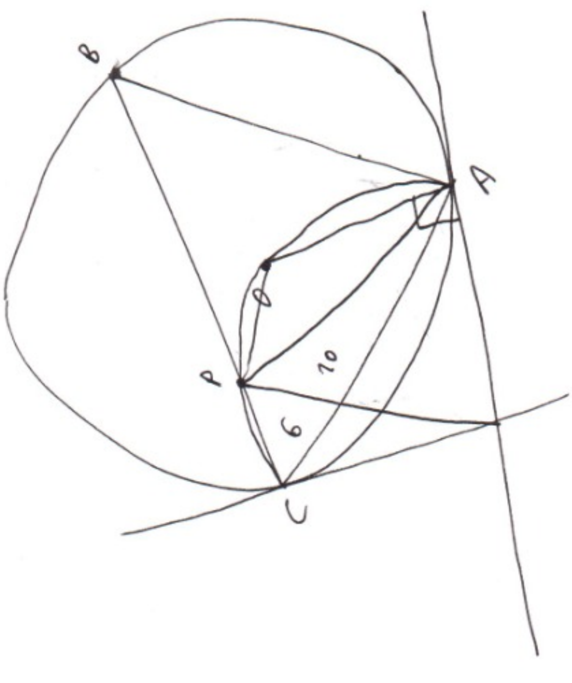
$\Rightarrow CK = 3x$

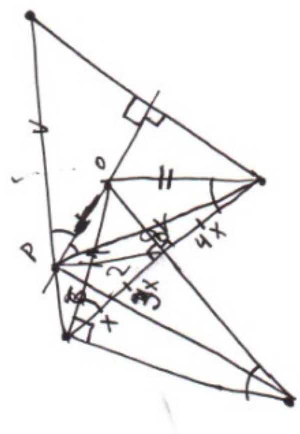
$AM = 4x$

$\Rightarrow S_{KPM} = 2$

$S_{PMA} = 8$

$\frac{S_{ABC}}{S_{ACP}} = \frac{PB}{PC}$


B
A
P
C
10
6


P
O
4x
x

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 21 = 3\cdot 7 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

$a \quad b$

~~НОК = 21~~

НОК · НОД $\qquad$ ~~НОК~~ $\qquad \dfrac{\text{НОК}}{\text{НОД}}$

$a = 21$

1: $3^{\alpha}\cdot 7$

2: $3\cdot 7$

3: $3\cdot 7$

~~НОК · НОД = ab~~

$\text{НОК}\cdot\text{НОД}^2 = abc$

$3^{19}\cdot 7^{17} = abc$

$3\cdot 7.$

$\dfrac{\text{НОК}}{\text{НОД}} = 3^{16}\cdot 7^{14}$

3^{16}

$a = 21\cdot a_1$

$b = 21\cdot a_2$

1 и 1

1 $\quad$ 1 и 1

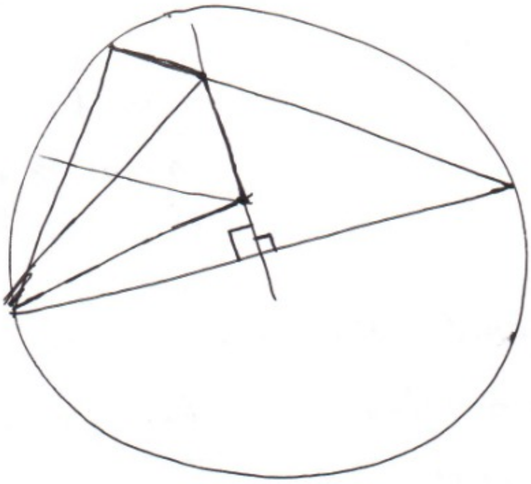
$3^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$ ..

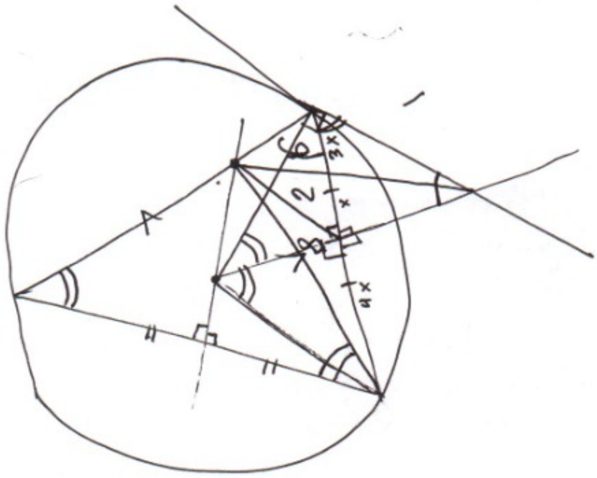
(1)(1)($3^{\dots}\cdot 7^{\dots}$)

1

$\cdot 3 \cdot 2$

log





21103214 (U361497 M1295874)

$\cancel{\log}$

$=$

$+1$

$\log_{a^2} b = \log_c a = \log_b c^4 - 1$

$\cancel{a^2 b}$ $\frac{4 \log_a b}{2 \log_a c}$

$b = c^2$ $x > 2$

$\frac{x}{2} = \frac{5}{2}$ $\frac{x}{2} = 1 + 1$

$\frac{x}{2} > \frac{2}{4}$ $x \neq 2$ $1 - 1$

$x \neq$ $x \neq 0$

$x \neq 4$

$a^2 = b$

$c = a$ $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \neq 1$ $\frac{11}{4}$

$b = c^4 + 1$ $\frac{x}{2} \neq \frac{5}{2}$ $x \neq \frac{11}{4} + 1 = \frac{15}{4}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{9}{4}$ $x \neq 11$

$\frac{15}{4}$

$\frac{\log_a b \cdot \log_a c}{2} = 1$

$\log_c a \cdot c = 4 \log_b c$

$\log_c a \cdot c = 4 \log_b c = \log_{a^2} b \cdot a^2$

$b = a^{2 \log_c a}$

$c^4 = b^{\log_c b} \cdot b =$

$c^4 = a^{2 \log_c a^2 b}$

$\log_{a^2} b$
$\log_c a$
$\log_b c^4$

$\log_c a = 4 \log_b c$

$b^{\log_c a} \cdot a = (bc)^4 \cdot c \cdot c^{\log_b c}$

$2 \cancel{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a} =$

$\cancel{a \cdot b \cdot c}$

$x \cdot x \cdot (x-1) = 2$

$x^3 - x^2 - 2 = 0$

$x = 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + x^2 - 2 & x - 1 \\
\underline{-x^3 - x^2} & x^2 + 2x + 2 \\
\quad 2x^2 - 2 & \\
\quad \underline{2x^2 - 2x} & \\
\qquad 2x - 2 & \\
\qquad \underline{-2x - 2} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$5 \; 1$

$(x+1)^2 + 1$

$\frac{9}{4}$ $\frac{3}{2}$

$\left(\frac{9}{4}\right)^2 = 9$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

x

$x^2 - 4x + 4 = 2x - 1$

$\cancel{x^2}$

x

$4x - 11 = x^2 - 4x + 4$

$\frac{x}{2} = -\frac{4}{4} + \frac{11}{4} = \frac{7}{4}$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x^2 - \frac{11}{2} x + \frac{121}{16}$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$5 \; 3$