Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103019**

ID профиля: **874965**

Вариант 19

Чистовик

№1

Поскольку $a_9 = a_1 + 8d$; $a_{17} = a_1 + 16d$; $a_{11} = a_1 + 10d$ $a_{15} = a_1 + 14d$, получим

систему:

$$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > \dfrac{a_1 + a_1 + 13d}{2} \cdot 14 + 12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < (2a_1+13d)\cdot 7 + 47 \end{cases} \Leftrightarrow \quad a_1 \in \mathbb{Z} \qquad \begin{cases} d \in \mathbb{Z} \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow d \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \;\Big|\cdot(-1) \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases} \oplus \begin{cases} -a_1^2 - 24da_1 - 128d^2 < -14a_1 - 91d - 12 \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$$140d^2 - 128d^2 < 47 - 12$$

$$12d^2 < 35$$

$\cancel{d^2 < \frac{35}{12}}$ $\cancel{d=1}$ $\cancel{d \in N}$ $\cancel{d=2}$

$$d^2 < \frac{35}{12} \Rightarrow d < \sqrt{\frac{35}{12}} < \sqrt{\frac{36}{12}} = \sqrt{3} < \sqrt{4} < 2, \text{ т.е.}$$

$(d \in N)$ $d = 1$

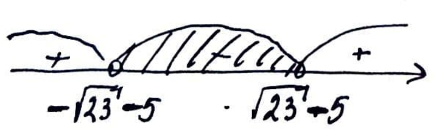
При $d = 1$:

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ (a_1+5)^2 - 23 < 0 \quad (1) \end{cases}$$

1

(1) $(a_1 + 5 - \sqrt{23})(a_1 + 5 + \sqrt{23}) < 0$



$\sqrt{16} < \sqrt{23} < \sqrt{25}$

$4 < \sqrt{23} < 5$ $\qquad -4 > -\sqrt{23} > -5$

$-1 < \sqrt{23} - 5 < 0$ $\qquad -9 > -\sqrt{23} - 5 > -10$

$a \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$, учтём, что $a \neq -5$ и получим окончательно:

$a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

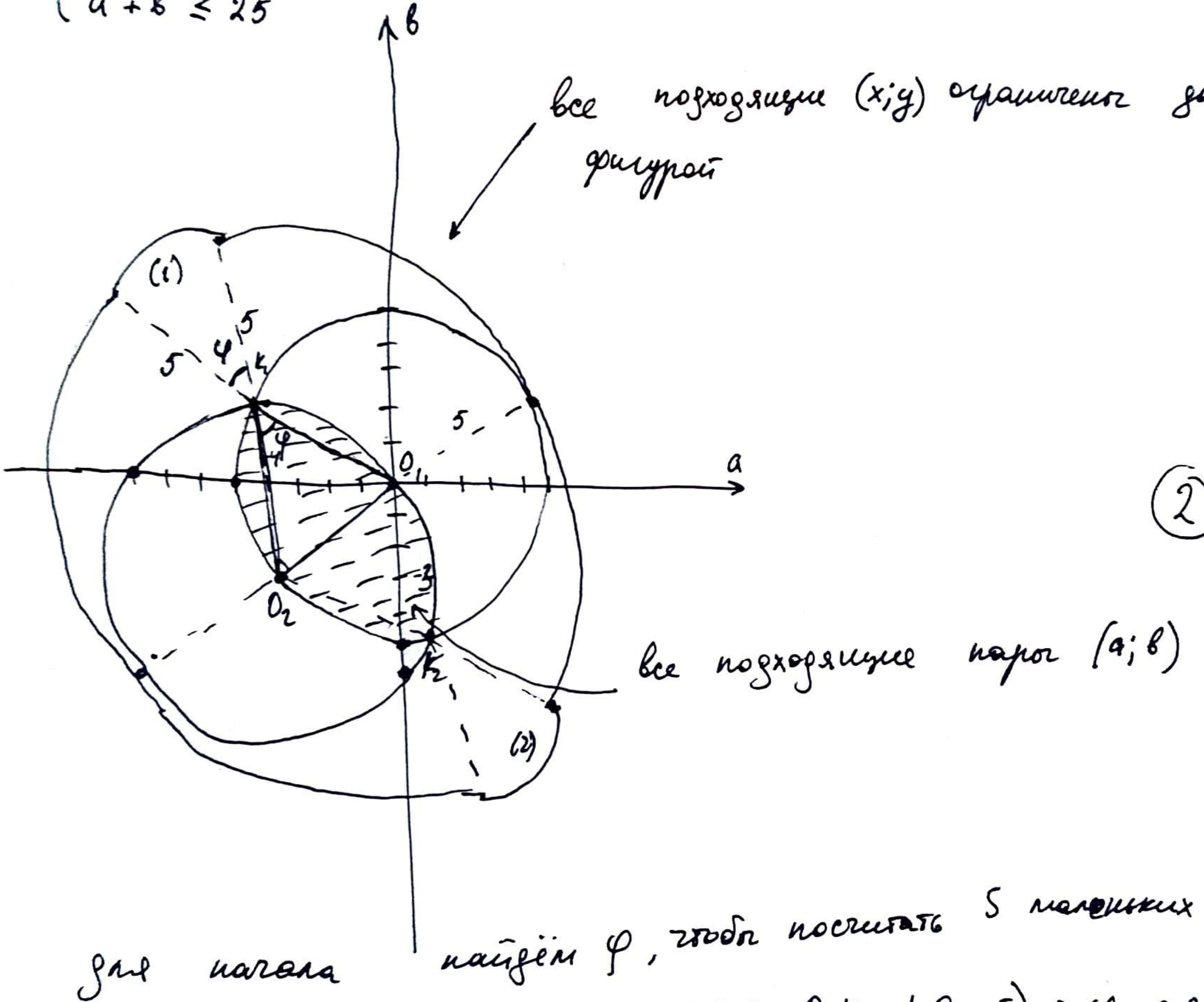
Ответ: $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,\ 25)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le -8a-6b\\ a^2+b^2\le 25\end{cases} \quad \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+8a+b^2+6b\le 0 \ \big|+9+16\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}$$



2

для начала найдём φ, чтобы посчитать S маленьких кусочков

(1); (2): $\triangle O_1O_2K_1$ – равносторонний $(O_1O_2=O_1K_1=K_1O_2=5) \Rightarrow \varphi=60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow S_1=S_2=\cancel{\pi} R^2\cdot\frac{\varphi}{\cancel{2\pi}}=\frac{\varphi R^2}{2}=\frac{\pi}{6}\cdot 25=\frac{25\pi}{6}$

(продолжение на стр. 3)

Чистовик

№3 (продолжение)

Поскольку $\angle O_1O_2K_2 = 60^\circ$ ($\triangle O_1O_2K_2$ тоже равносторонний)

$\angle K_1O_2K_2 = \angle K_1O_1K_2 = 120^\circ$ ~~заштрихованную оставшуюся площадь можно найти так: найдём площадь дуги, ограниченную углом $\angle K_1O_1K_2$ и вычтем площадь $\triangle K_1O_1K_2$. полученное число будет половиной заштрихованной фигуры:~~

$$\cancel{\pi R^2 \cdot \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} - \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot K_1K_2 \cdot \frac{O_1O_2}{2} = \frac{25\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 2{,}5 =}$$

$$\cancel{= \frac{25\pi}{3} - 6{,}25\sqrt{3}}$$

Найдём оставшуюся область: вычитаем посчитанную дважды область

$$S_{ост} = 2 \cdot \pi (2R)^2 \cdot \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} - S_{O_1K_1O_2K_2} = 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 100 - \frac{5\sqrt{3} \cdot 5}{2} = \frac{200\pi}{3} - 12{,}5\sqrt{3}$$

Итоговая площадь равна:

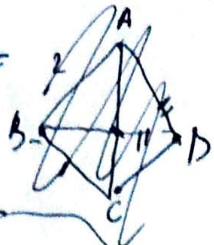
$$S = S_{ост} + S_1 + S_2 = \frac{200\pi}{3} - 12{,}5\sqrt{3} + \frac{25\pi}{3} = \frac{225\pi}{3} - 12{,}5\sqrt{3} = 75\pi - 12{,}5\sqrt{3}$$

Ответ: $75\pi - 12{,}5\sqrt{3}$

Черновик

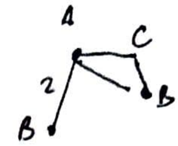
$(2\cdot(-10)+13)\cdot 7=$

$=-49+47=-2$

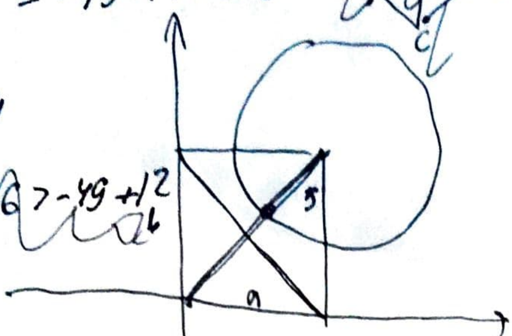


$-8a-6b\geq 0$

$4a+3b\leq 0$



$(-2)\cdot a > -49+12$



$3\cdot 11 = 3\cdot 7 + 3\cdot 4$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 25\\ a^2+8a+b^2+6b\leq 0\\ a^2+b^2\leq 25\end{cases}$$

$\underbrace{8\cdot 16}_{128} > \underbrace{13\cdot 7}_{91}+12$

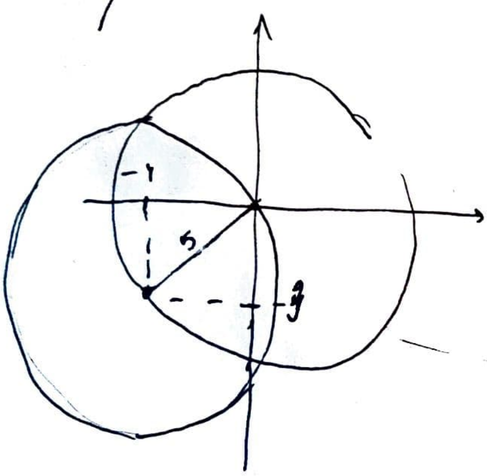
$10\cdot 14 < 13\cdot 7 + 47$

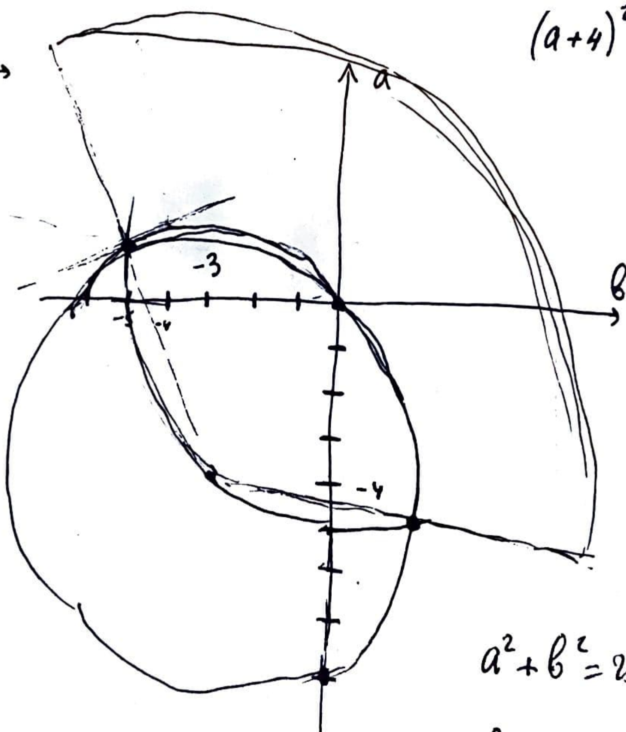
$91+47=138$

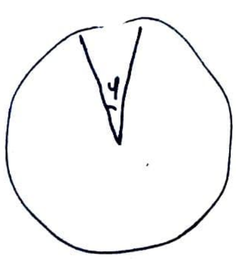
$140 \not< 138$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 25\\ (a+4)^2+(b+3)^2\leq 25\\ a^2+b^2\leq 25\end{cases}$$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25$







$\pi R^2\cdot \frac{4}{2\pi}$

$a^2+b^2=25$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9=25$

$8a+16+6b+9=0$

$8a+6b=-25$

$a=\frac{-25-6b}{8}$

$300 : 12 = 25$

$225-4\cdot 50\cdot 3\leq 0$

$25^2+36b^2+2\cdot 25\cdot 6b=25$

$36b^2+300b+25\cdot 24=0 \mid :12$

$3b^2+15b+50=0$

Черновик

$$\begin{cases}(a_1+8d)(a_1+16d) > \dfrac{a_1+a_1+13d}{2}\cdot 14+12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < (2a_1+13d)\cdot 7+47 \quad (1)\end{cases}$$

a_1 - целое

$d \in N$

$14a_1 + 91d + 47$

$(a_1+8d)(a_1+16d) = a_1^2 + 24a_1d + 16\cdot 8d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

$a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$

$-a_1^2 - 24a_1d - 140d^2 > -14a_1 - 91d - 47$

$(16\cdot 8 - 140)d^2 >$

$64 \cdot 2 = 128$

$\cancel{35}$ 12

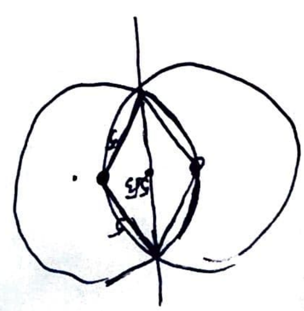
$128 - 103 = 25$

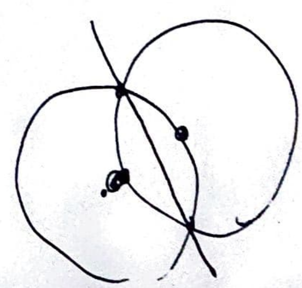
$90 + 48 = 138$

225 | 3
-21 | 75
15

$\dfrac{5\sqrt{3}\cdot 5}{2} = 12{,}5\sqrt{3}$

-10





$\frac{1}{2}\, 5\sqrt{3}\cdot 2{,}5 = 2{,}5^2\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103019**

ID профиля: **874965**

Вариант 19

Чистовик

№4

Пример $a = 3^{a_1} \cdot 7^{a_2}$; $b = 3^{b_1} \cdot 7^{b_2}$; $c = 3^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

(a, b, c кратны только 3 и 7 т.к. в противном случае НОК(a;b;c) кратен ~~…~~ простому числу, не равному 3 и 7, что неверно, т.к. НОК(a;b;c) = $3^{17} \cdot 7^{15}$)

Тогда получим

$$\begin{cases} \min\{a_1; b_1; c_1\} = 1 \\ \min\{a_2; b_2; c_2\} = 1 \\ \max\{a_1; b_1; c_1\} = 17 \\ \max\{a_2; b_2; c_2\} = 15 \end{cases}$$

Найдём кол-во троек $(a_1; b_1; c_1)$ при одно число 1, второе 17, третье может быть от 1 до 17, при последнем числе равном 1 или 17 кол-во перестановок 3, в остальных 15 случаях $3! = 6$. Получаем, кол-во $(a_1; b_1; c_1)$

$3 + 3 + 6 \cdot 15 = 6 + 6 \cdot 15 = 6 \cdot 16$.

Аналогично получим кол-во $(a_2; b_2; c_2)$ $13 \cdot 6 + 6 = 14 \cdot 6$

Итоговое кол-во вариантов по правилу умножения:

$14 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 16 = 8064$

Ответ: 8064

1

Чистовик

№5 $\cancel{\frac{1}{2}\log}$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right), \quad \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right); \quad \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

Подразумевается существование данных логарифмов, поэтому

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0, & \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1 \\ \frac{x}{2}-1>0, & \frac{x}{2}-1\neq 1 \\ x-\frac{11}{4}>0 & x-\frac{11}{4}\neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>\frac{1}{2} & x\neq\frac{10}{4} \\ x>2, & x\neq 4 \\ x>\frac{11}{4}, & x\neq\frac{15}{4} \end{cases}$$

$\cancel{\frac{x}{2}\neq 1}$ $\begin{cases} x>\frac{11}{4} \\ x\neq 4 \\ x\neq\frac{15}{4} \end{cases}$

~~При~~ $\cancel{\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = 2\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right) \Big| \cdot \log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)}$

$\cancel{\frac{1}{2}\frac{\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)}=2}$

Для удобства примем $\frac{x}{2}-1=a$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=b$

$x-\frac{11}{4}=c$

2

Наши логарифмы можно представить так

$\frac{1}{2}\log_a b$; $2\log_c a$; $2\log_b c$

Пусть $\frac{1}{2}\log_a b = 2\log_c a$

$\log_a b = 4\log_c a$, т.е при $\cancel{b=b^k}$ $b=a^k$ $c^{\frac{k}{4}}=a$

или $c=a^{\frac{4}{k}}$, а $b=c^{\frac{k^2}{4}}$,

(продолжение в стр.3)

Чистовик

№5 (продолжение)

Также должно выполняться равенство:

$2\log_b c = 2\log_c a + 1$

$2 \cdot \frac{4}{k^2} = \cancel{k}\frac{k}{2} + 1 \mid \cdot k^2 \neq 0$

$\cancel{8 = 8k + k^2}$

$\cancel{k^2 + 8k - 8 = 0}$

$8 = \frac{k^3}{2} + k^2$

$k^3 + 2k^2 - 16 = 0$

$k = 2$ - корень

$2^3 + 2^3 - 16 = 0$

$$\begin{array}{r|l} k^3 + 2k^2 - 16 & k-2 \\ \hline -\; k^3 - 2k^2 & k^2 + 4k + 8 \\ \hline 4k^2 - 16 & \\ - & \end{array}$$

$(k-2)(k^2+4k+8) = 0$

$D < 0$ ветви $\uparrow$ - нет корней

$k = 2$

$b = a^k$ т.е. $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

$(2x - 1) = (x - 2)^2$

$2x - 1 = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x^2 - 5x - x + 5 = 0$

$x(x-5) - (x-5) = 0$

$(x-1)(x-5) = 0$

3

$\left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ - не подходит по ОДЗ} \\ \underline{x = 5} \end{array}\right.$

При $\frac{1}{2}\log_a b = 2\log_b c$, получаем, при $b = a^k$

$\frac{k}{2} = 2\log_b c \Rightarrow \log_b c = \frac{k}{4}$ $\quad c = b^{\frac{k}{4}} = a^{\frac{k^2}{4}}$

Должно выполняться равенство: - уже было

$2\log_c a = 2\log_b c + 1$ $\qquad k = 2$

$\frac{8}{k^2} = \frac{k}{2} + 1 \mid \cdot k^2 \neq 0 \Rightarrow \cancel{8 = 8k + k^2}$

$\cancel{k^2 + 8k - 8 = 0}$

N5 (продолжение)

При $2\log_c a = 2\log_b c$

$\log_c a = \log_b c$

$a = c^k = b^{k^2}$

$\frac{1}{2k^2} = 2k + 1 \quad | \cdot 2k^2 \neq 0$

$1 = 4k^3 + 2k^2$

$4k^3 + 2k^2 - 1 = 0$ (не успеваю)

4

Ответ: $x = 5$

Черновик

$НОД\left(3^{a_1}\cdot 7^{a_2};\ 3^{b_1}\cdot 7^{b_2};\ 3^{c_1}\cdot 7^{c_2}\right)=21$

$\min(a_2; b_2; c_2)=1 \quad \max(a_2; b_2; c_2)=\cancel{17}\ 15$

$\min(a_1; b_1; c_1)=1 \quad \max(a_1; b_1; c_1)=17$

$x>2$

$\frac{1}{2}\log_a c = 2\log_b a$

$\cancel{\frac{1}{2}\log_a b \cdot \frac{c}{b}}$

$\frac{1}{2}\log_a c\cdot\log_b a = 2\log_b^2 a$

$\frac{1}{2}\log_b c = 2\log_b^2 a$

17вар.

1 2 17
2 1 17
2 17 1
17 2 1
1 17 2
17 1 2

1	1	17	3
1	2	17	6
1	3	17	6
1	4	17	
1	5	17	
1	6	17	
1	7	17	
1	8	17	
1	9	17	
1	10	17	6
1	11	17	
1	12	17	
1	13	17	
1	14	17	
1	15	17	
1	16	17	
1	17	17	

$15\cdot 6+6=$
$=16\cdot 6$

$\frac{1}{2}a-\frac{2}{b}=0 \mid \cdot b\neq 0$

$\frac{1}{2}ab-2=0$

$ab=4$

13 (1 … 15)

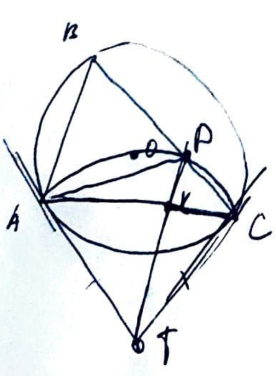
$14\times 6 = 84$

36×16: 216 + 36 = 576

576×14: 2304 + 576 = 8064

$84\times 6 = 504$

504×16: 3024 + 504 = 8064



Черновик

$k = 4\log_c a$

$\log_c a = \frac{k}{4}$

$a = c^{\frac{k}{4}}$

$c = a^{\frac{4}{k}}$

$\frac{1}{2}\log_a b = 2\log_c a$

$b = a^k$

$\frac{k}{2} = 2\log_c a$

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} = \frac{1}{\underbrace{\log_c a}\cdot\log_a b} = \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot k\cdot k} = \frac{4}{k^2}$

$4(k^2-4) = 4(k+2)$

$2\log_b$

$\log_b c$

$= b^{k^2}$

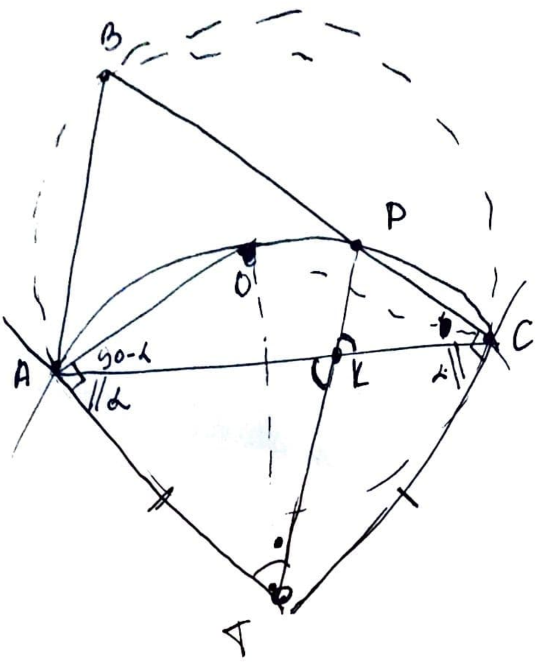
$2k^2 \neq c$

$=0$ (k

$=5$

Черновик

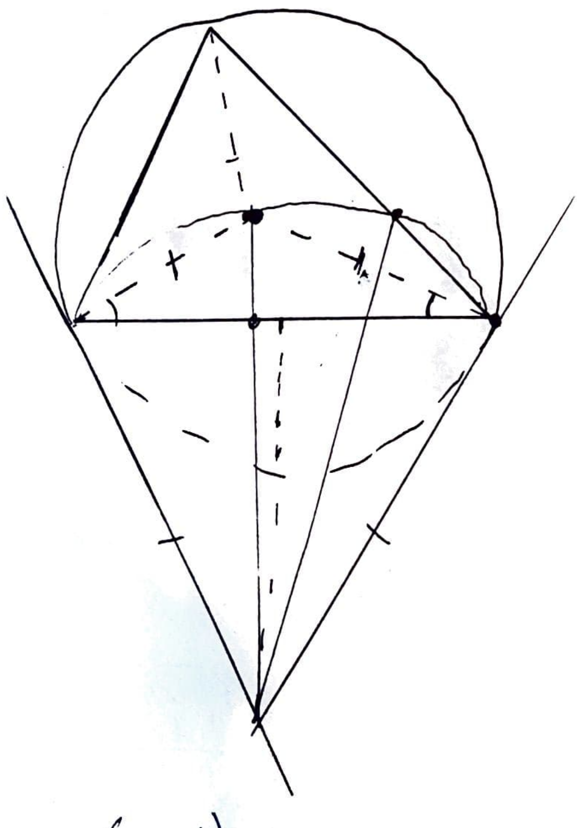
Черновик

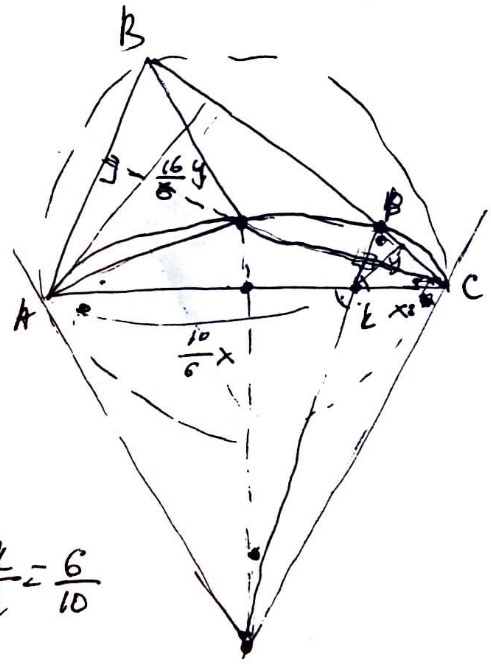


$180-2\alpha+\alpha=90$

$160-\alpha=90$

$\alpha=90$?





$\frac{CL}{AL}=\frac{6}{10}$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$