Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

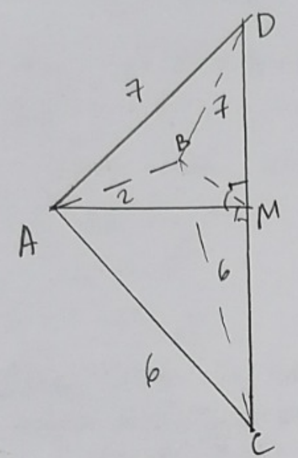
Шифр: **21102862**

ID профиля: **344013**

Вариант 19

Чистовик. Вар - 19

② CD лежит на боковой поверхности и CD ∥ оси ⇒ CD - образующая.



1) Опустим из т. A и т. B перпендикуляры на CD - в силу равенства $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ (по трем сторонам) они упадут в одну и ту же точку M и $AM = BM$.

2) $AM \perp CD$, $BM \perp CD \Rightarrow$ $(ABM) \perp CD \Rightarrow$ сечение цилиндра плоскостью ABM - окружность, равная основанию, пусть имеет радиус R

По теореме синусов для $\triangle ABM$:

$$\frac{2}{\sin\angle AMB} = 2R \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{\sin\angle AMB}$$

R минимально, когда $\sin\angle AMB$ - максимален $\Rightarrow$ $\sin\angle AMB = 1$, $\angle AMB = 90^\circ \Rightarrow$ $AM = BM = \sqrt{2}$.

$CD = CM + DM = \sqrt{36-2} + \sqrt{49-2} = \sqrt{34} + \sqrt{47}$.

Ответ: $CD = \sqrt{34} + \sqrt{47}$.

Чистовик Вар-19

1) $S = a_1 + \dots + a_{14}$

$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S + 12 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 47 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_{13} - 4d)(a_{13} + 4d) > S + 12. \\ (a_{13} - 2d)(a_{13} + 2d) < S + 47 \end{cases}$

$\begin{cases} a_{13}^2 - 16d^2 > S + 12 \\ a_{13}^2 - 4d^2 < S + 47 \end{cases}$ $\begin{cases} -a_{13}^2 + 16d^2 < -S - 12 \\ a_{13}^2 - 4d^2 < S + 47 \end{cases}$

Так как нер-ва одного знака, то сложим их

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12}$

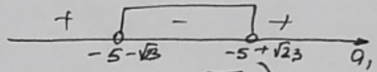
$d^2 < 2\frac{11}{12}$.

Так как a_k целые и прогрессия возрастает, то d - целое положительное, $d = 1$, то

$S = \frac{a_1 + (a_1 + 13)}{2} \cdot 14 = (2a_1 + 13) \cdot 7 = 14a_1 + 91$

$a_{13} = a_1 + 12$.

$\begin{cases} (a_1 + 12)^2 - 16 > 14a_1 + 91 + 12 \\ (a_1 + 12)^2 - 4 < 14a_1 + 91 + 47. \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$



$\begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$ $a_1 \neq -5$

$a_1 \in (-5 - \sqrt{23}; -5 + \sqrt{23})$

$\sqrt{23} \in (4; 5) \Rightarrow$ a_1 может быть: $-4; -6; -7; -8; -9; -3; -2; -1$.

Ответ: $-4; -6; -7; -8; -9, -1, -2, -3$.

лист. 3.

21102862 (U344013 M1300555)

черновик

1) $a_9 a_{17} > S + 12$

$a_{11} a_{15} \not< S + 47$

$9 \cdot 17 > 105 + 12$.

$11 \cdot 15 < 152 +$

$a_1 - ?$

$S = \frac{a_1(n-1)}{n}$ ~~аут~~ $\boxed{a_1 = 1}$

$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14.$

$= 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 25 + 25 \overset{+5}{=}$

$= 105.$

$105 + 12 = 117.$ $9 \times 17 = 153$ $+$ 11×15: $15 + 11 = 125$ $105 + 47 = 152$

$S =$

$\cancel{a_9 = a_1 + 13d}$ $a_{14} = a_1 + 13d$ $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_{14} = \frac{1+14}{2} \cdot 14$

$\cancel{a_{17} = a_1 + 13}$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 15 \cdot 7$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{17} = a_1 + 16d$ $\cancel{\frac{a_1 + a_{14}\; a_1 + 13d}{2} \cdot 14}$ $S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14$

$\cancel{(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) >}$

$a_9 = a_1 + 8d$ $a_{11} = a_1 + 10d$ $S_{14} = \frac{a_1 + a_1 + 13d}{2} \cdot 14$

$a_{17} = a_1 + 16d$ $a_{15} = a_1 + 14d.$ $= (2a_1 + 13d)7.$

$a_{14} = a_1 + 13d$

$16 \times 8 = 128$ $27 + 7$ 168

$\begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > (2a_1 + 13d)7 + 12 \\ (a_1 + 14d) \not< (2a_1 + 13d)7 + 47 \end{cases}$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d)$

$a_1^2 + 16a_1 d + 8a_1 d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12.$ $13 \times 7 = 91$

$a_1^2 + 16a_1 d + 8a_1 d + 128d^2 - 14a_1 - 91d - 12 > 0.$ (1)

$a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 - 14a_1 + 91d + 47$

$a_1^2 + 14a_1 d + 10a_1 d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 - 14a_1 - 91d - 47 < 0.$ (2)

$\cancel{12(2a_1 d +}$

$(2a_1 + 13d)7 + 12 = 14a_1 + 91d + 12.$ $a_{14} = 15$ $15 \times 7 = 105$

$a_{16} = 16$

$a_{17} = 18$

$a_1 = 2.$ $S = 104 + 15 = 119$

$10.$

$(a_1^2 + 24a_1 d - 14a_1) + (128d^2 - 91d - 12) > 0$

$a_1(a_1 + 24d - 14) +$

$(-5 - \sqrt{23})^2 + 10(-5 - \sqrt{23}) + 2 = 5 + 10\sqrt{23} + 23 - 50 - 10\sqrt{23}$

$+2 = 0.$ $17 \times 9 = 153$

$23 - 10\sqrt{23} + 25 - 50 + 10\sqrt{23} + 2.$

$9 \cdot 17 > 117$

11×15: 5; $15 + 11 = 125$ $-5 - 4$

$-5 + 4 = -1$ ①

21102862 (U344013 M1300555)

③

вар – 19 Чистовик

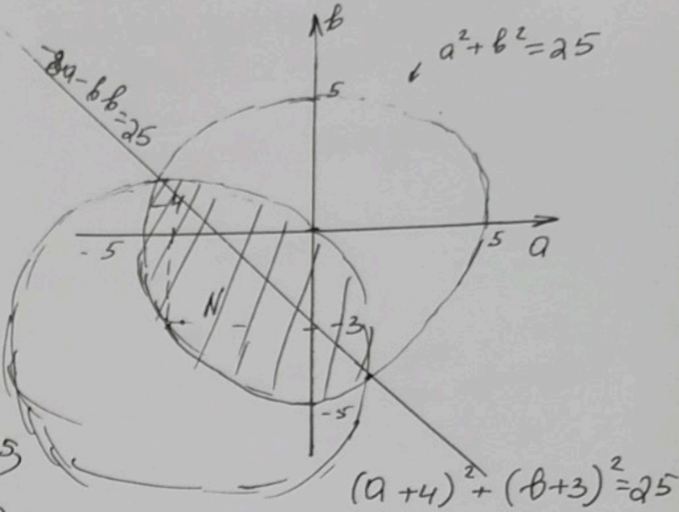
② Построим на плоскости множество точек $(a; b)$, удовлетворяющих и 2-ому нер-ву системы (фигура N)

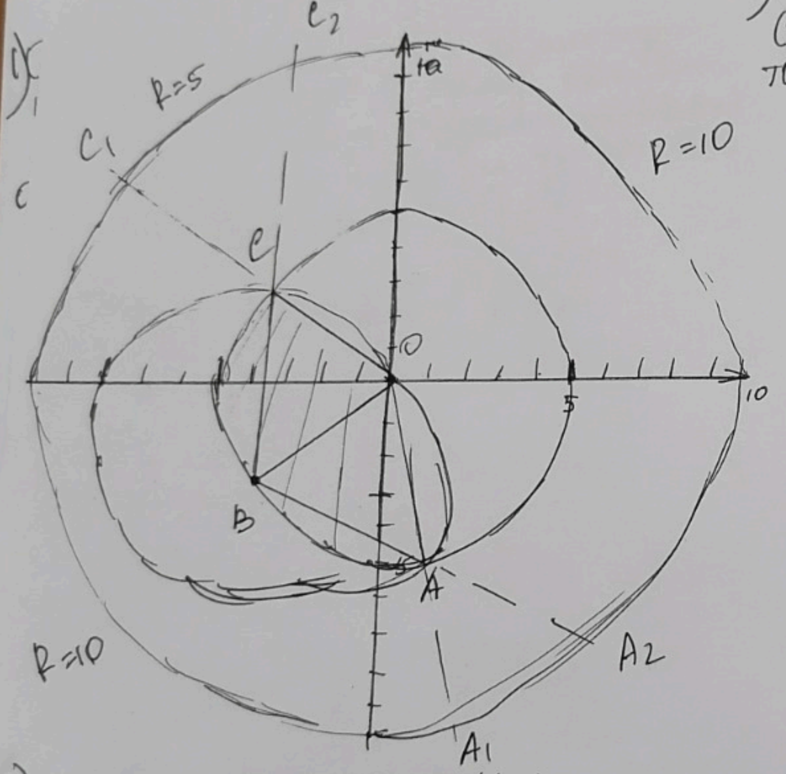
Рассмотрим 2-а случая:

1) $25 \le -8a-6b$ – при этом условии имеем часть круга $a^2+b^2 \le 25$ (нижняя полуплоскость относительно прямой $-8a-6b=25$

2) $25 \ge -8a-6b$ – имеем часть круга
$$a^2+b^2 \le -8a-6b$$
$$a^2+b^2+8a+6b \le 0$$
$$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$$

Точки пересечения окружностей удовлетворяют равенству $-8a-6b=25$, следовательно лежат на прямой $-8a-6b=25$.





4) Фигура M состоит из всех точек $(x; y)$, удаленных от какой-либо точки фигуры N не более чем на 5

$OA = AB = BC = CO = 5 \Rightarrow$

ABCO – ромб, состоящий из 2-ух равносторонних треуг.

$\angle C_1CC_2 = \angle A_1AA_2 = 60°$.

Площадь каждого из 2-ух больших секторов:

$S_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{3}$

Площадь каждого из 2-ух маленьких секторов:

$S_2 = \frac{1}{6}\pi \cdot 5^2 = \frac{25\pi}{6} \Rightarrow$

$S_M = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_2 - S_{ABO} \cdot 2 = \frac{200\pi}{3} + \frac{25\pi}{3} - 2 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{225\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $S_M = \frac{225\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$.

3) Фигура M состоит из:

1) внутри $\angle ABC$ – сектора круга радиуса $R=10$ с центром в и B

2) внутри $\angle ADC$ – сектора круга радиуса 10 с центром в и D.

3) внутри $\angle C_1CC_2$ – сектора $R=5$ с центром C

4) внутри $\angle A_1AA_2$ – сектора $R=5$ с центром A.

①

$(-9+8)(-9+16) > (-18+13)7+12.$ черновик.

$-7 > -35+2.$ $-5.$

$(-9+10)(-9+14) < (-18+13)7+42$

$1 \cdot 5 <$

$(-1+8)(-1+16) > (-2+13)7+12$

$7 \cdot 15 > 11 \cdot 7 + 12.$

$(-1+10)(-1+14) < (-2+13)7+47.$

$9 \cdot 13 < 11 \cdot 7 + 47.$

$(-3+8)(-3+16) > (-6+13)7+12.$

$5 \cdot 13 > 7 \cdot 7 + 12.$

$(-3+10)(-3+14) < (-6+13)7+47$

$7 \cdot 11 < 7 \cdot 7 + 47$

$77 < 96.$

$15 \times 7 = 105$

$77 + 12 = 89$

$13 \times 9 = 117$

$77 + 47 = \boxed{124}$

$13 \times 5 = 65$

$49 + 12 = 61$

$49 + 47 = 96$

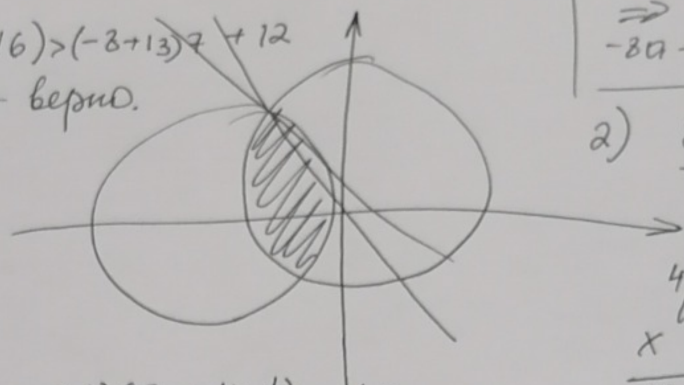
$(a_1+8d)(a_1+16d) > (2a_1+13d)7+12$
$(a_1+10d)(a_1+14d) < (2a_1+13d)7+47$

черновик

$S < (a_1+8d)(a_1+16d)-12)$
$-S < -(a_1+10d)(a_1+14d)+47)$

$25 < -8a-6b$
$\Rightarrow a^2+b^2 \le 25.$
$-8a-6b=25.$

$(-4+8)(-4+16) > (-8+13)7+12$
$4+12 > 35+12.$ — верно.



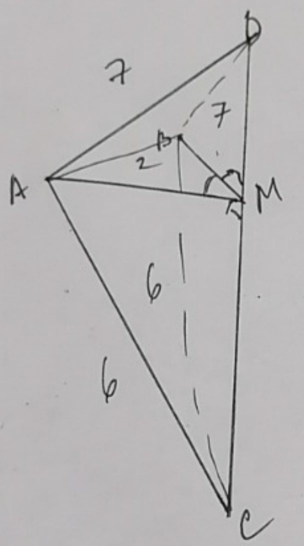
2) $25 \ge -8a-6b.$
$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 8 \\ \hline 128 \end{array}$

$\begin{cases} S > (a_1+10d)(a_1+14d)+47. \\ S < (a_1+8d)(a_1+16d)-12. \end{cases}$

$\sqrt{23} \approx \boxed{4,8.}$

$-5-4,8 \approx -9,8.$
$-5+4,8=-0,2.$



$2R = \frac{2}{\sin \angle AMB}$

$\Rightarrow \sin \angle AMB = 1. \Rightarrow R=1.$
$\Rightarrow AM = \sqrt{2}.$
$CD = CM + DM = \sqrt{36-2} + \sqrt{49-2}$
$= \sqrt{34} + \sqrt{47}.$

$98 : 2 = 49$

$47-12=35$, $35 : 12$

$12 \times 2 = 24$

$128-91=37$, $37-12=25$

$(a_1+8)(a_1+16) > (2a_1+13)7+12$
$a_1^2+16a_1+8a_1+128 > 14a_1+91+12.$
$a_1^2+24a-14a_1+128-91-12.$
$a_1^2+10a+25>0 \quad (a_1+5)^2>0 \quad \boxed{a \ne -5}$

$140-91=49$

$98=2$

$(a_1+10)(a_1+14) < (2a_1+13)7+47.$
$a_1^2+\cancel{14a_1}+10a_1+140-\cancel{14a_1}-91-47<0$
$a_1^2+10a_1+2<0$

$D=100-8=98$
$7\sqrt{2}.$
$a_1 = \frac{-10+7\sqrt{2}}{2}$

2

21102862 (U344013 M1300555)