Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102778**

ID профиля: **201891**

Вариант 19

Чистовик (1)

$\boxed{№1}$

1) $a_1, a_2, a_3 \dots$ Пусть $a_i - a_{i-1} = d$, $a_1 \in Z$, $d \in N$, $d > 0$

$S = a_1 + a_2 + \dots + a_{14} = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \dots + (a_1+13d) = 14a_1 + \frac{14\cdot 13}{2}d = 14a_1 + 91d$

2) $\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S+12 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S+47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1 + 91d + 12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 128 d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 d + 140 d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$ $\Big|\ K = a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 - 14a_1 - 91d - 12 \ \Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} K > 0 \\ (a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 - 14a_1 - 91d - 12) + 12d^2 - 35 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K > 0 \\ K + 12d^2 - 35 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} K > 0 \\ 35 - 12d^2 > K \end{cases} \Rightarrow 35 - 12d^2 > 0 \Rightarrow 12d^2 < 35 \Rightarrow d^2 < \frac{35}{12}$.

Так как $d \in N$ и $d > 0$, то $\boxed{d=1}$.

при $d \geq 2$ $d^2 > \frac{35}{12}$ $\left(4 > \frac{35}{12}\right)$

3) Значит сводится к следующему:

$S = 14a_1 + 91$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 \cdot 1 + 128 \cdot 1^2 > 14a_1 + 91 \cdot 1 + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 \cdot 1 + 140 \cdot 1^2 < 14a_1 + 91 \cdot 1 + 47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 128 - 91 - 12 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 140 - 91 - 47 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 \neq -5$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 10^2 - 4 \cdot 2 = 92$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$

$+ \quad - \quad +$

$-5-\sqrt{23} \quad -5+\sqrt{23}$

$\Rightarrow a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23})$

4) Получаем:

$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23}) \\ a_1 \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9 > -5-\sqrt{23} > -10 \\ 0 > -5+\sqrt{23} > -1 \end{pmatrix} \Bigg| \Rightarrow a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

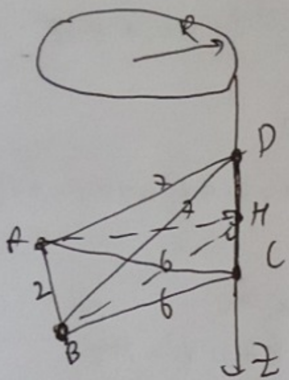
Ясно, что эти a_1 удовлетворяют всем условиям, значит это и есть ответ

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

Чистовик

②

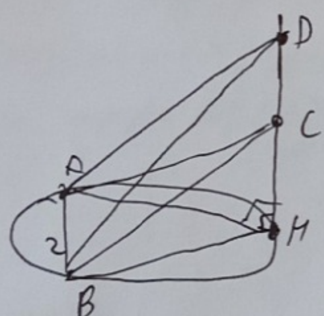
№2



→ Проведём высоту в $\triangle BDC$ на DC и высоту в $\triangle ADC$ на DC, т.к. $\triangle BDC = \triangle ADC$ по трём сторонам, то высота $\triangle ADC$ делит DC в том же отношении, что и высота $\triangle ABC$ делит DC. Значит эти высоты на DC пересекаются в одной точке H.

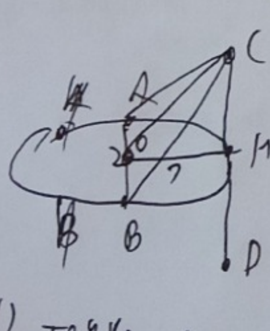
То есть, если через точки A, H, B провести плоскость, то она перпендикулярна DH ($AH \perp DC$, $BH \perp DC$) и это будет сечение в цилиндре с радиусом R.

2)



Заметим, что AB — хорда в окружности. И у AB будет возможность равняться двум, пока она не превышает диаметра. Если мысленно начать уменьшать радиус окружности, то AB будет всё ближе к диаметру. В крайнем случае $AB = 2 \cdot R \Rightarrow R = 1$. Это и есть минимальный радиус.

3) Теперь возможно 4 случая: а) точка H между C и D!



$OC \perp AB \Rightarrow OH \perp AB$ из обобщ. ТТП $\Rightarrow$

$\Rightarrow OC = \sqrt{BC^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$.

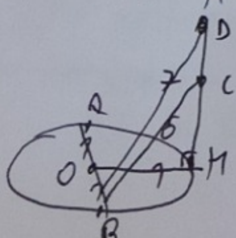
$CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{35 - 1} = \sqrt{34}$

Аналогично $OD = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$

$DH = \sqrt{48 - 1} = \sqrt{47}$

Тогда $DC = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

б) точка H за пределами отрезка CD. Тогда по аналогии с пунктом 3а:



$OC = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$ $CH = \sqrt{(\sqrt{35})^2 - 1} = \sqrt{34}$

$OD = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$ $DH = \sqrt{48 - 1} = \sqrt{47}$

Тогда $DC = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

Ответ: $DC = \sqrt{47} - \sqrt{34}$ или $DC = \sqrt{47} + \sqrt{34}$.

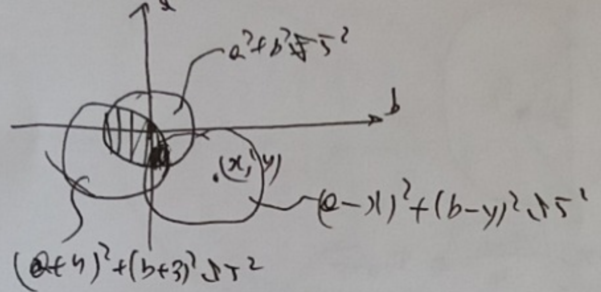
чистовик

③

№3

1) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 25\\ a^2+b^2\leq\min(-8a-6b;25)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\leq 25\\ a^2+b^2\leq -8a-6b\\ a^2+b^2\leq 25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\leq 25\\ (a+4)^2+(b+3)^2\leq 25\\ a^2+b^2\leq 25\end{cases}$

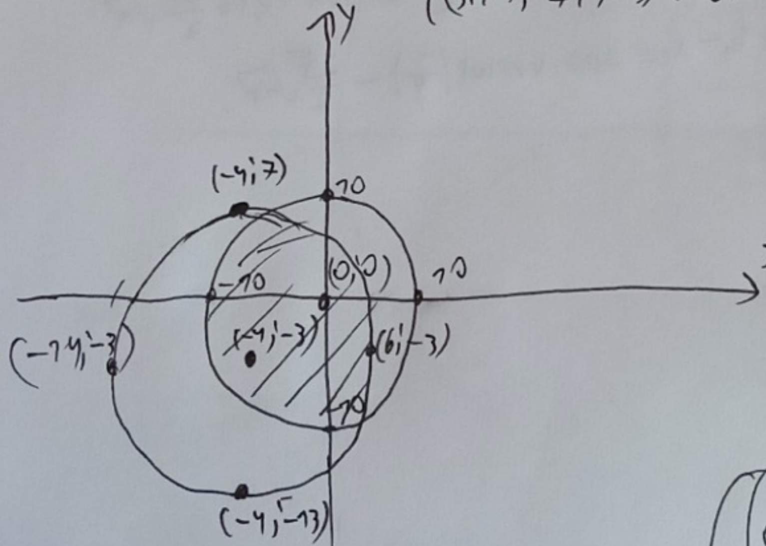
При данных $(x;y)$ существует пара $(a;b)$, если окружность ~~кружок~~ $(a-x)^2+(b-y)^2\leq 25$ пересекает хотя бы в одной точке окружность $(a+4)^2+(b+3)^2\leq 25$ и окружность $a^2+b^2\leq 25$.



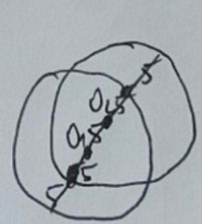
2) Условие того, что 2 окружности пересекаются или касаются (в случае окружностей равного радиуса) означает, что расстояние между центрами окружностей не превышает $10 = 2\cdot 5$, то есть:

$\begin{cases}(x-0)^2+(y-0)^2\leq 10^2\\ (x-(-4))^2+(y-(-3))^2\leq 10^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+y^2\leq 10^2\\ (x+4)^2+(y+3)^2\leq 10^2\end{cases}$

Значит фигура M: $\begin{cases}x^2+y^2\leq 100\\ (x+4)^2+(y+3)^2\leq 100\end{cases}$

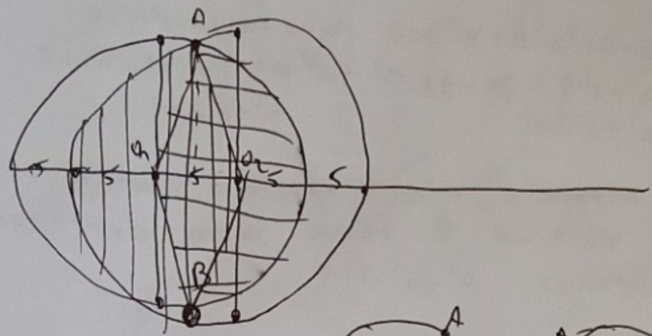


Искомая площадь — пересечение двух окружностей радиуса 10 с расстоянием между центрами окружностей $\sqrt{3^2+4^2}=5$.

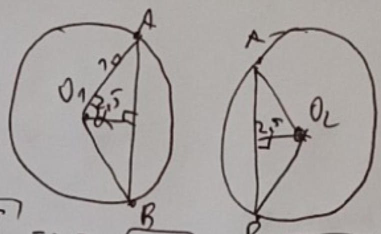


Для нахождения этой площади можно 2 раза сложить площадь сектора и вычесть площадь четырёхугольника O_1AO_2B, где A и B — точки пересечения окружностей.

Чистовик

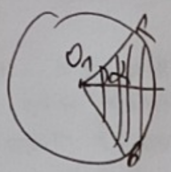


Иными словами:



$AB = 2\sqrt{10^2 - 2,5^2} = 2\sqrt{100 - \frac{25}{4}} = 2\cdot 5\cdot\sqrt{4 - \frac{1}{4}} = 10\cdot\sqrt{\frac{16-1}{4}} = 5\cdot\sqrt{15}$

Площадь сектора:



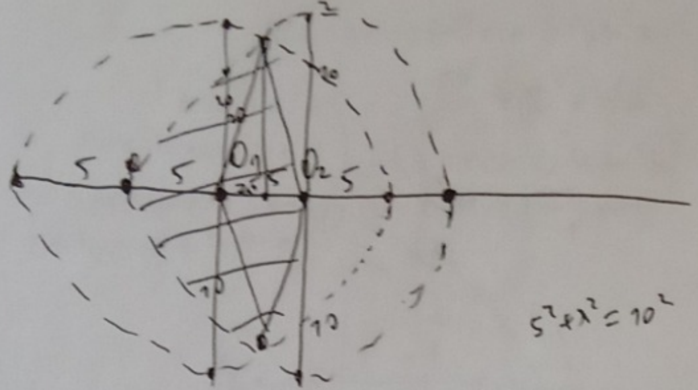
Угол α: $\cos\alpha = \frac{2,5}{10} = \frac{1}{4}$

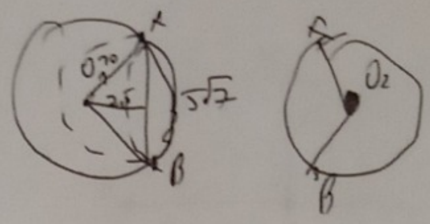
Тогда $S_1 = \frac{2\alpha}{2\pi}\cdot\pi R^2 = \alpha R^2$, $R = 10$

$S_1 = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 100$

Площадь AO_1BO_2: $S_2 = 2\cdot S(O_1AB) = 2\cdot\frac{AB\cdot 2,5}{2} = 5\sqrt{15}\cdot 2,5 = \frac{25}{2}\sqrt{15}$

Тогда итоговая площадь: $S(M) = 2S_1 - S_2 = 200\cdot\arccos\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{25}{2}\sqrt{15}$.





$5^2 + x^2 = 10^2$

$x^2 = 75$

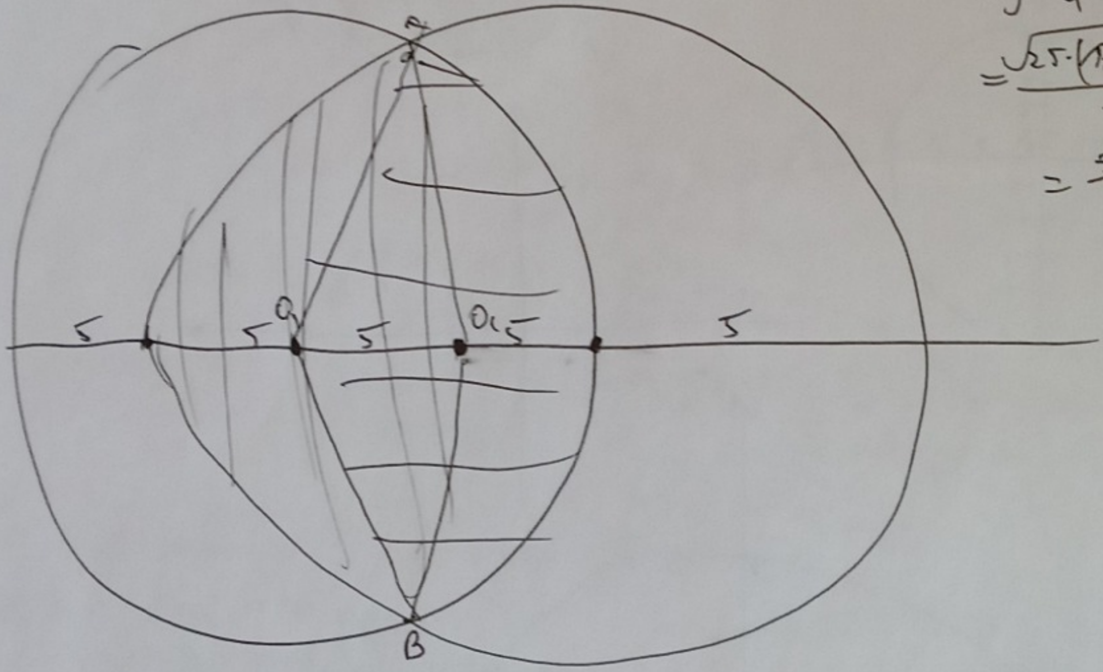
$x = 5\sqrt{3}$

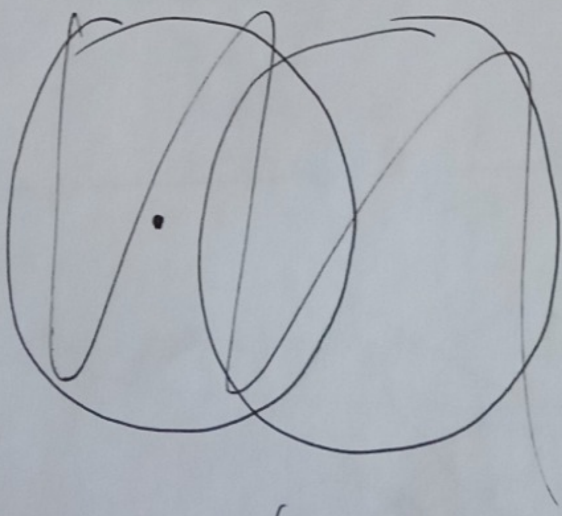
$\sqrt{100 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - \frac{25}{4}} =$

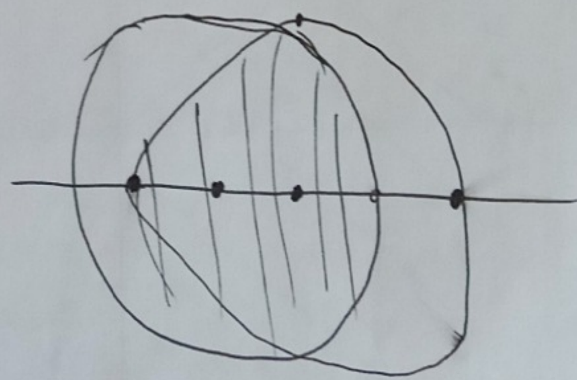
$= \sqrt{\frac{400-25}{4}} = \cancel{\frac{\sqrt{375}}{2}}$

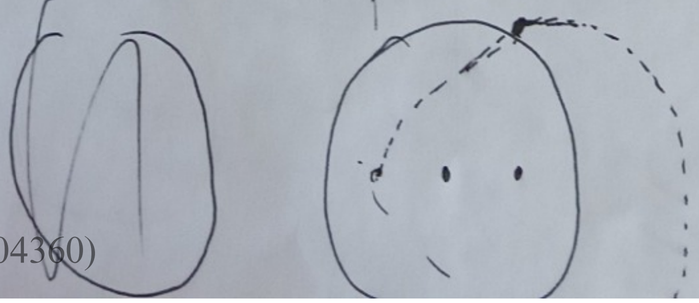
$= \frac{\sqrt{25 \cdot (16-1)}}{2} =$

$= \frac{5}{2}\sqrt{15}$









$d > 0$ $\quad 10+12=91$ $\quad 91+42 = \frac{91}{\frac{42}{133}}$

$a_1, a_2, a_1 ...$

$S = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + ... + (a_1+13d) = 14a_1 + d(1+2+...+13) = 14a_1 + \frac{14\cdot13}{2}\cdot d =$

$= 14a_1 + 7\cdot13d = 14a_1 + 91d$

$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > \cancel{14a_1+91} \quad 14a_1+91+12 = 14a_1+103 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1+91+42 = 14a_1+133 \end{cases}$

$a_1 - ?$

$8\cdot16 =$
$= 32\cdot4 =$
$= 64\cdot2 =$
$= 128$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 14a_1+103 \\ a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 14a_1+133 \end{cases}$ $\quad a_1^2+24a_1d+128d^2-14a_1-103=K$

$\begin{cases} K > 0 \\ K + 12d^2 - 35 < 0 \end{cases}$ $\quad 35-12d^2 > K > 0$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12}$

$d = 1$ т.к. $d \in \mathbb{N}$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 133 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 15 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$

$D = 100 - 4\cdot15 = 40$

$a_1 = \frac{-10\pm\sqrt{40}}{2} = -5\pm\sqrt{10}$

$-5-\sqrt{10} \quad 5+\sqrt{10}$

$92 = 2\cdot46 = 4\cdot23$

$D = 100-4\cdot2 = 92$

$a_1 = \frac{-10\pm\sqrt{92}}{2} = -5\pm\sqrt{23}$

$-5-\sqrt{23} \quad 5+\sqrt{23}$

$a_1 \in (-5-\sqrt{10}; 5+\sqrt{10})$

$a_1 \in (-\infty; -5-\sqrt{23}) \cup (5+\sqrt{23}; +\infty)$

$-5-\sqrt{23} \quad -5-\sqrt{10} \quad 5+\sqrt{10} \quad 5+\sqrt{23}$

$-9 > -5-\sqrt{23} > -10$

$-8 > -5-\sqrt{10} > -9$ $\quad \Rightarrow a_1 = -9$

$9 > 5+\sqrt{10} > 8$

$10 > 5+\sqrt{23} > 9$ $\quad \Rightarrow a_1 = 9$

$12 \quad 35$

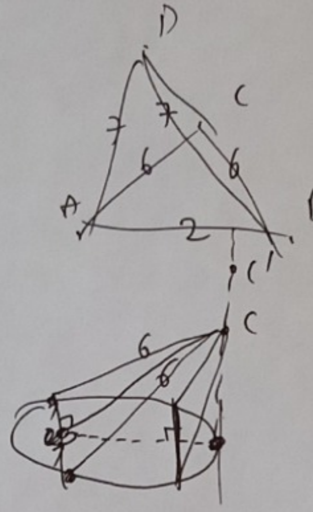
23

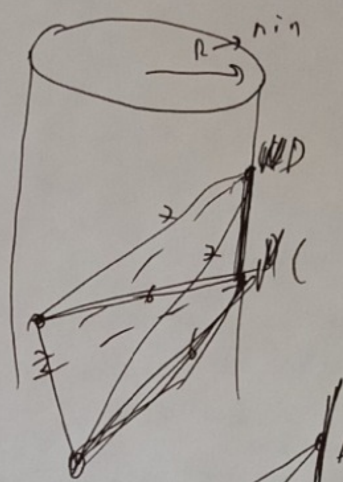
$9+28=37$

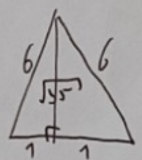
$37-12=25$

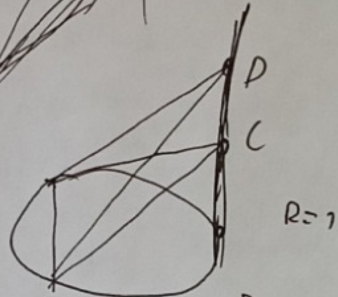
$\begin{array}{r} 91 \\ +\,47 \\ \hline 138 \end{array}$

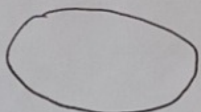
Вар. 13

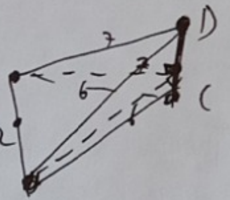


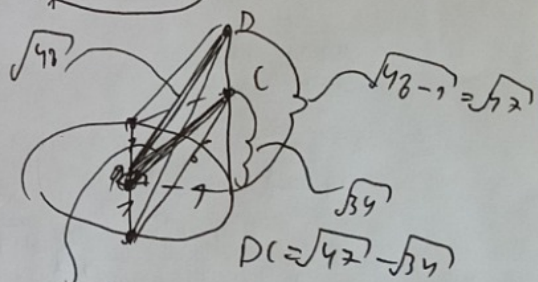




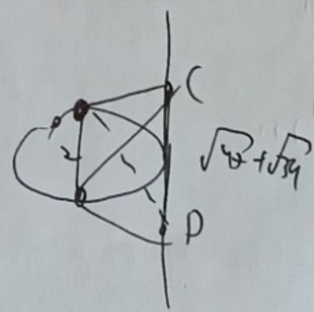






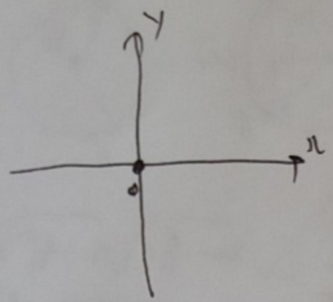


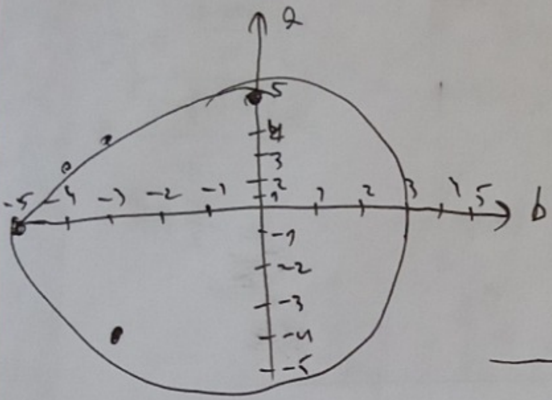
√35 и второй случай:

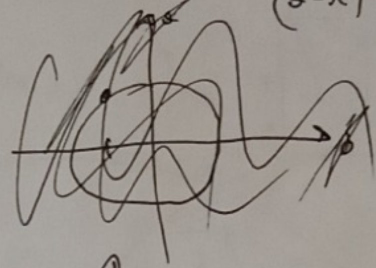


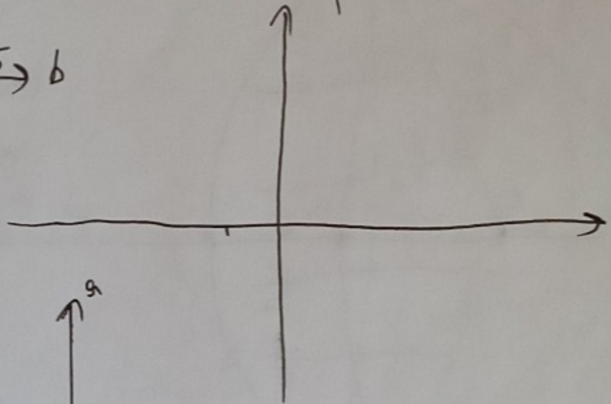
$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$

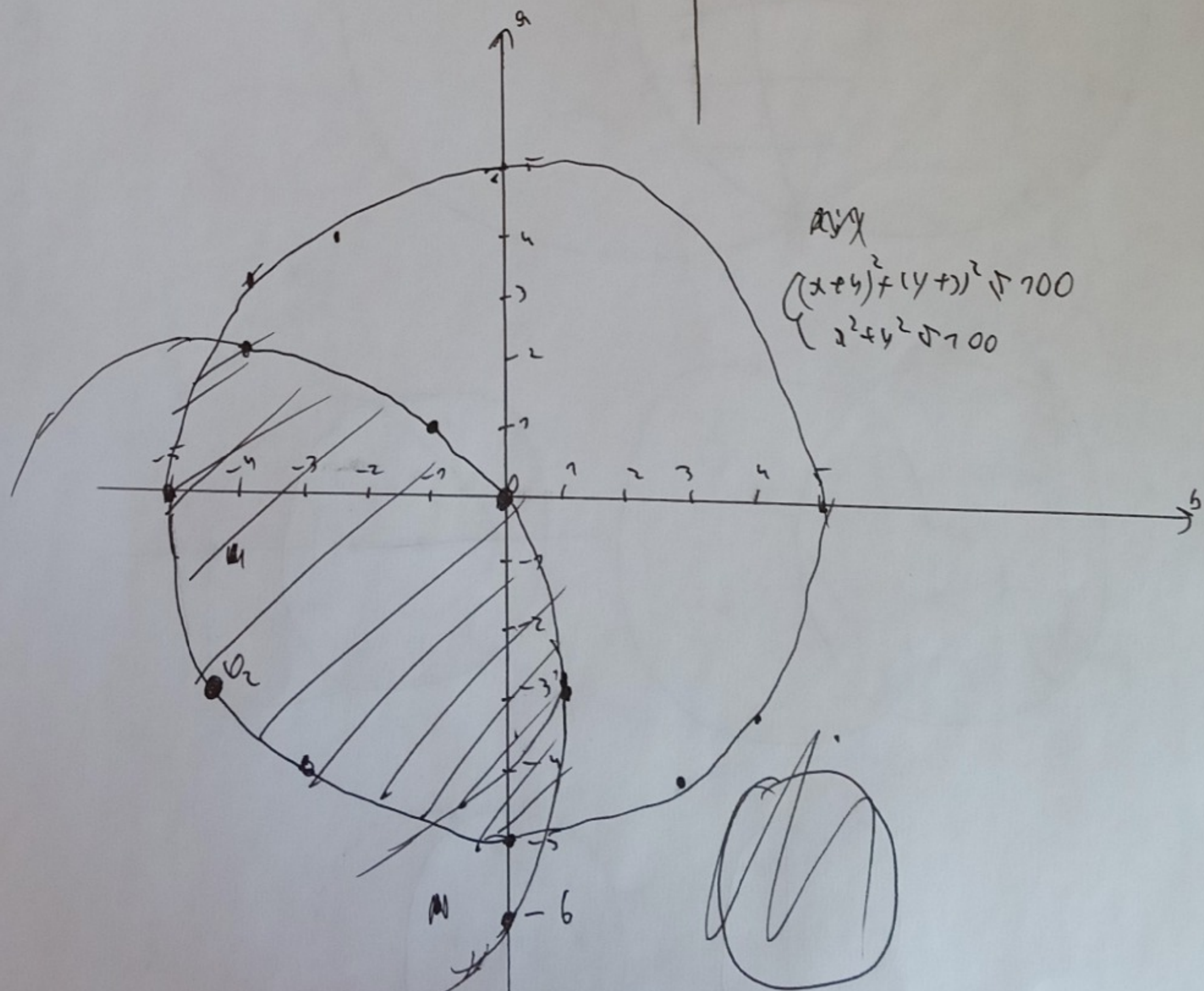
$\begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le -8a-6b \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 5^2 \\ (a+4)^2+(b+3)^2 \le 5^2 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5^2 \\ (a-x)^2+(b-y)^2 \le 5^2 \end{cases}$











$\begin{cases} (x+4)^2+(y+3)^2 \le 100 \\ x^2+y^2 \le 100 \end{cases}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102778**

ID профиля: **201891**

Вариант 19

Чистовик (1)

№4

1) Ясно, что среди простых делителей a, b, c только числа 3 и 7, ведь иначе НОК(a,b,c) делился бы на это простой делитель, отличный от 3 и 7.

Тогда числа a, b, c имеют вид:

$a = 3^{a_1}\cdot 7^{a_2}$ $\quad b = 3^{b_1}\cdot 7^{b_2}$ $\quad c = 3^{c_1}\cdot 7^{c_2}$ $\quad a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ и ≥ 0.

2) $НОД(a,b,c) = 3^{\min(a_1,b_1,c_1)}\cdot 7^{\min(a_2,b_2,c_2)} = 3^1\cdot 7^1$

$НОК(a,b,c) = 3^{\max(a_1,b_1,c_1)}\cdot 7^{\max(a_2,b_2,c_2)} = 3^{17}\cdot 7^{15}$

$\Downarrow$

$\min(a_1,b_1,c_1)=1 \qquad \min(a_2,b_2,c_2)=1$

$\max(a_1,b_1,c_1)=17 \qquad \max(a_2,b_2,c_2)=15$

3) Среди a_1, b_1, c_1 два уже заданы и равны 1 и 17. А третье лежит между ними, т.е. от 1 до 17. Значит число вариантов выбрать 3 числа в случае упорядоченной в порядке неубывания тройки: 17.

Тогда всего вариантов: если среднее 1 или 17, то $2\cdot C_3^2 = 6$ (2 элемента одинаковые)

если среднее от 2 до 16, то $15\cdot 3! = 15\cdot 6 = 90$

Тогда в итоге: $90+6=96$ вариантов для тройки (a_1, b_1, c_1)

4) По аналогии с пунктом (3) среднее число от 1 до 15.

если оно 1 или 15, то вариантов тройки (a_2, b_2, c_2): $2\cdot C_3^2 = 6$

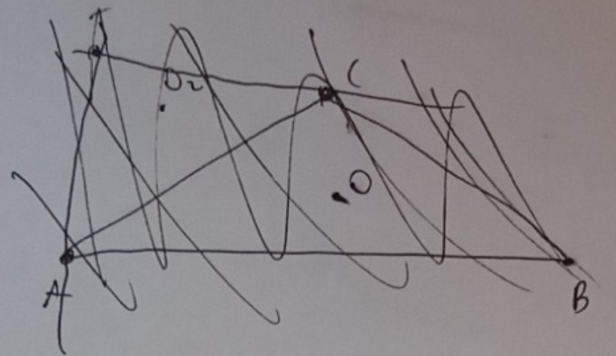
если от 2 до 14, то $13\cdot 3! = 13\cdot 6 = 78$

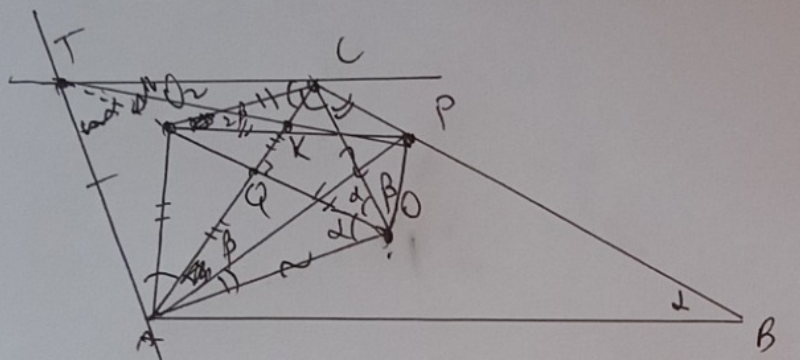
итого: $78+6=84$ вариантов для тройки (a_2, b_2, c_2)

5) Т.к. тройки (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) не зависят друг от друга, то по правилу произведения общее число вариантов:

$S = 90\cdot 78 = 7020$

№6 чистовик (3)





1) $\triangle AO_2O = \triangle CO_2O$ по трём сторонам ($AO_2 = O_2O = O_2C$, $AO = OC$) $\Rightarrow \angle AOO_2 = \angle O_2OC (= \alpha) \Rightarrow$
~~$\Rightarrow OO_2$ — биссектриса $\triangle A$~~ Пусть $O_2O \cap AC = Q$, тогда QO — биссектриса $\triangle ACO$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow QO$ — медиана и высота $\triangle ACO \Rightarrow AQ = QC$, $AQ \perp QO \Rightarrow O_2Q$ — медиана, высота, биссектриса $\triangle AO_2C$.

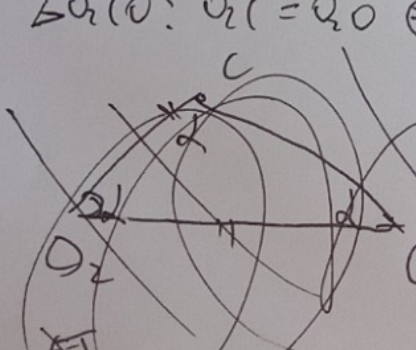
2) $TA = TC$, как отрезки касательных. TQ — медиана $\triangle ATC$, $\Rightarrow TQ$ — его высота и медиана $\Rightarrow$
$\Rightarrow TQ \perp AC$, но и $O_2Q \perp AC \Rightarrow T \in O_2O$.

3) $S(APK) = 10$ $S(CPK) = 6 \Rightarrow S(ACP) = 10 + 6 = 16 \Leftrightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{S(ACP)}{S(CKP)} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$,
пусть $AC = 8x$, тогда $KC = 3x$, $QK = x$, $AQ = 4x$.

~~4) $\angle CO_2P = \angle CAP$, т.к. опираются на одну дугу в окружности с центром в O_2.~~

4) $\angle QCO = 90^\circ - \alpha \Leftrightarrow \angle TCQ = \alpha$.

$\triangle O_2CO$: $O_2C = O_2O \Leftrightarrow \angle O_2CO = \alpha$ ~~$\Rightarrow \angle O_2CQ = 3\alpha$ ... $= 90^\circ \Rightarrow \angle CO_2Q = 3\alpha$ и $\Rightarrow 4\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \angle AQK = 90^\circ$, $\angle CO_2Q = 90^\circ$, $\angle CQO = 90^\circ \Rightarrow Q \equiv O_2$~~



5) $\angle PAO = \angle OCP$, как опираю. на дугу OP

6) $S(ABC) = \frac{CB}{CP} \cdot S(ACP) = \frac{CB}{CP} \cdot 16$

1) числа делятся только на 3 и 7 из простых

$(a,b,c) = 3^1 \cdot 7^1$

$[a,b,c] = 3^{17} \cdot 7^{15}$

2) $a = 3^{a_1} \cdot 7^{a_2}$ $b = 3^{b_1} \cdot 7^{b_2}$ $c = 3^{c_1} \cdot 7^{c_2}$

НОД$(a,b,c) = 3^{\min(a_1,b_1,c_1)} \cdot 7^{\min(a_2,b_2,c_2)}$

НОК$(a,b,c) = 3^{\max(a_1,a_2,a_3)} \cdot 7^{\max(b_1,b_2,b_3)}$

$\min(a_1,a_2,a_3) = 1$ $\min(b_1,b_2,b_3) = 1$

$\max(a_1,a_2,a_3) = 17$ $\max(b_1,b_2,b_3) = 15$

не ум. общности $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ ....

$15 \cdot 6 = 90$

1 1 17 | 1 2 17 | 1 1 2 17 | 11 17

1 17 1 | 1 17 2 | ... | 1 17 1

17 1 1 | ... 6 вар | 3 | 17 1 1

3

$\log_{3}^{5}(\frac{7}{4})^2 71$

$\log_{0{,}5}(0{,}5) = 1$

$\log_{1{,}5^2}($

$\log(\frac{x}{2}-1)^2$ $\left(\underbrace{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}_{a}\right)$, $\log_{\underbrace{x-\frac{11}{4}}_{b}}\left(\underbrace{\frac{x}{2}-1}_{c}\right)$ $\log_{\underbrace{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}_{a}}\left(\underbrace{x-\frac{11}{4}}_{b}\right)^2$

1 1 2
1 2 1
2 1 1

$\frac{6}{4}-\frac{1}{4}$

$\frac{x}{2} = \frac{10}{4}$ $x = \frac{10}{2} = 5$

$\log_{0{,}5^2}(\frac{5}{4})$ $\log_{\frac{5}{4}}(\frac{7}{4})^2$ $\log_{c^2} a$ $\log_{b^2} c$ $\log_a b^2$

ОДЗ: $\begin{cases} c>0, c\neq 1 \\ a>0, a\neq 1 \\ b\neq 0, b>0, b\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c>0, c\neq 1 \\ a>0, a\neq 1 \\ b>0, b\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-1>0, \frac{x}{2}-1\neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0, \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1 \\ x-\frac{11}{4}>0, x-\frac{11}{4}\neq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\log_{(\frac{3}{4})^2}(\frac{3}{2})$

$n_1 = \log_{c^2} a = \frac{1}{2}\log_c a = \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln a}{\ln c}$

$n_2 = \log_{b^2} c = 2\log_b c = 2\cdot\frac{\ln c}{\ln b}$

$n_3 = \log_a b^2 = 2\log_a b = 2\cdot\frac{\ln b}{\ln a}$

$64-60 \Rightarrow$ $\begin{cases} x>2, x\neq 4 \\ x>\frac{1}{2}, x\neq\frac{5}{2} \\ x>\frac{11}{4}, x\neq\frac{15}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{11}{4}=2\frac{3}{4} \\ x\neq\{4;\frac{5}{2};\frac{15}{4}\} \end{cases} \Rightarrow$

$x = \frac{8\pm 2}{2} = \{3;5\}$ $\Rightarrow$ $x > 2\frac{3}{4}$, $x \neq \{4; \frac{15}{4}\}$

$x-2 = 2x-\frac{11}{2}$

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 2$, т.к. два из них пусть два из них равно t, а третье $t+1$

$x = \frac{11}{2}-2 =$

$= \frac{11-4}{2} = \frac{7}{2}$

$t^2(t+1) = 2$

$t^2+2t+2 = 0$

$(t+1)^2+1 = 0$

решений нет

$t^3+t^2-2 = 0$

$(x-5)(x-3)$

$\frac{11}{4}-1 = \frac{3}{4}$

$t=1$ — методом подбора

$\frac{t^3+t^2-2}{t^3-t^2}\Big|\frac{t-1}{t^2+2t+2}$

$2t^2-2$

$2t^2-2t$

$2t-2$

$2n_1 = \frac{a_2}{c_1}$

$\frac{1}{2}n_2 = \frac{c_1}{b_1}$

$\frac{1}{2}n_3 = \frac{b_1}{a_1}$

$c_1 = \frac{a_1}{2n_1}$

$b_1 = \frac{1}{2}n_3 \cdot a_1$

$\frac{1}{2}n_2 = \frac{a_1}{2n_1}, \frac{2}{n_3 a_1} = \frac{1}{n_3 n_1}$

$\log_{(\frac{3}{4})^2}(\frac{3}{2})$

Вывод: $t = 1$! значит два числа равны 1, а третье 2.

$2{,}5 - \frac{1}{4} = 2{,}25$

$2{,}5 - 1 = 1{,}5$

$\log_{1{,}5^2} 2{,}25$

$n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$

$\frac{20-11}{4} = \frac{9}{4}$

$2n_1 = \frac{\ln a}{\ln c}$ $\frac{n_3}{2} = \frac{\ln b}{\ln a}$

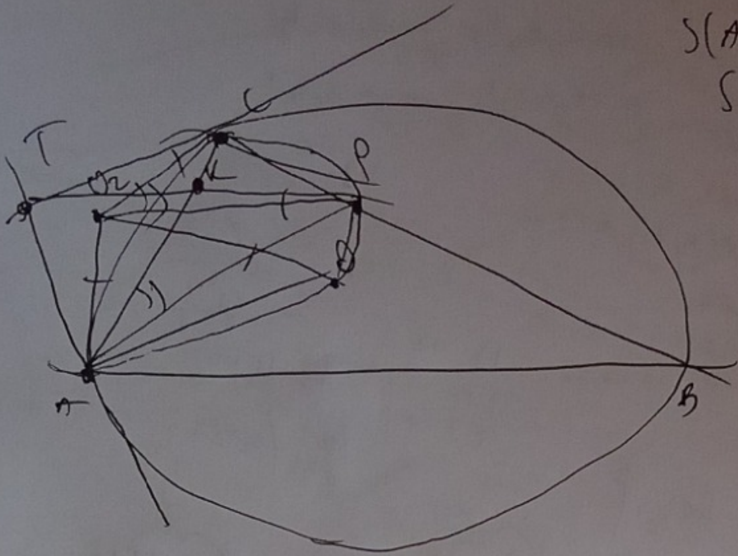
$\frac{n_2}{2} = \frac{\ln c}{\ln b}$

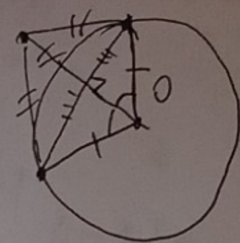
TC, AT — кас к ω

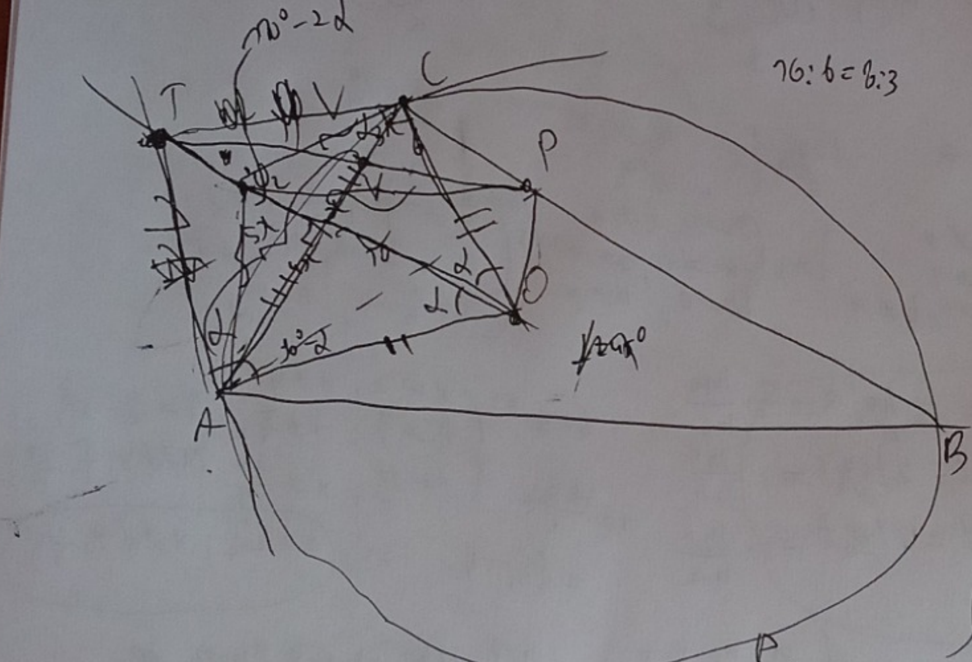
$S(APK) = 10$

$S(CPK) = 6$

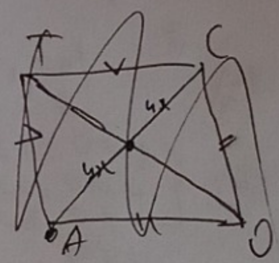
$S(ABC) = ?$

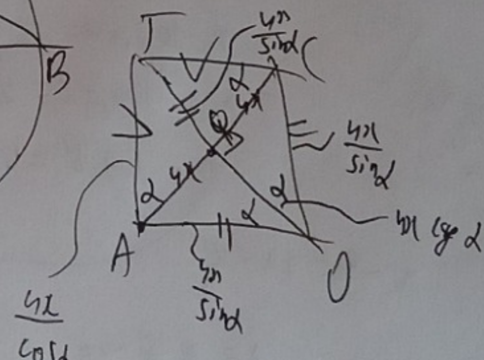


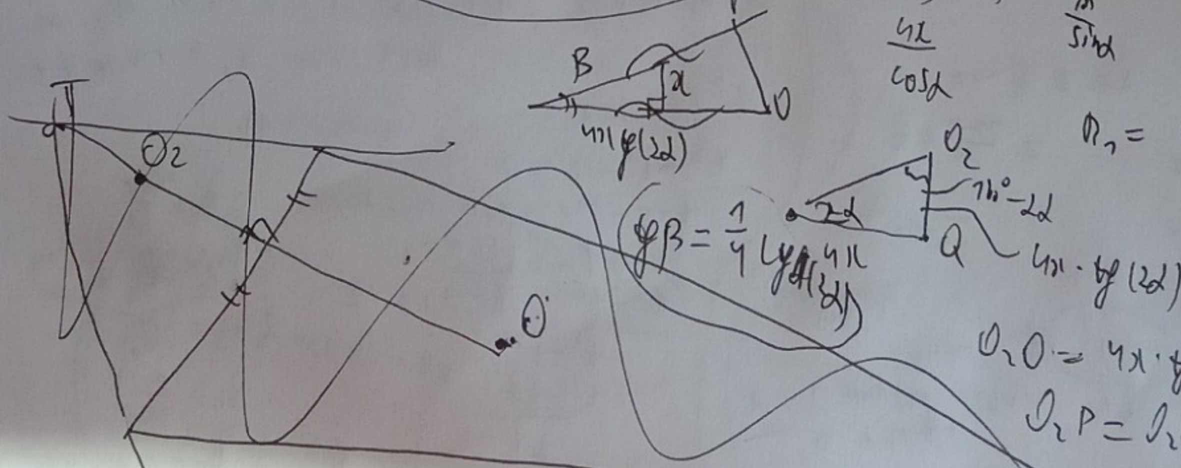




$10 : 6 = 5 : 3$







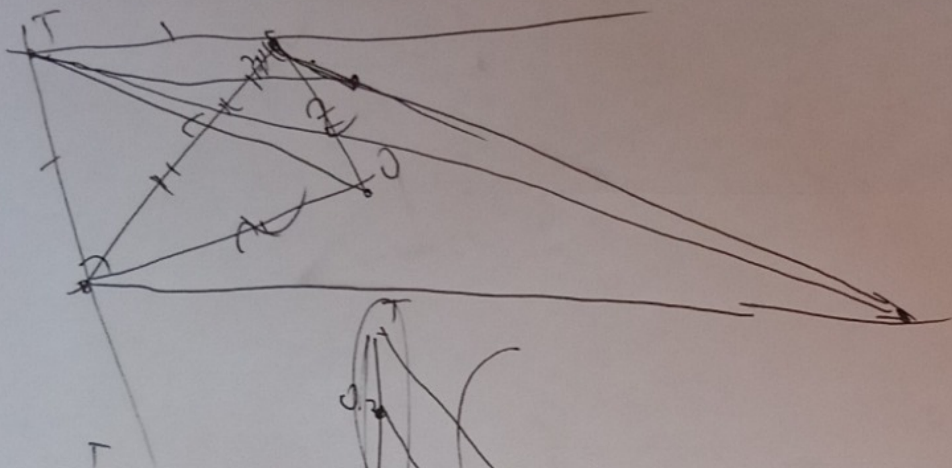
$O_1 = \frac{4x}{\sin\alpha}$

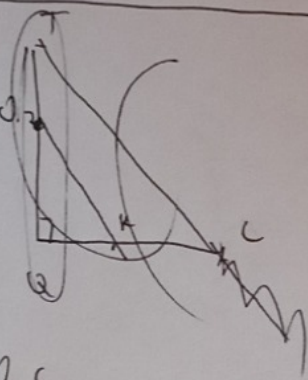
$tg\beta = \frac{1}{4}\,tg(2\alpha)$

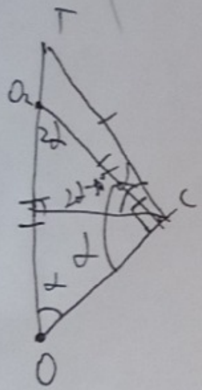
$O_2O = 4x \cdot tg(2\alpha) + 4x \cdot tg\,\alpha$

$O_2P = O_2O$

21102778 (U201891 M1304361)

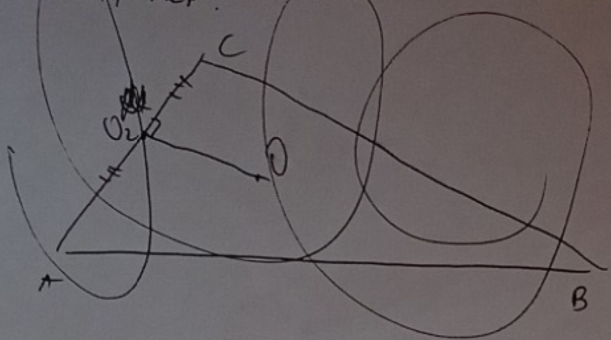






OO_2C

получаем:



Чистовик (2)

$\boxed{№5}$

1) $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

пусть $a=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$, $b=x-\frac{11}{4}$, $c=\frac{x}{2}-1$, тогда исходные числа:

$\log_{c^2} a$, $\log_{\sqrt{b}} c$, $\log_a b^2$

ОДЗ: $\begin{cases} a>0 \\ c>0 \\ b^2>0 \\ c^2>0, c^2\neq 1 \\ \sqrt{b}>0, \sqrt{b}\neq 1 \\ a>0, a\neq 1 \\ b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>0, b\neq 1 \\ a>0, a\neq 1 \\ c>0, c\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0, \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1 \\ x-\frac{11}{4}>0, x-\frac{11}{4}\neq 1 \\ \frac{x}{2}-1>0, \frac{x}{2}-1\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, x\neq \frac{5}{2} \\ x>\frac{11}{4}, x\neq\frac{15}{4} \\ x>2, x\neq 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{x>\frac{11}{4},\ x\notin\{\frac{15}{4};4\}}$

2) $n_1=\log_{c^2} a=\frac{1}{2}\log_c a=\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln a}{\ln c}$

$n_2=\log_{\sqrt{b}} c=2\log_b c=2\cdot\frac{\ln c}{\ln b}$

$n_3=\log_a b^2=2\log_a b=2\cdot\frac{\ln b}{\ln a}$

$\Rightarrow n_1\cdot n_2\cdot n_3=2\cdot\frac{\ln a}{\ln c}\cdot\frac{\ln c}{\ln b}\cdot\frac{\ln b}{\ln a}=2$

пусть два числа из трёх равны t, а третье $t+1$. тогда

$t^2(t+1)=2$

$t^3+t^2-2=0$

подбором $t=1$ — корень

$$\begin{array}{l|l} t^3+t^2-2 & t-1 \\ \underline{t^3-t^2} & t^2+2t+2 \\ \quad 2t^2-2 & \\ \quad \underline{2t^2-2t} & \\ \qquad 2t-2 & \end{array}$$

$t^2+2t+2=(t+1)^2+1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ других решений нет

Вывод: два числа из трёх равны 1, а третье равно 2

3) возможно 3 случая:

а) $n_1=1$ $n_2=1$ $n_3=2$. тогда $\frac{\ln a}{\ln c}=2$, $\frac{\ln c}{\ln b}=\frac{1}{2}$, $\frac{\ln b}{\ln a}=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln b=\ln a \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4} \Leftrightarrow x=5$

проверим, подходит ли этот корень

$\log_{(\frac{5}{2}-1)^2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{1{,}5^2}(2{,}25)=1$

$\log_{\sqrt{5-\frac{11}{4}}}\left(\frac{5}{2}-1\right)=\log_{\frac{3}{2}}(1{,}5)=1$

$\log_{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}}\left(5-\frac{11}{4}\right)^2=\log_{\frac{9}{4}}\left(\left(\frac{9}{4}\right)^2\right)=2$

$\Rightarrow$ этот корень подходит

б) $n_1=1$ $n_2=2$ $n_3=1$. тогда $\frac{\ln c}{\ln b}=1 \Leftrightarrow c=b \Leftrightarrow \frac{x}{2}-1=x-\frac{11}{4} \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}$

$\log_{(\frac{7}{4}-1)^2}\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{9}{16}}\left(\frac{3}{2}\right)\neq 1$, т.к. $\log_{\frac{9}{16}}\left(\frac{9}{16}\right)=1$. $\Rightarrow$ корень не подходит

в) $n_1=2$ $n_2=1$ $n_3=1$. тогда $2\cdot\frac{\ln c}{\ln b}=1 \Rightarrow \ln c^2=\ln b \Rightarrow c^2=b \Rightarrow \left(\frac{x}{2}-1\right)^2=x-\frac{11}{4}$

$\frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-2x+\frac{15}{4}=0 \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \Rightarrow x\in\{3;5\}$

проверим $x=3$: $\log_{(\frac{3}{2}-1)^2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{0{,}25}\left(\frac{5}{4}\right)\neq 2 \Leftrightarrow$ не подходит!

~~Проверим $x=5$:~~ $x=5$ уже проверили

Ответ: $x=5$.