Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102721**

ID профиля: **326452**

Вариант 19

Чистовик

№1

Пусть d — разность этой арифметической прогрессии.

$$S = a_1 + (a_1+d) + \ldots + (a_1+13d) = 14a_1 + \frac{13\cdot 14}{2}\cdot d = 14a_1 + 91d$$

По условию $d > 0$ и $\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases}$ (иначе $\exists$ член прогрессии, который не целый) (*)

$$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S+12 \\ a_{11}\cdot a_{15} < S+47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > S+12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) \leq S+47 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > S+12 \\ a_1^2 + 24\cdot a_1\cdot d + 140d^2 < S+47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 24a_1\cdot d + 140d^2 > S+12+12d^2 \\ a_1^2 + 24\cdot a_1 \cdot d + 140d^2 < S+47 \end{cases}$$

Следовательно: $S+47 > S+12+12d^2 \Leftrightarrow 12d^2 < 35$

~~$d < 1{,}2$~~ ($d>0$ по условию)

$\underline{d=1}$ (при $d \geq 2$ левая часть > 35)

Рассмотрим изначальные условия и подставим $d=1$:

$$\begin{cases} S = 14a_1 + 91 \\ a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$D = 100 - 8 = 92$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$

$$\Leftrightarrow a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5) \cup (-5; -5+\sqrt{23})$$

~~Ответ: $a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5) \cup (-5; -5+\sqrt{23})$~~

При этом $a_1 \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ Т.к. $\sqrt{23} < 5$, но больше 4, то a_1 может принимать только следующие целые значения: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

($a_1 = -5$ — выколотое значение)

$\Downarrow$

Ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

---

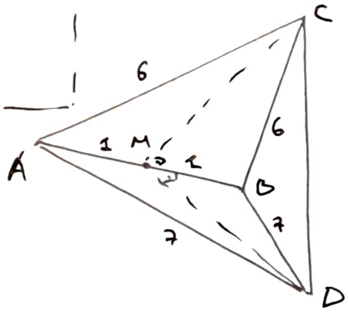
* Примечание: $\begin{cases} a_1 + d \in \mathbb{Z} \\ a_1 + 2d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$. А поскольку $\begin{cases} a_1 + d \in \mathbb{Z} \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$.

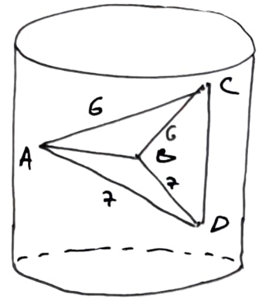
Таким образом, $\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z} \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases}$ из условия.

Дано:
$AC=BC=6$
$AD=BD=7$
$AB=2$
Найти:
$CD=?$

Чистовик

№2

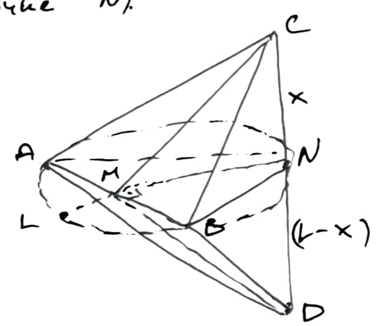




Заметим, что $\triangle ACB$ и $\triangle ABD$ — р/б $\triangle$. $\Rightarrow$ Если M — середина AB, то CM — высота в $\triangle ACB$ и DM — высота в $\triangle ABD$. Из симметрии плоскость CMD содержит ось цилиндра, т.к. тетраэдр $ABCD$ симметричен относительно этой плоскости и CD параллельно оси цилиндра. $\Rightarrow$ $AB \perp$ оси цилиндра.

Заметим, что $CM = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$; $MD = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$ (т.к. $AM=MB=1$).

Проведем через AB плоскость, перпендикулярную CD. $\Rightarrow$ Такая плоскость образует сечение цилиндра в виде окружности, т.к. такая плоскость параллельна основаниям цилиндра. (пусть эта плоскость пересекает CD в точке N).



Тогда прямая MN содержит центр такой окружности, т.к. $MN \perp AB$ $\Rightarrow$ Если L — точка пересечения MN и ~~дугой~~ дугой $\overset{\frown}{AB}$ окружности, то L — середина дуги $\overset{\frown}{AB}$.

Заметим, что $LM \cdot MN = AM \cdot MB$ (т.к. $ALBN$ — окружность)

$$\begin{cases} LM \cdot MN = 1 \\ LM + MN = 2 \cdot R \end{cases}$$ ($LN \parallel$ основанию и содержит центр сечения)

Пусть x — длина CN $(x \geq 0)$; l — длина CD.

1) $ND = l-x$ (БпО будем считать, что C и D лежат в разных ~~полупространствах~~ полупространствах ~~отн~~ относительно плоскости $LANB$ — иначе симметрично отразим C — радиус цилиндра будет оставаться неизменным)

2) $MN = \sqrt{35-x^2} = \sqrt{48-(l-x)^2} \Leftrightarrow l^2 - 2lx - 13 = 0$

3) $$\begin{cases} LM = \dfrac{1}{\sqrt{35-x^2}} \\ 2R = LM + MN \end{cases} \Rightarrow \quad 2R = \frac{1}{\sqrt{35-x^2}} + \sqrt{35-x^2} \geq 2,$$ причём по неравенству Коши равенство достигается только при $\sqrt{35-x^2} = 1$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{35-x^2}} = \sqrt{35-x^2}\right)$

$\Leftrightarrow$ $35 - x^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $x = \sqrt{34}$

$$\begin{cases} l^2 - 2lx - 13 = 0 \\ x = \sqrt{34} \end{cases} \Leftrightarrow \quad l^2 - 2\sqrt{34} \cdot l - 13 = 0$$

$D = 136 + 52 = 188$

$$l_1 = \frac{2\sqrt{34} \pm \sqrt{188}}{2} = \sqrt{34} + \sqrt{47} \quad (l > 0);$$

При отражении C радиус цилиндра не меняется $\Rightarrow$ $l_2 = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{47}$, $\sqrt{47} - \sqrt{34}$.

Чистовик

№ 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ (a^2+b^2)\le \min(-8a-6b,25)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\\ a^2+b^2\le -8a-6b\end{cases}\Leftrightarrow$$

(если $a^2+b^2\le\min(-,-)$, то $\Rightarrow$ a^2+b^2 должно быть $\le$ чем каждое из выражений)

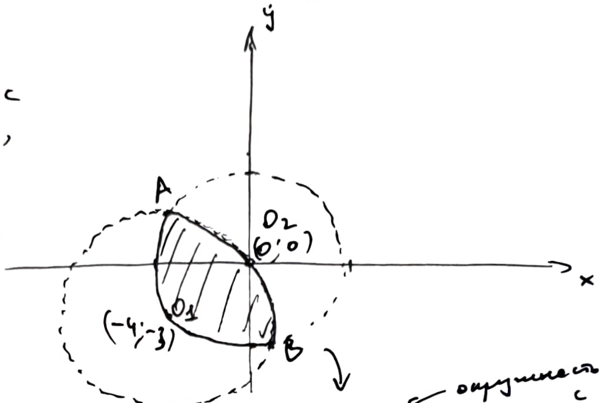
$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le 25\\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25\end{cases}$$

– из этого следует, что a и b могут быть только координатами тех точек, которые лежат внутри и на границе пересечения окружностей с центрами в $(0;0)$ и $(-4;-3)$ и радиусами 5.

Первое неравенство задаёт условие на то, что $(x;y)$ лежит внутри или на границе окружности с центром в $(a;b)$ и радиусом 5. $\Rightarrow$ M состоит из тех точек, которые находятся от заштрихованной области на расстоянии не более 5.

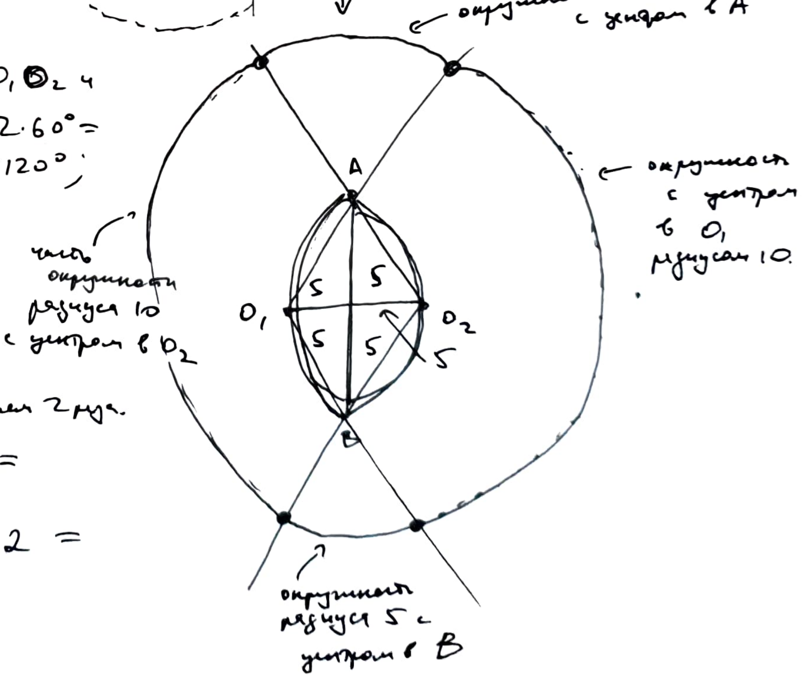
$\Downarrow$

M имеет вид, как обозначено на рисунке справа внизу.



$O_1O_2=5$. $(3^2+4^2=5^2)$. $\Rightarrow$ Т.к. $\triangle AO_1O_2$ и $\triangle BO_1O_2$ – р/с $\triangle$, то $\angle AOB=\angle AO_2O=2\cdot 60^\circ=120^\circ$;

$\angle O_1AO_2=\angle O_1BO_2=60^\circ$



Площадь всей фигуры M равна:

$$S_M=\left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\right)\cdot(\pi\cdot 10^2)\cdot 2+$$

$$+2\left(\frac{60^\circ}{360^\circ}\right)\cdot\pi\cdot 5^2 - S_{O_1AO_2B}=$$ считаем 2 раза.

$$=100\pi\cdot\frac{2}{3}+25\pi\cdot\frac{1}{3}-25\cdot\frac{\sqrt3}{4}\cdot 2=$$

$$=75\pi-\frac{25\cdot\sqrt3}{2}$$

Ответ: $75\pi-\dfrac{25\sqrt3}{2}$

Черновик

$a,\ a+d,\ \dots\ a+13d$

$13\cdot 7 =$

1) $a + \dots + a+13d = 14\cdot a + \frac{13\cdot 14}{2}\cdot d = S$

2) $(a+8d)(a+16d) > S+12$ $\qquad a = ?$

3) $(a+10d)(a+14d) < S+47$

$a \in \mathbb{Z}$

$d \in \mathbb{Z}$ $\qquad a = ?$

$14a + 91d = S$

$a^2 + 24ad + 128d^2 > 14a + 91d + 12$

$a^2 + 24ad + 140d^2 < 14a + 91d + 47$

$a^2 + 24ad + 140d^2 > 14a + 91d + 12 + 12d^2$

$14a + 91d + 47 > 14a + 91d + 12 + 12d^2$

$35 > 12d^2 \Leftrightarrow d^2 < \frac{35}{12} \Rightarrow d^2 < 3 \Rightarrow |d| = \pm 1;\ \pm 2 \Rightarrow d = 1;\ 2$

$16\cdot 8 = 80 + 48$

$92 : 4 = 20 + 3$

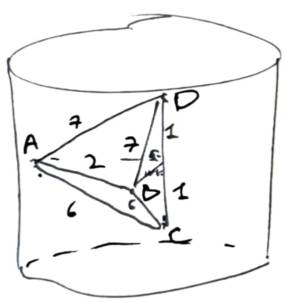
$a_1^2 + 10a_1 + 2 \le 0$

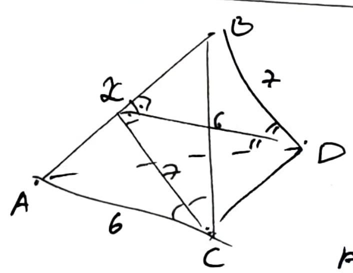
$D = 100 - 8 = 92$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$

$x^2 + 24x + 128 > S + 12$

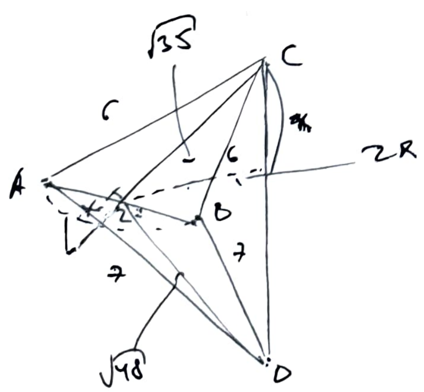
$91 + 47 = 98 + 40 = 138$

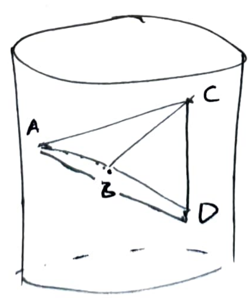




$-\sqrt{23}$

AB ∥ основанию





$x(2R - x) = 1$ (т. бабочки)

$2Rx - x^2 = 1$

$2R - x \neq \sqrt{35}$

$1 \neq \sqrt{35}\cdot x$

$x^2 - 2Rx + 1 = 0$

$D = 4R^2 - 4 = 4(R^2 - 1)$

$x = \frac{2R \pm 2\sqrt{R^2-1}}{2} = R - \sqrt{R^2-1}$

Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$

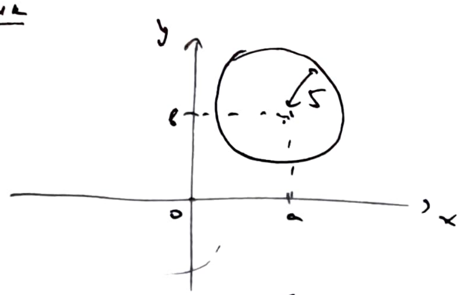
$\begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le -8a-6b \end{cases} \Leftrightarrow$

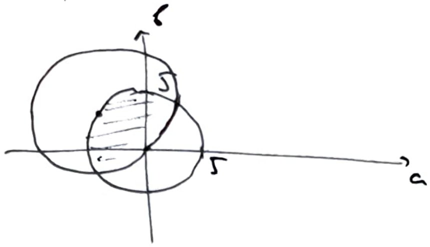
$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2 \le 25$

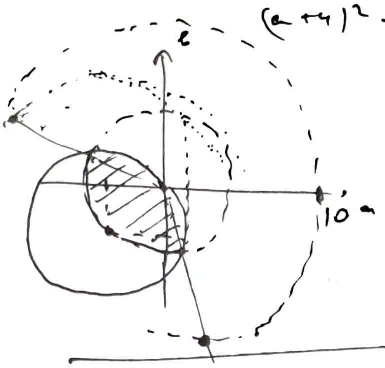
$(a^2+8a)+(b^2-6b) \le 0$

$(a^2+8a+16)$

$(a+4)^2+(b-3)^2 \le 16+9$







раздуть на 5.

$MN=1$

$188=4\cdot 47$

$CD=c$ $\quad z;\ c-z$

$\sqrt{35-z^2} = \sqrt{48-c^2-z^2+2cz}$

$\Leftrightarrow 35-z^2 = 48-c^2-z^2+2cz$

$c^2-2cz-13=0$

$2R = \sqrt{35-z^2} + \frac{1}{\sqrt{35-z^2}}$

$2R(1) = \sqrt{34}+\frac{1}{\sqrt{34}}$

$2R(\sqrt{34}) = 2$

$2 < \sqrt{34}+\frac{1}{\sqrt{34}}$

$2 \vee \frac{35}{\sqrt{34}} \quad 4\cdot 34 < 35^2$

$\left(\sqrt{35-z^2}+\frac{1}{\sqrt{35-z^2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{35-z^2}}\cdot(-2z) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(\sqrt{35-z^2})^3}\cdot(-2z) = 0$

$\Leftrightarrow$

$(-z)\cdot\frac{1}{\sqrt{35-z^2}} + \frac{z}{(\sqrt{35-z^2})^3} = 0$

$\Leftrightarrow$

1) $z=0$

2) $\frac{1}{(35-z^2)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z}{(\sqrt{35-z^2})^3} = \frac{z}{\sqrt{35-z^2}}$

$13\cdot 4=$

$4\cdot 34=$

$=120.$

$\Leftrightarrow 35-z^2=1 \Rightarrow z^2=34 \Leftrightarrow z=\sqrt{34}$

$c^2-2cz-13=0$

$c^2-2z-13=0$

$2R = \sqrt{35-z^2} + \frac{1}{\sqrt{35-z^2}} \ge 2$

$4\cdot 34=$

$35-x^2 = 48-(c-x)^2$

$\Leftrightarrow$

$-x^2 = 13-c^2-x^2+2cx$

$c^2-2cx-13=0$

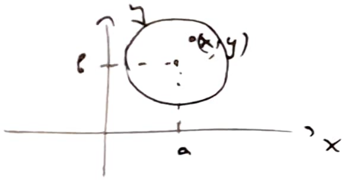
$D=$

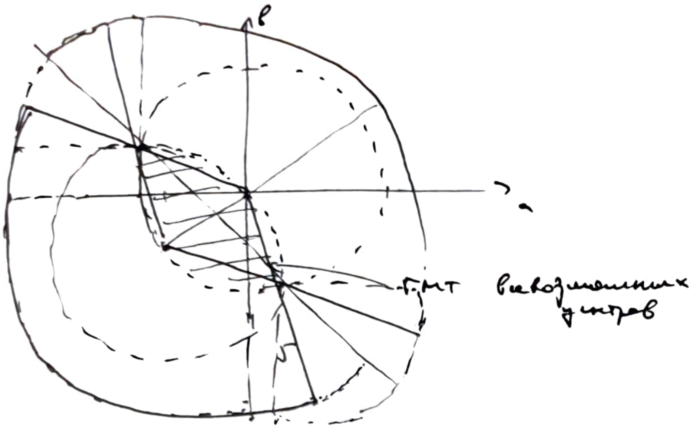
$c^2-2\sqrt{34}c-13=0$

$D = 136+52=188$

Черновик

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$





$a^2+b^2=(a-4)^2+(b-3)^2=25$

$\Leftrightarrow$

$-8a+16+9-6b=0$

$\Leftrightarrow$

$25=6b+8a$

$\cancel{625 = 36b^2+}$ $\quad b=\frac{25-8a}{6}$

$a^2+\frac{64a^2+625-400a}{36}=25$

$100a^2+625-400a=900$

$100a^2-400a-275=0$

$4a^2-16a-11=0$

$D=256+176=$
$=432$

$a=\frac{16\pm\sqrt{432}}{8}=\frac{16-\sqrt{432}}{8};\ \frac{16+\sqrt{432}}{8}$

$432=$
$=4\cdot108=$
$=4\cdot4\cdot26$

$44\cdot4=160+16$

$\frac{16-4\sqrt{26}}{8}=2-\frac{\sqrt{26}}{2}$

$\frac{25-16+4\sqrt{26}}{6}=\frac{9+4\sqrt{26}}{6}$

$k_1k_2=-1$

$k_1 x$ ~~...~~ $-$

$k_1\cdot(-4)=-3$

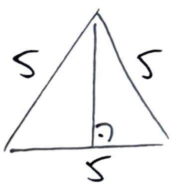
$k_1=\frac{3}{4}$

$k_2=-\frac{4}{3}$

$-2;\ -1,5$

$-\frac{4}{3}\cdot x+b=-1,5$

$100\pi\cdot\frac{2}{3}+50\pi\cdot\frac{1}{3}$



$5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot5\cdot\frac{1}{2}=\frac{25\cdot\sqrt{3}}{4}$

$\frac{200\pi}{3}+\frac{25\pi}{3}=\frac{225\pi}{3}$

$\frac{25\sqrt{3}}{2}$

$\frac{225}{3}=75$

Черновик

$$\frac{a_1+a_1+13d}{2}\cdot 14 = 7\cdot(2a_1+13d) = 14a_1+91d$$

$(a_1+8d)(a_1+$

$a_4+d = 21$

a_1+2d

$a_1^2+10a_1+2=0$

$D = 100-8 = 92 = 23\cdot 4$

$$a_1 = \frac{-10\pm\sqrt{23}\cdot 2}{2} = -5\pm\sqrt{23} \overset{?}{>} -1$$

$\sqrt{23} > 4$ чт.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102721**

ID профиля: **326452**

Вариант 19

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=21 \\ \text{НОК}(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases} \Rightarrow$$ Пусть $a=21x$; $b=21y$; $c=21z$, где $\text{НОД}(x,y,z)=1$.

$$21xyz=3^{17}\cdot 7^{15} \Leftrightarrow xyz=3^{16}\cdot 7^{14}$$

Тройка чисел $(a;b;c)$ однозначно задается степенями вхождения 3 и 7 в числа x,y,z. Заметим, что поскольку $\text{НОД}(x,y,z)=1$, то 3 и 7 могут входить в разложение не более 2-х чисел одновременно.

Набор (x,y,z) задается комбинацией наборов $(\alpha_1;\alpha_2;0)$ и $(\beta_1;\beta_2;0)$, где $(\alpha_1;\alpha_2;0)$ — степени вхождения 3 в (x,y,z); $(\beta_1;\beta_2;0)$ — степени вхождения 7 в $(x;y;z)$

Разберём все случаи:

1) $\begin{cases}\alpha_1>0\\ \alpha_2>0\\ \beta_1>0\\ \beta_2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=16\\ \beta_1+\beta_2=14\end{cases}$. Пар, где $\alpha_1\neq\alpha_2$ всего 7 (неупорядоченных); $\alpha_1=\alpha_2$ — одна пара; Пар $\beta_1\neq\beta_2$ всего 6; $\beta_1=\beta_2$ — одна пара.

Количество упорядоченных троек с такими степенями равно:

$$3!\cdot(7\cdot7\cdot3)+(3!\cdot 7+3\cdot 7)+(3!\cdot 6+3\cdot 6)+(3!+3)=\underline{1008}$$

$\underbrace{3\cdot 7}_{\text{когда } \beta_1=\beta_2}$; $\underbrace{3\cdot 6}_{\text{когда } \alpha_1=\alpha_2}$; $(3!+3)$: $\begin{pmatrix}\alpha_1=\alpha_2\\ \beta_1=\beta_2\end{pmatrix}$

2) $\begin{cases}\alpha_1>0\\ \alpha_2=0\\ \beta_1>0\\ \beta_2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=16\\ \beta_1+\beta_2=14\end{cases}$. Пар $(\beta_1;\beta_2)$ где $\beta_1\neq\beta_2$ всего 6; $(\beta_1=\beta_2)$ — одна.

Упорядоченных троек:

$$\underbrace{3!\cdot(6\cdot 3)}_{\beta_1\neq\beta_2}+\underbrace{3\cdot 2}_{\text{когда } \beta_1=\beta_2}=\underline{114}$$

3) $\begin{cases}\alpha_1>0\\ \alpha_2>0\\ \beta_1>0\\ \beta_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=16\\ \beta_1=14\end{cases}$. Аналогично предыдущему пункту кол-во упорядоченных троек равно:

$$\underbrace{(3!\cdot 7\cdot 3)}_{\alpha_1\neq\alpha_2}+\underbrace{3\cdot 2}_{\alpha_1=\alpha_2}=\underline{132}$$

4) $\begin{cases}\alpha_1>0\\ \alpha_2=0\\ \beta_1>0\\ \beta_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=16\\ \beta_1=14\end{cases} \Rightarrow$ кол-во упорядоченных троек равно:

$$3+3!=\underline{9}$$

Т.к. ни один способ не посчитан дважды, то:

Ответ: $\underline{1263}$

Чистовик

№5

$$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right);\quad \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right);\quad \log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

ОДЗ:
$$\begin{cases} (\frac{x}{2}-1)^2>0 \\ (\frac{x}{2}-1)^2\neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1 \\ x-\frac{11}{4}>0 \\ x-\frac{11}{4}\neq 1 \\ \frac{x}{2}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 4 \\ x\neq 0 \\ x>\frac{1}{2} \\ x\neq\frac{1}{2} \\ x>\frac{11}{4} \\ x\neq\frac{15}{4} \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{11}{4};\frac{15}{4}\right)\cup\left(\frac{15}{4};4\right)\cup(4;+\infty)$$

ни один из логарифмов не равен 0

Пусть $(\frac{x}{2}-1)=a$; $(x-\frac{11}{4})=b$; $(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=c$ (из ОДЗ: $a,b,c>0$ и $\neq 1$)

$\Downarrow$

Условие переписывается как: $(\log_{a^2} c;\ \log_{\sqrt{b}} a;\ \log_c b^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\frac{1}{2}\cdot\log_a c;\ 2\cdot\log_b a;\ 2\cdot\log_c b)$. Требуется:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{2}\log_a c = 2\log_b a \\ 2\log_b a+1 = 2\log_c b \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} \frac{1}{2}\log_a c = 2\log_c b \\ 2\log_b a = 2\log_c b+1 \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} 2\log_c b = 2\log_b a \\ 2\log_b a+1 = \frac{1}{2}\log_a c \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a c = 2\log_b a \\ 2\log_b a+1 = 2\log_c b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a c = 4\log_b a \\ 2\log_b a+1 = 2\log_c b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_b c = 4\log_b^2 a \\ 2\log_b a+1 = 2\log_c b \end{cases}$

$2\log_b a+1 = \dfrac{2}{4\log_b^2 a} \Leftrightarrow 4\log_b^3 a+2\log_b^2 a-1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_b a-\frac{1}{2})\cdot(2\log_b^2 a+2\log_b a+1)=0$

не имеет решений, т.к. $D<0$ ($=4-8=-4$)

$\Downarrow$

$\log_b a=\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$a=\sqrt{b} \Leftrightarrow \frac{x}{2}-1=\sqrt{x-\frac{11}{4}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow$

$x^2-8x+15=0$

$D=4$

$\begin{cases} x=3 \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{8\pm 2}{2}=3;5$

(продолжение на следующей странице)

Чистовик

(продолжение задачи №5)

2) $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a c = 2\log_c b \\ 2\log_b a = 2\log_c b + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \log_a c = 4\log_c b \\ 2\log_b a = 2\log_c b + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4\log_c^2 b = \log_a b \\ \frac{2}{\log_a b} = 2\log_c b + 1 \end{cases} \iff$

$\iff \frac{2}{4\log_c^2 b} = 2\log_c b + 1 \iff 1 = 4\log_c^3 b + 2\log_c^2 b$. По предыдущему пункту такое кубическое уравнение равносильно: $\log_c b = \frac{1}{2}$

$\iff b = \sqrt{c}$

$\iff \left(x - \frac{11}{4}\right) = \sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}}$

$\iff x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{121}{16} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \iff x^2 - 6x + \frac{117}{16} = 0$

$D = 36 - \frac{117}{4} = \frac{27}{4}$

$\iff x = \frac{6 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} = 3 \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$

т.к. $3 - \frac{3\sqrt{3}}{4} < \frac{11}{4}$, то $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходит только $3 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$

3) $\begin{cases} 2\log_c b = 2\log_b a \\ 2\log_b a + 1 = \frac{1}{2}\log_a c \end{cases} \iff \begin{cases} \log_c b = \log_b a \\ 4\log_b a + 2 = \log_a c \end{cases} \iff \begin{cases} \log_c a = \log_b^2 a \\ 4\log_b a + 2 = \frac{1}{\log_b^2 a} \end{cases} \iff$

$\iff 4\log_b^3 a + 2\log_b^2 a - 1 = 0$. Аналогично предыдущим пунктам, такое кубическое ур-е равносильно: $\log_b a = \frac{1}{2} \iff a = \sqrt{b}$

$\iff \frac{x}{2} - 1 = \sqrt{x - \frac{11}{4}}$

$\iff \frac{x^2}{4} + 1 - x = x - \frac{11}{4}$

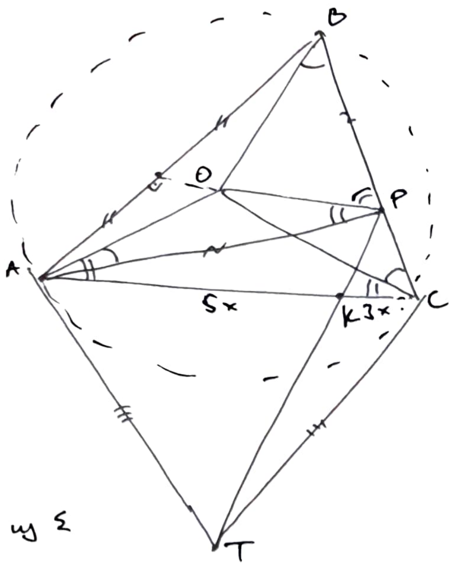
$\iff$ аналогично пункту 1: $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 5 \\ x = 3 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$

Чистовик

№6

Дано:
$S_{\triangle APK}=10$
$S_{\triangle CPK}=6$
Найти:
1) $S_{\triangle ABC}$?
2) AC?



1) $\angle OBC=\angle OCB$, т.к. $BO=OC$.
⇓
$\angle OCB=\angle OAP$, т.к. $AOPC$ — вписанный

2) $\angle OAC=\angle OCA$ $(OA=OC)$. ⇒
⇒ $\angle OAC=\angle APO=\angle OPB$, т.к. $AOPC$ — вписанный

3) $\triangle AOP=\triangle BOP$ по двум углам (OP – общая сторона; $\angle AOP=\angle POB$ из Σ углов $\triangle$; $\angle OPA=\angle OPB$)
⇓
$AP=BP$; $OP\perp AB$ (OP – биссектриса в р/б $\triangle APB$).

4) Т.к. $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}}=\frac{10}{6}$ ⇒ $\frac{AK}{KC}=\frac{5}{3}$

5) $AT=TC$ — как отрезки касательных; $\angle TAC=\angle TCA=\angle ABC$ (угол между хордой и касательной)

6) $\triangle ABP\sim\triangle ACT$ ⇒ $\frac{AC}{AB}=\frac{AT}{AP}$. Но заметим, что т.к. $\angle TAP=\angle CAB$, то это условие подобия $\triangle APT$ и $\triangle ABC$. ⇒ $\angle APC=\angle ABC$; $\angle ATP=\angle ACB$ — как углы при подобных сторонах ⇒ $AOPCT$ — одна окружность

7) Из пункта 6) следует, что $\triangle APK\sim\triangle KPC$ ⇒ $\frac{PC}{AT}=\frac{3}{5}$

Аналогично $\frac{AP}{TC}=\frac{5}{3}$ $(\triangle APK\sim\triangle TKC)$ ⇒ $\begin{cases} PC=\frac{3}{5}AT \\ AP=BP=\frac{5}{3}AT \end{cases}$

⇙

8) $\begin{cases} S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot PC\cdot\sin\angle ACB \\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot\sin\angle ACB \end{cases}$ ⇒ $\frac{S_{ABC}}{S_{APC}}=\frac{BC}{PC}=\frac{34}{9}$

Ответ:

Черновик

НОД $(a, b, c) = 21$

НОК $(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$

$a = rx$
$b = ry$
$c = rz$

$r = 21$

НОД $(x, y, z) = 1$

$rxyz = 3^{17} \cdot 7^{15}$ $21 \cdot xyz = 3^{17} \cdot 7^{15}$

$xyz = 3^{16} \cdot 7^{14}$

отдельно 3, отдельно 7. 3 только в двух; 7 только в двух

$k + t = 16$ способы расставить 3 × способы расставить 7

ОДЗ:

$\cancel{\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}$

$\left(\frac{x}{2} - 1\right) > 0$
$\left(\frac{x}{2} - 1\right) \neq 1; -1$
$x - \frac{11}{4} > 0$
$x - \frac{11}{4} \neq 1$
$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 0$
$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \neq 1$

$\Leftrightarrow$

$x > 2$
$x \neq 1;$
$x \neq 0$
$x > \frac{11}{4}$
$x \neq \frac{15}{4}$
$x > \frac{1}{2}$
$x \neq \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow$

$\cancel{x \in (2}$

$x \in \left(\frac{11}{4}; \frac{15}{4}\right) \cup \left(\frac{15}{4}; +\infty\right)$

$\left(\frac{x}{2} - 1\right) = a$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = b$

$x - \frac{11}{4} = c$

$a, b, c > 0$

$\log_{a^2}(b); \log_{\sqrt{c}}(a); \log_b(c)$

$\frac{1}{2} \cdot \log_a b; \ 2 \cdot \log_c a; \ \log_b c$

$\begin{cases} 2\log_c a = \log_b c \\ \frac{1}{2}\log_a b = \log_b c + 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2\log_c a = \frac{1}{2}\log_a b \\ 2\log_c a + 1 = \log_b c \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a b = \log_b c \\ 2\log_c a = 1 + \log_b c \end{cases}$

$2\log_c a = \log_b c$

$\log_a b = 2\log_b c + 2$

$\cancel{\frac{2}{\log_b c}}$ $2 \cdot \log_c a = \frac{1}{\log_c b}$

$\log$

$\cancel{2\log_c^2 a = \log}$

$\log_b^2 c = 2 \cdot \log_b a$

$\alpha; 0; 0$

$\cancel{24} \cdot 21 \cdot 8 =$

$xyz = 3^2 \cdot 7$

$3 \cdot \alpha_1; \alpha_2$

$\alpha_1; \alpha_2; 0$ $3; 3; 0$
$\beta_1; \beta_2; 0$ $3^2; 0; 0$

$\alpha_1; \alpha_2; 0$
$\beta_1; 0; \beta_2$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 16$
$\beta_1 + \beta_2 = 14$

Черновик:

3. 2. 3!. $\beta_1; \beta_2; 0$ α α

$\beta; \beta; 0$ $\alpha; \alpha; 0$ $\beta; \beta; 0$ $\alpha; 0; \alpha$

$\alpha; 0; 0$ $\beta_1; \beta_2; 0$ $\begin{pmatrix} \alpha; 0; 0 \\ \beta; \beta; 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \alpha; 0; 0 \\ \beta; 0; 0 \end{pmatrix}$ 2. $\alpha; 0; 0$ β

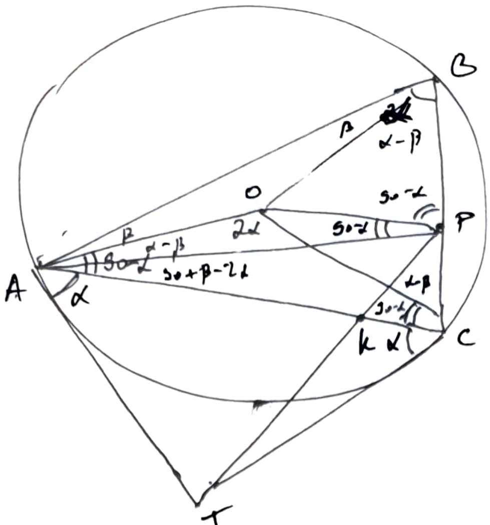
$\frac{x}{2} - 121 \Rightarrow x = 4$

$\frac{x}{2} -$

$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot CP \cdot \sin\gamma = 16$

$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin\gamma = x$

$\frac{x}{16} = \frac{BC}{CP}$



$90 - \beta$

$S_{\triangle APK} = 10$

$S_{\triangle CPK} = 6$

$\angle OCT = 90°$

$\log_a c = 4 \log_b a$

$\log_b c = 4 \log_b^2 a$

$2 \log_b a + 1 =$

$2 \log_b^2 a + \log_b a = 2 \log_c a$

$\log_a c = 4 \log_b a$ $2 \log_b a$

$\log_c a = \frac{1}{4 \log_b a}$

$\frac{1}{\log_c b}$ $\log_c b = \frac{1}{4 \log_b^2 a}$

$2 \log_b a + 1 = \frac{1}{2 \log_b^2 a}$

$2x + 1 = \frac{1}{2x^2}$

$4x^3 + 2x^2 = 1$

$4x^3 + 2x^2 - 1 = 0$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 + 2x^2 - 1 & x - \frac{1}{2} \\ \hline 4x^3 - 2x^2 & 4x^2 + 4x + 2 \\ 4x^2 & \\ 4x^2 - 2x & \\ 2x - 1 & \end{array}$$

$4 \log_c^2 b = \log_a b$

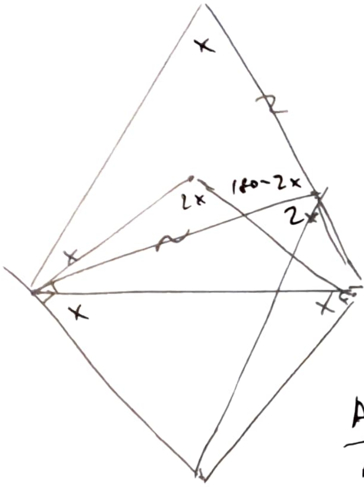
$120 + 24 - 117 =$

$= 144 - 117 = 27$

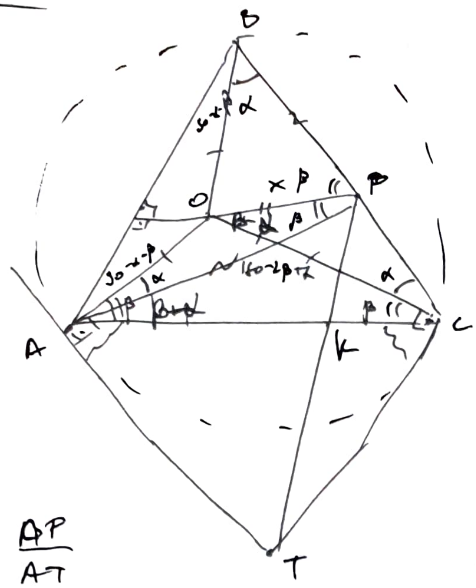
$\log_c b = \log_b a$

$\log_c a = \log_b^2 a$

Черновик:



$\frac{AB}{AC} =$



$2\beta - \alpha$

$180 - 2\beta + \alpha$

$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AT}$

$\alpha ; \alpha$

$\beta ; \beta$

$3 - \frac{3\sqrt{3}}{4} > \frac{11}{4}$?

$\alpha_1 ; \alpha_2 ; 0$

$\beta ; \beta ; 0$

$3 \cdot 3! \cdot 7$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 18 \\ \hline 392 \\ 49 \\ \hline 882 \end{array}$$

$18 \cdot 49 + 21 + 42 + 18 + 36 + 6 + 3 =$

$= 882 + 63 + 27 + 36 =$

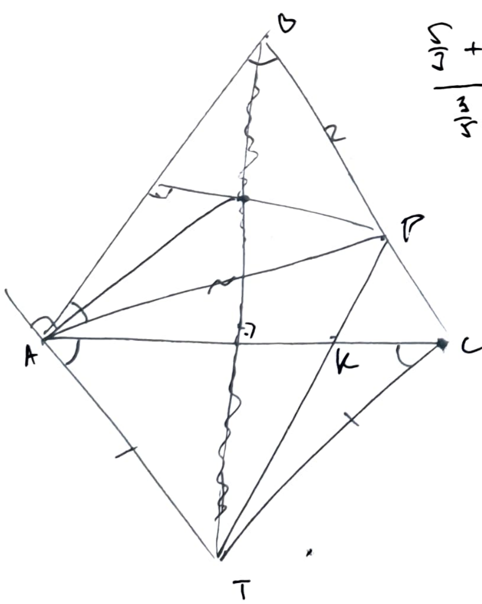
$= 126 + 882 = 900 + 108 = 1008$

$a^2 + x^2 -$

$36 \cdot 3 + 6 = 90 + 24 = 114$

$18 \cdot 7 + 6 = 70 + 56 + 6 = 132$

$141 + 114 + 1008 = 255 + 1008 = 1263$



$\frac{\frac{5}{3} + \frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{25 + 9}{9} = \frac{34}{9}$

$\cancel{\frac{AP}{AT}} = \cancel{\frac{AP}{AC}} =$

$\frac{AC}{AT} = \frac{AB}{AP}$

~~APR~~

$\frac{AC}{AB} = \frac{AT}{AP}$