Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102701**

ID профиля: **852530**

Вариант 19

19 вариант Черновик

математика, 11 кл.

$a, a+d; \dots; a+(n-1)d$ = $= an + d(1+2+\dots+(n-1)) = an + d\frac{n(n-1)}{2} = n\left(\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\right)$

$\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$?

№1 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{14} \in \mathbb{Z}$; $d>0$

$$\begin{cases} a_9 a_{17} > S+12 \\ a_{11} a_{15} < S+47 \end{cases}; a_1 = ? \Leftrightarrow \begin{cases} a_9 a_{17} > \\ (a_9+2d)(a_{17}-2d) < S+47 \end{cases}$$

$S = (2a_1+13d)\cdot 7$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_9 a_{17} > \left(\frac{2a_1+13d}{2}\right)7 + 12 = 14a_1 + 91d + 12 \\ a_9 a_{17} - 2d(a_9+a_{17}) - 4d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$+35$

$\alpha + 16d$
$-\alpha + 8d$
$8d$

$$\begin{cases} a_9 a_{17} > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_9 a_{17} - 2d(a_9+a_{17}) - 4d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_9 a_{17} + 35 > 14a_1 + 91d + 47 \\ a_9 a_{17} - 2d(a_9+a_{17}) - 4d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cancel{a_9 a_{17}} + 35 < \cancel{a_9 a_{17}} - 2d(a_9+a_{17}) - 4d^2$

$4d^2 + 2d(a_9+a_{17}) + 35 < 0$

$4d^2 + 2d(\alpha + 8d + \alpha + 16d) + 35 < 0$

$4d^2 + 2d(2\alpha + 24d) + 35 < 0$

$4d^2 + 48d^2 + 2d\alpha + 35 < 0$

$52d^2 + 2d\alpha + 35 < 0$

$$\begin{cases} a_9 a_{17} > S+12 \\ (a_9+2d)(a_{17}-2d) < S+47 \end{cases}$$

$16d^2 - 4d^2 = 12d^2$

$$\begin{cases} a_9 a_{17} + 35 > S+47 \\ a_9 a_{17} + 2d(a_{17}-a_9) - 4d^2 < S+47 \end{cases}$$

$\cancel{a_9 a_{17}} + 35 > \cancel{a_9 a_{17}} + 2d\cdot 8d - 4d^2$

$35 > 12d^2 \Rightarrow \boxed{d=1}$

$S_{14} = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n =$

$(2a_1+13)\cdot 7 = 14a_1 + 91$

$=$

$$\begin{cases} (a_1+8)(a_1+16) > 14a_1 + 91 + 12 \\ (a_1+10)(a_1+14) < 14a_1 + 91 + 47 \end{cases}$$

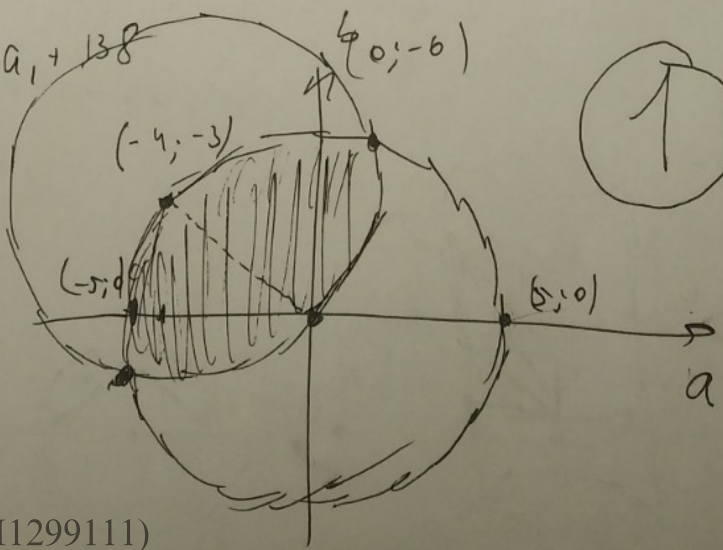
$a^2 + b^2 = (a+4)^2 + (b+3)^2$

$80 + 48 = 128$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103 \\ a^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 138 \end{cases}$$

$8a + 16 + 6b + 9 = 0$

$8a + 6b = 25$



1

21102701 (U852530 M1299111)

19 вариант Чистовик Математика, 11 кл.

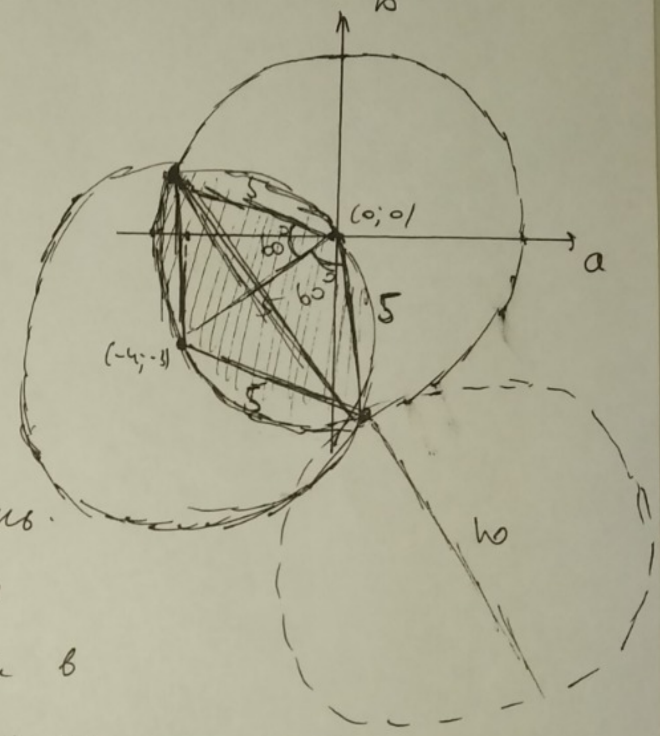
№3

3

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+8a+6b+16+9 \le 25 \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases}$



Эту систему на рис. описывает заштрихованное мн-во на декартовой пл-ти $(a;b)$:

Учитывая первое ур-ние изначальной системы $((x-a)^2+(y-b)^2 \le 25) \Rightarrow$ окружность, радиуса 5 и центром в т. $(x;y)$ должна иметь общие точки с заштрихованной фигурой. Если рассм. все такие окружности, то в пересечении они будут давать фигуру, подобную заштрихованной,

$k = \frac{15}{5} = 3 \Rightarrow S = S_{штрих} \cdot k^2 = 9 S_{штрих}$;

$S_{штрих} = ?$ проведём из т. $(0;0)$ отрезки к т. пересеч. окружн. ~~…~~ A, B и отрезок $[(0;0);(-4;-3)]$ – образующие 2 правильных треуг. $\Rightarrow S_{штрих} = \frac{\pi R^2}{3} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{50\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = 9 S_{штрих} = 150\pi - \frac{9}{2} 25\sqrt{3}$

Ответ $S = 150\pi - \frac{9}{2} \cdot 25\sqrt{3}$

21102701 (U852530 M1299111)

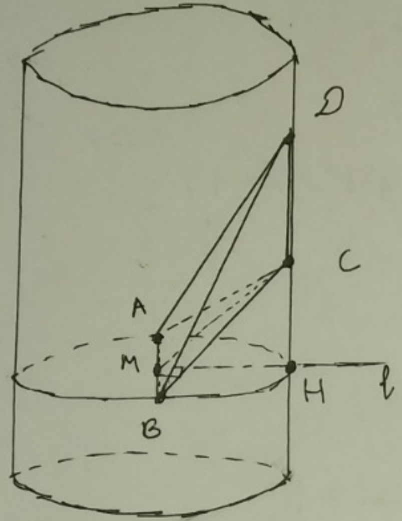
19 вариант Чистовик Математика 11кл

№2 Заметим, что $\triangle ADB$ и $\triangle CBA$ - равнобедр. $\Rightarrow$ 2

$(DM) \perp (AB)$, где M - середина (AB) $\Rightarrow$

$(CM) \perp (AB) \Rightarrow (CDM)$ - пл-ть, и/т $\perp [AB]$

и делит отрезок $[AB]$ - пополам $\Rightarrow$



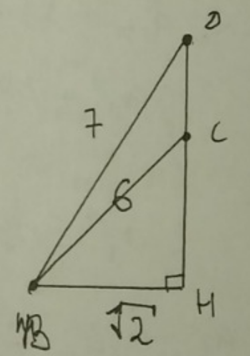
$(CD) \perp (AB) \Rightarrow (AB)$ - параллельно плоскости основания цилиндра.

Также заметим, что при наименьшем радиусе $\Rightarrow 2r = [AB]$ (т.к. если это не так, то $[AB]$ явл. хордой окружности, равной окружности основание, тогда $2r > |AB|$). $\Rightarrow$

Изобразим итоговый тетраэдр на рис.

Проведём l: $l \perp (AB)$, $l \parallel$ пл-ти основание цилиндра, $M \in l \Rightarrow$

$l \cap (CD) = \{H\} \Rightarrow MH = r = \frac{AB}{2} = 1 \Rightarrow BH = \sqrt{2}\, r = \sqrt{2}$.



рассм пл-ть (BDH). Т.к. $(DH) \perp$ пл-ти основание $\Rightarrow$

$$(BH) \perp (DH) \Rightarrow \begin{cases} \triangle BDH: DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{47} \\ \triangle BCH: CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{34} \end{cases}$$

$\Rightarrow CD = DH - CH = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

* Здесь был рассм. случай, когда $\{C\}$, $\{D\}$ - по одну сторону от т. H. Если они находятся по разные стороны, то рассуждение не поменяются, просто $CD = CH + DH = \sqrt{47} + \sqrt{34}$.

Ответ $CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$; $\sqrt{47} + \sqrt{34}$

19 вариант   Чистовик.   Математика, 11 кл.

№1 Пусть d – разность арифм. прогрессии, $d>0$ (т.к. прогрессия возраст.) и $d\in\mathbb{Z}$ (т.к. $\underset{\mathbb{Z}}{a_2}-\underset{\mathbb{Z}}{a_1}=d$). $\Rightarrow \begin{cases} a_9a_{17}>S+12 \\ a_{11}a_{15}<S+47 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_9a_{17}>S+12 \\ (a_9+2d)(a_{17}-2d)<S+47 \end{cases} \overset{+35}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_9a_{17}+35>S+47 \\ a_9a_{17}+2d(a_{17}-a_9)-4d^2<S+47 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_9a_{17}+35>S+47>a_9a_{17}+2d(a_{17}-a_9)-4d^2 \Rightarrow$$

$$a_9a_{17}+35>a_9a_{17}+2d(a_{17}-a_9)-4d^2$$

$$35>2d\cdot(a_1+16d-a_1-8d)-4d^2;\quad 35>16d^2-4d^2$$

$$35>12d^2 \Rightarrow d^2<\frac{35}{12}<4,\ \text{а т.к. } d\in\mathbb{Z} \Rightarrow d=1.$$

$$\Rightarrow S=\frac{2a_1+13d}{2}\cdot 14=7(2a_1+13)=14a_1+91 \Rightarrow$$

1

$$\begin{cases} a_9a_{17}>S+12 \\ a_{11}a_{15}<S+47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d)>14a_1+91+12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d)<14a_1+91+47 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2+24da_1+128d^2>14a_1+103 \\ a_1^2+24da_1+140d^2<14a_1+138 \end{cases} \overset{d=1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_1^2+24a_1+128>14a_1+103 \\ a_1^2+24a_1+140<14a_1+138 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+2<0 \end{cases}$$

1) $a_1^2+10a_1+25>0$

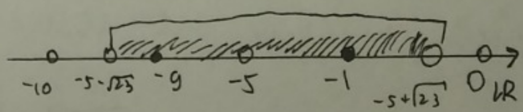
$a_1^2+10a_1+25=0$

$a_1=\frac{-10\pm 0}{2}=-5 \Rightarrow a_1^2+10a_1+25>0 \Leftrightarrow a_1\neq -5$

2) $a_1^2+10a_1+2<0 \Rightarrow$

$$a_1=\frac{-10\pm\sqrt{100-8}}{2}=-5\pm\frac{\sqrt{92}}{2}=$$

$$=-5\pm\sqrt{23} \Rightarrow a_1\in(-5-\sqrt{23};-5+\sqrt{23})$$



Заметим, что $-5-\sqrt{25}<-5-\sqrt{23}<-5-\sqrt{16}$

$-10<-5-\sqrt{23}<-9;$

$-5+\sqrt{16}<-5+\sqrt{23}<-5+\sqrt{25}$

$-1<-5+\sqrt{23}<0$

Т.к. $a_1\in\mathbb{Z}$, то $\Rightarrow \begin{cases} a_1\in[-9;-1] \\ a_1\neq -5 \end{cases} \Rightarrow$

Ответ $a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

14 вариант

Черновик

Математика, 4кл

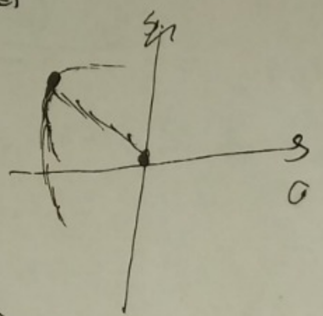
$a^2+b^2\le 25$

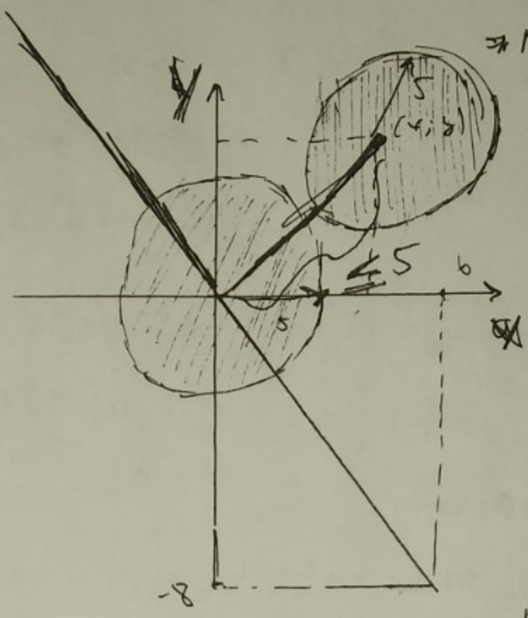
$\Rightarrow r<5$

2

$-8a-\cancel{8}6b=0\Rightarrow$

$b=-\frac{8a}{6}$



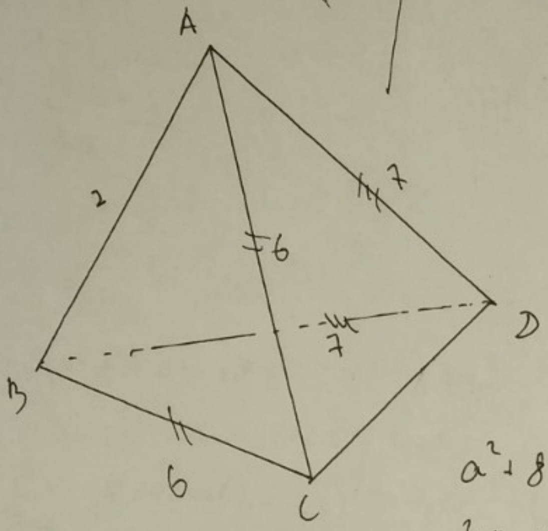


$a\ \ b$
$-5;0\Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{l}(x-5)^2+b^2\le 25\\ \end{array}\right.$

площадь

$\Rightarrow$ ~~...~~ $=25\pi$?



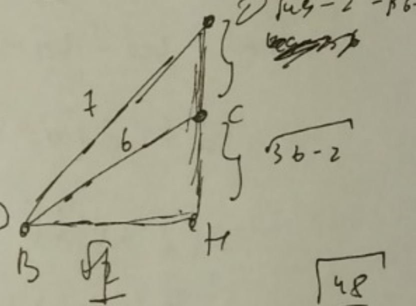
$a^2+8a+b^2+6b\le 0$

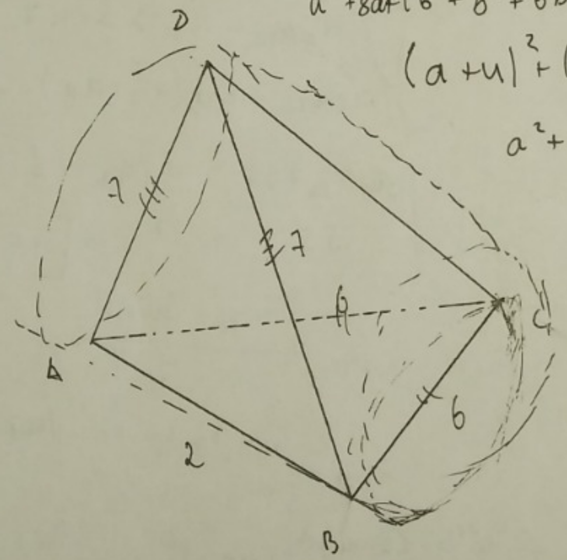
$a^2+8a+16+b^2+6b+9\le 25$

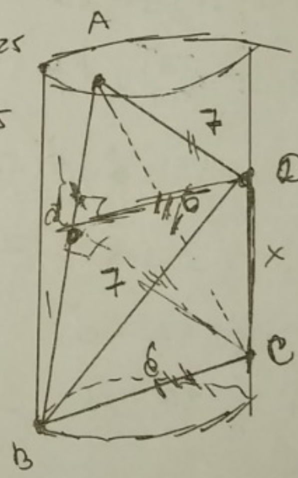
$(a+4)^2+(b+3)^2\le 25$

$a^2+b^2\le 25$

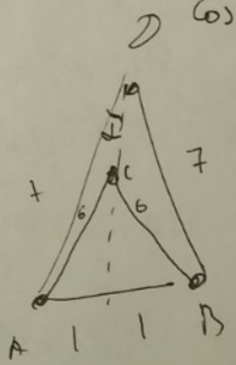
$-8a+6b\ge 0$







$\cos\alpha=\frac{\sqrt{48}}{7}$



$36=x^2+49-14x\cdot\frac{\sqrt{48}}{7}$

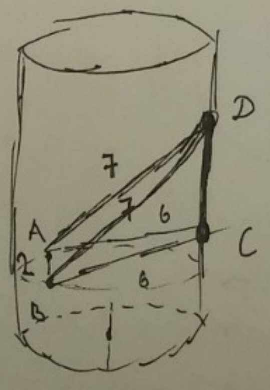
4.13

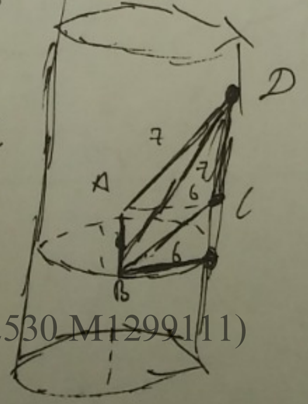
$=x^2+49-2x\sqrt{48}$

$x^2+13-2x\sqrt{48}=0$

$x=\frac{2\sqrt{48}\pm\sqrt{4\cdot 48-52}}{2}$

$=\sqrt{48}\pm{}^{2}\sqrt{35}$





Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102701**

ID профиля: **852530**

Вариант 19

19 вариант Черновик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3^{\alpha_1}7^{\beta_1} \\ b=3^{\alpha_2}7^{\beta_2} \\ c=3^{\alpha_3}7^{\beta_3} \end{cases}$$

$\alpha_i \le 17$

$\beta_i \le 15$

б.о.о. $a\le b\le c \Rightarrow$

$$\begin{cases} \min(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=1 \\ \min(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=1 \end{cases}$$

$\max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=17$

$\max(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=15$

$853 \times 9 = 7677$

$8530 - 853 = 7677$

$(1;\alpha_i;17)$

$(1;\beta_i;15)$

$3^{17}\cdot 7^{9}$

$3^{9}\cdot 7^{15}$

$1;\alpha_i;17$

$1;7;15$

$3^{1}\ 7^{15}$

$3^{5}\ 7^{1}$ $3\cdot 15\cdot 3$

$3^{17}\ 7^{7}$

$84-8=6$

$15\cdot 13\cdot 2\cdot 3+$

$3^{17}\ 7^{15}$

7^{1}

3^{1}

$3^{1}\ 7^{15}$

$3^{1}\ 7^{\beta_i}$

$3^{17}\ 7^{1}$

$3^{1}\ 7^{17}$

$3\ 7$

$3^{5}\ 7^{1}$

$3^{1}\ 7^{15}$

$3^{1}\ 7^{3}$

$3^{17}\ 7^{1}$

1

$$\begin{cases} \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) \\ \log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \end{cases}$$

$\sqrt{x-\frac{11}{4}}=a;\ \frac{x}{2}-1=b \Rightarrow$

$$\begin{cases} a>0, \ne 1 \\ b\ne \pm 1, -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{b^2}\left(b+\frac{3}{4}\right) \\ \log_a b \\ \log_{(b+\frac{3}{4})} a^4 \end{cases}$$

1сл $\log_{b^2}\left(b+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{\log_b a}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\log_{|b|}\left(b+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{\log_b a} \\ \log_a b=\frac{4}{\log_{|a|}\left(b+\frac{3}{4}\right)}=\frac{\log_{|b|}\left(b+\frac{3}{4}\right)}{2} \end{cases}$$

$3^{17}\ 7^{15}$

$3^{1}\ 7^{15}$

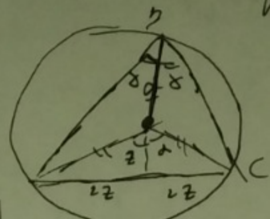
$3^{1}\ 7^{1}$

$\log_{|a|}\left(b+\frac{3}{4}\right)\cdot\log_{|b|}\left(b+\frac{3}{4}\right)=8$

19 вариант

Черновик

Математика, 11кл



$\frac{5xy}{2} = 10 \Rightarrow 5xy = 20$

$xy = 4$

$S = \frac{128}{3}$

2

$\boxed{xy = 4}$

$\frac{16}{3z}$ - высота

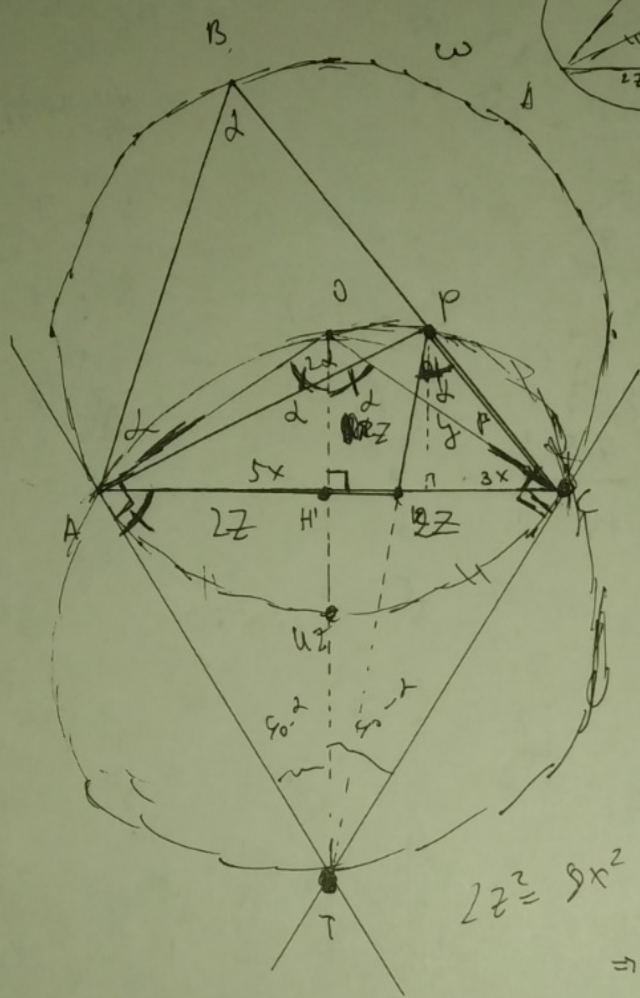
$\frac{4}{x} \cdot \frac{8}{3}$

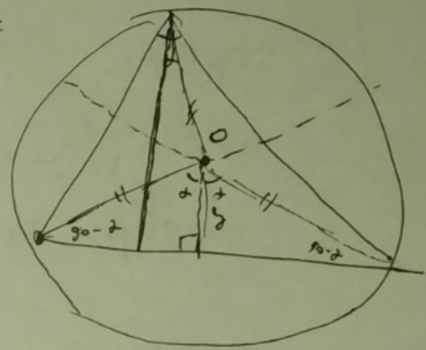
1) AOCT - вписан. ⇒ T ∈ ω

2) OT - диаметр $= \frac{32}{3x}$

S =

z = ?





$2z = 8x \Rightarrow z = 4x$

$2z^2 = 9x^2$

$\Delta PKC \sim \Delta ABC$, $k = \frac{8}{3} \Rightarrow$

$S_{ABC} = S_{PKC} \cdot k^2 = 6 \cdot \frac{64}{9} = \frac{128}{3}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$a = \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot 2R = \frac{4}{5} \cdot 2z\sqrt{5} = \cancel{4z}$

$tg\,\alpha = 2 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 2$ $\quad \frac{2\sqrt{5}}{5} = 1?$

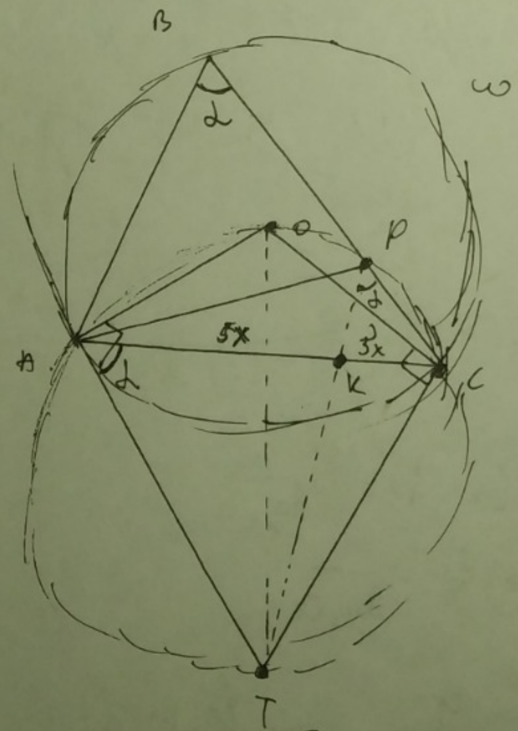
$\sin\alpha = 2\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\sin^2\alpha = 4 - 4\cdot\sin^2\alpha$

$5\sin^2\alpha = 4$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}}$

$\frac{40}{5}$



$1{,}5z \cdot y = 6$

$4z \cdot y = \frac{128}{3}$

$4z^2 + z^2 = \sqrt{5z^2} = 2z\cancel{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{4}}{\cancel{\sqrt{5}}}$

19 вариант Чистовик

Математика, ики

1

№4 $\begin{cases} HOD(a;b;c)=21 = 3\cdot 7 \\ HOK(a;b;c) = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$ (иначе)

Т.к. $HOK(a;b;c) \vdots a,b,c \Rightarrow$ в разложениях на простые множ. в a, b, c фигурируют только 3 и 7 (иначе $HOK(a;b;c) \not\vdots a,b,c$)

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1} \\ b = 3^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2} \\ c = 3^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3} \end{cases}$ Чтобы найти НОД (НОК) чисел из разложение их на простые множители нужно взять

минимумы (максимумы) от степени каждого простого числа $\Rightarrow$

$\begin{cases} HOD(a;b;c) = 3^{\min(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)}\cdot 7^{\min(\beta_1;\beta_2;\beta_3)} = 3\cdot 7 \\ HOK(a;b;c) = 3^{\max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)}\cdot 7^{\max(\beta_1;\beta_2;\beta_1)} = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \min(\alpha_i) = 1 \\ \min(\beta_i) = 1 \\ \max(\alpha_i) = 17 \\ \max(\beta_i) = 15 \end{cases}$ $i=\overline{1,3}$

пусть $\begin{cases} \gamma_1 = \max(\alpha_i);\ \gamma_3 = \min(\alpha_i);\ \gamma_2 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\gamma_1-\gamma_3 \\ \delta_1 = \max(\beta_i);\ \delta_3 = \min(\beta_i);\ \delta_2 = \beta_1+\beta_2+\beta_3-\delta_1-\delta_3 \end{cases}$ $;\ i=\overline{1,3}$

$\Rightarrow$ 1сл $\gamma_3 < \gamma_2 < \gamma_1;\ \delta_3 < \delta_2 < \delta_1 \Rightarrow$ сначала положим $(\gamma_2$ и $\delta_2)$ в какую-нибудь $(\alpha_i;\beta_i)$, γ_1, γ_3, δ_1, δ_3 – перестановки $\Rightarrow$

кол-во вариантов: $A_3^2 \cdot (16-2+1)(14-2+1)\cdot A_2^2 =$

$= 9\cdot 15\cdot 13\cdot 4$

2сл ~~($\gamma_2 \in \{1;17\}$; $\delta_2 \in \{1;15\}$, но не одновременно $\Rightarrow$)~~

$\gamma_2 \in \{1;17\}$; $1 < \delta_2 < 15 \Rightarrow$ выбираем $\delta_2 \in [2;14]$ – $(14-2+1)$ способ, перестановка между a; b; c (*3); $(\alpha_i;\alpha_j;\alpha_k) = (1;1;17) \vee (17;1;17)$ – переставляем 3 раза $\Rightarrow$ кол-во: $(14-2+1)\cdot 3\cdot 3\cdot 2 = 13\cdot 9\cdot 2$

3сл $\delta_2 \in \{1;15\}$; $\gamma_2 \geq 2$; $\gamma_2 \leq 16 \overset{\text{аналогич.}}{\Rightarrow} 15\cdot 9\cdot 2$

4сл $\gamma_2 = \delta_2 = 1 \Rightarrow 9$

5сл $\gamma_2 \in \{1;17\}$; $\delta_2 \in \{1;15\}$, но $(\gamma_2;\delta_2) \neq (1;1)$: $9\cdot 2\cdot 3 \Rightarrow$

19 вариант Чистовик Математика, ЦКН

№4 2 лист

$\Rightarrow$ ответ $= 9\cdot15\cdot13\cdot4+9\cdot13\cdot2+9\cdot15\cdot2+9+9\cdot2\cdot3=$

$=9(15\cdot13\cdot4+26+31+6)=9(780+63)=9\cdot853$

$=7677$

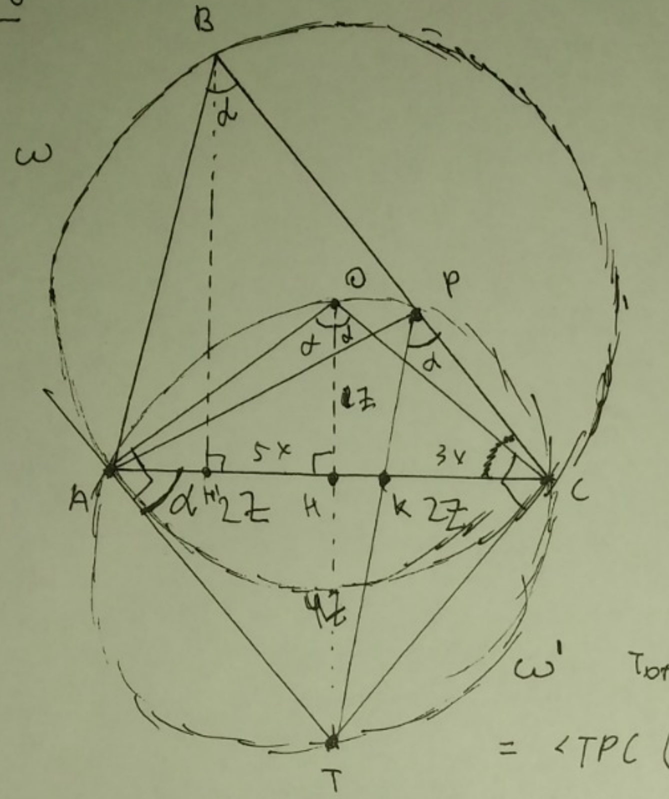
Ответ 7677

2

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 6 \\ \hline 78 \end{array}$$

19 вариант Чистовик Математика, 11кл

№ 6



3

а) Пусть опис. окр. около $\triangle AOC$ — ω'.

Тогда заметим, что $T \in \omega'$ (т.к. в AOCT: $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ как радиус в т. кас. ⇒ AOCT — впис., а вокруг $\triangle AOC$ опис. окр. — единственна)

Пусть $\angle ABC = \alpha$.

Тогда $\angle TAC = \alpha$ (угол между хордой и касат.) $= \angle TPC$ (~~хорды~~ $\overset{\smile}{CT}$ в ω' — впис. углы) ⇒

$\triangle PKC \sim \triangle ABC$ по 2-м углам ⇒ $S_{ABC} = S_{PKC} \cdot k^2$; $k = ?$

Заметим, что у $\triangle APK$ и $\triangle PKC$ — общие высота к [AK]; [KC] ⇒

$$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{10}{6} \Rightarrow \begin{cases} AK = 5x \\ KC = 3x \end{cases} \Rightarrow k = \frac{AK+KC}{KC} = \frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = S_{PKC} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} = 16 \cdot \frac{8}{3} = \frac{128}{3}$$

б) Также заметим, что $\angle TOC = \angle TPC$ (опир. на $\overset{\smile}{TC}$ в ω') $= \alpha$

$\Rightarrow \angle AOT = \angle AOC - \angle TOC = 2\alpha - \alpha = \alpha$.

Пусть $(OT) \cap (AC) = \{H\} \Rightarrow (OH) \perp [AC]$ (т.к. $\triangle AOT = \triangle COT$ по углу и гипотенузе ⇒ $AO = OC$, а (OH) — биссектр. $\angle AOC$) ⇒

пусть $AH = HC = 2z \Rightarrow OH = z$; $AC = 4z = 8x \Rightarrow z = 2x$

$\Rightarrow HT = AH \cdot 2 = 4z$; пусть $H' = Пр_{(AC)} B$ ⇒

$BH'TO$ — паралл. ⇒ $BH' = OT = 5z$ ⇒

$S_{ABC} = 5z \cdot 4z = \frac{128}{3} \Rightarrow z = \frac{128}{60} \Rightarrow 4z = \frac{4 \cdot 128}{60} = AC = \frac{128}{15}$

Ответ: а) $S = \frac{128}{3}$ б) $AC = \frac{128}{15}$