Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102639**

ID профиля: **872620**

Вариант 19

Чистовик ①

1) $d>0$ $d \in N$, так как все члены последовательности — целые числа

$a_9 = a_{13} - 4d \quad (a_{13}-4d)(a_{13}+4d) > S+12$

$a_{17} = a_{13}+4d$

$a_{11} = a_{13} - 2d \quad (a_{13}-2d)(a_{13}+2d) < S+47.$

$a_{15} = a_{13}+2d$

$\begin{cases} a_{13}^2 - 16d^2 > S+12. \\ a_{13}^2 - 4d^2 < S+47 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{13}^2 > S+12+16d^2. \\ a_{13}^2 < S+47+4d^2 \end{cases} \iff S+12+16d^2 < S+47+4d^2$

$12d^2 < 35 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1$

$a_9 \cdot a_{17} > S+12.$

$(a_1+8d)(a_1+16d) > S+12$

$(a_1+8)(a_1+16) > 14a_1+103$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0 \ (*)$

$\frac{a_1+a_{14}}{2} \cdot 14 = S$

$(2a_1+13)7 = S$

$a_{11} \cdot a_{15} < S+47.$

$(a_1+10)(a_1+14) < 14a_1+138.$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0.$

$D_1 = 25-2 = 23$

$\left[\begin{array}{l} a_1 = -5+\sqrt{23} \\ a_1 = -5-\sqrt{23} \end{array}\right.$

$a_1 \in (-5-\sqrt{23}; \sqrt{23}-5) \ (**)$

$(*)$ и $(**) \Rightarrow a_1 \in (-5-\sqrt{23}; \sqrt{23}-5) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Чистовик ②

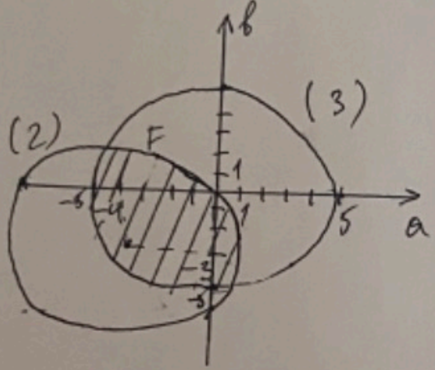
3)
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant 25\\ a^2+b^2\leqslant \min(-8a-6b,25)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant 25\\ a^2+b^2\leqslant -8a-6b\\ a^2+b^2\leqslant 25\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant 25 \quad (1)\\ (a+4)^2+(b+3)^2\leqslant 25 \quad (2)\\ a^2+b^2\leqslant 25 \quad (3)\end{cases}$$

Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $(a;b)$ и радиусом 5

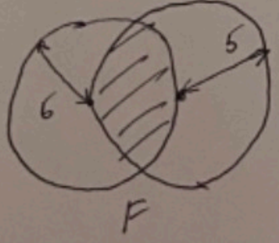
Второе нер-во задаёт круг с центром в точке $(-4;-3)$ и радиусом 5 на плоскости O_{ab}

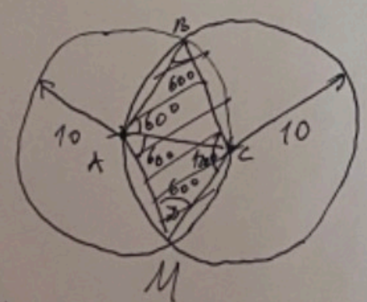
Третье нер-во задаёт круг с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 5 на плоскости O_{ab}

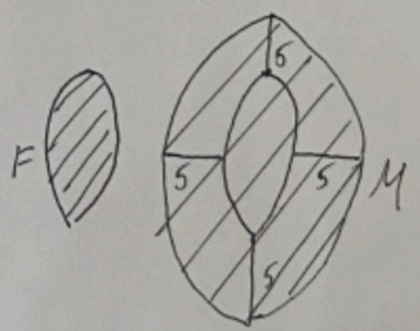


Заштрихованная область – это множество точек, которые могут являться центром круга (1) (фигура F)

Фигура M будет являться фигурой подобной фигуре F, но увеличенной в каждом направлении на 5







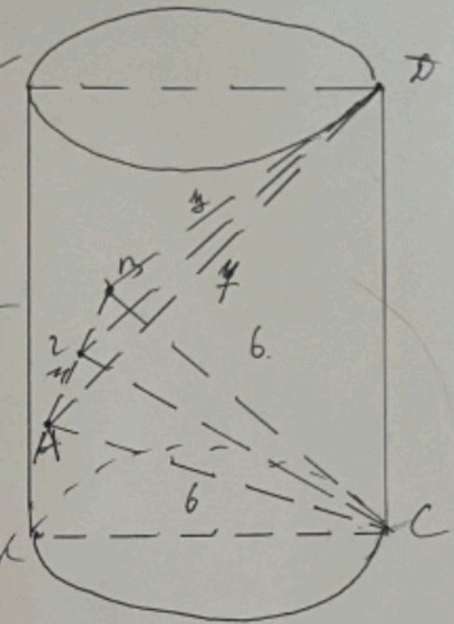
Площадь фигуры M: $2S_{CA\pi}-S_{ABCA}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{2\pi}{3}-2\cdot\frac{10^2\sqrt{3}}{4}=$

$=\frac{200\pi}{3}-50\sqrt{3}=50\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$

Ответ: Площадь фигуры M равна: $50\left(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$.

Шитовик. (3)

2) Радиус у ~~тетраэдра~~ цилиндра будет наименьшим в том случае, когда CD будет равна высоте цилиндра. В таком случае $\rho(CD; AB)$ — будет минимальным.



Пров DM — медиану в $\triangle ABD$

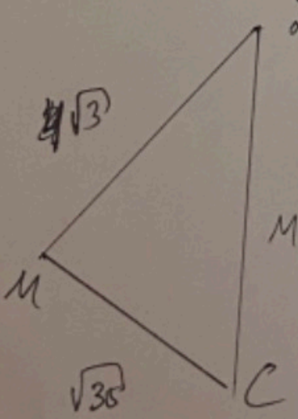
Пров CM — медиану в $\triangle ABC$

$$DM^2 = DB^2 - \left(\tfrac{1}{2}AB\right)^2 = 49 - 1 = 48; \quad DM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$CM^2 = AC^2 - \left(\tfrac{1}{2}AB\right)^2 = 36 - 1 = 35 \quad CM = \sqrt{35}$$

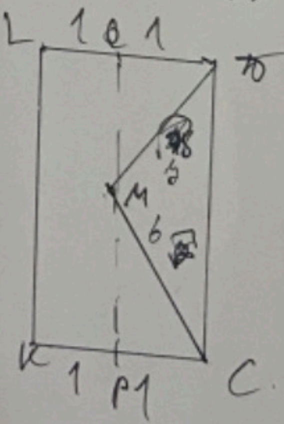
$\cancel{CM^2}$ $\quad$ $\cancel{0 < CD^2 < CM + DM}$

Радиус цилиндра не меньше чем 1 => минимальный радиус равен 1.



$\cancel{0 < CD < 4\sqrt{3} + \sqrt{35}}$

$\cancel{CD \in (0; 4\sqrt{3} + \sqrt{35})}$

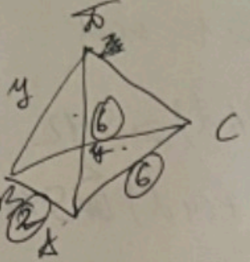


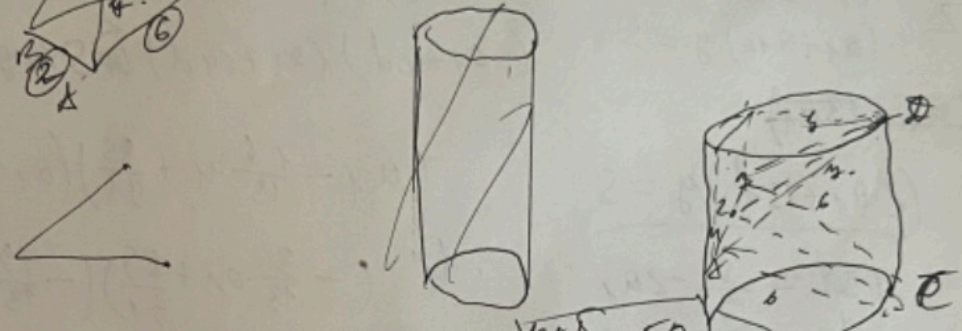
$$MP + MQ = CD = \sqrt{49-1} + \sqrt{36-1} = 4\sqrt{3} + \sqrt{35}$$

Ответ: $\cancel{CD \in (0; 4\sqrt{3} + \sqrt{35})}$

$CD = 4\sqrt{3} + \sqrt{35}$

Черновик.

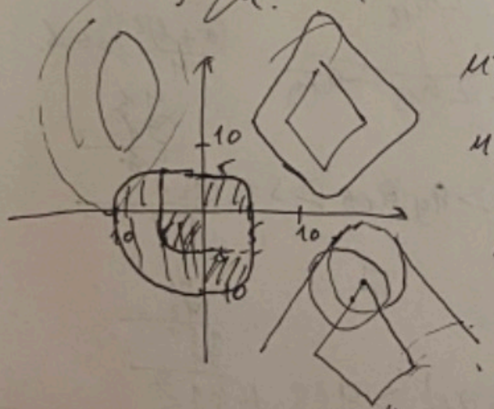




$3\cdot\frac{\pi 25}{4} = 3\cdot\frac{25}{4}\pi + \pi\frac{100}{4} + 2\cdot 5^2 = \boxed{\frac{125\pi}{4} + 50}$

$\sqrt{49 - 36} = \sqrt{13}$

$Rm; n \Longleftrightarrow CD = H$



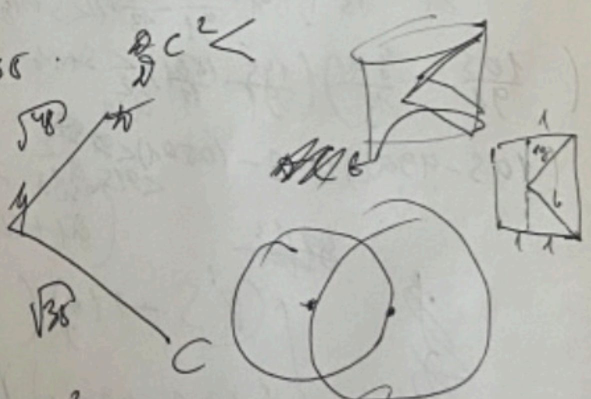
$MD^2 = \sqrt{13 - 1}^2 = \sqrt{48}$

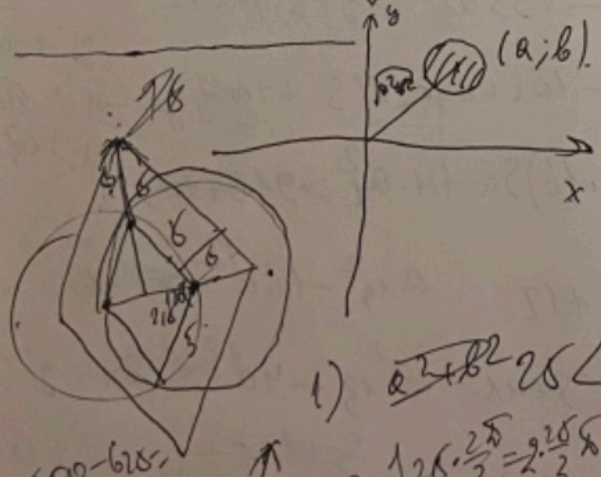
$\triangle MDC$ — не тупоугольн

$MC^2 = 36 - 1 = 35$

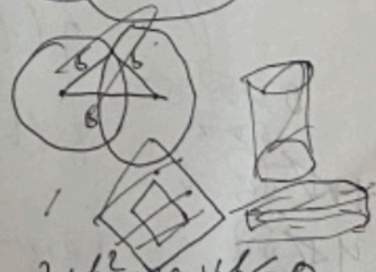
$DC^2 <$

MD





$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 25 \\ a^2 + b^2 \le -8a - 6b \end{cases}$$



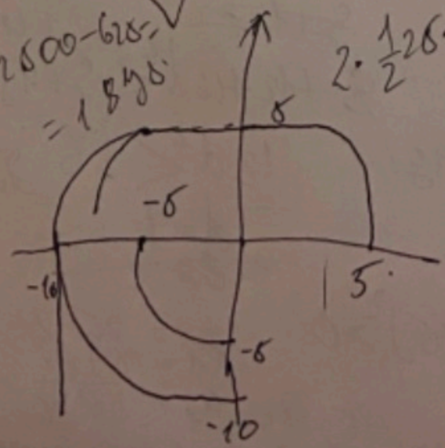
1) $\cancel{a^2+b^2}\ 25 < -8a - 6b$

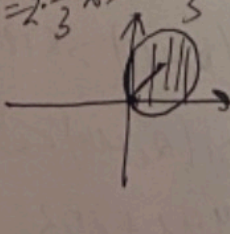
2) $a^2 + b^2 + 8a + 6b \le 0$

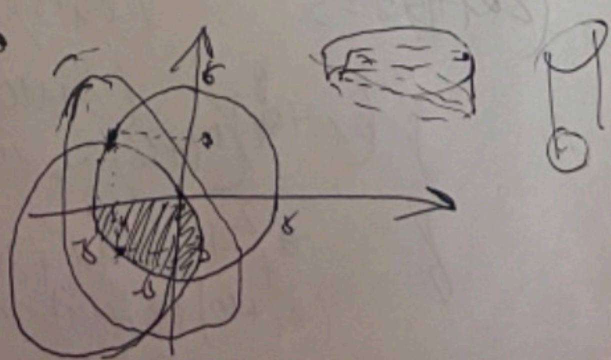
$(a+4)^2 + (b+3)^2 \le 25$

$2\cdot\frac{1}{2}\cdot 25\cdot\frac{2\pi}{3} = 2\cdot\frac{25}{3}\pi = \frac{50\pi}{3}$

$2500 - 625 = 1875$







$d>0 \quad d=1 \quad a_1=1$

Черновик $\cancel{d=1 \; a_1=1}$

1) $\frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot 14=S$ $\quad (a_1+8d)(a_1+16d)>S+12$

$(a_1+a_{14})7=S$ $\quad (a_1+10d)(a_1+14d)\leq S+49.$

$\cancel{(2a_1+13a_1)}$

$\underline{(2a_1+13d)7=S}$ $\quad \left(a_1-\frac{16}{13}a_1+\frac{8S}{91}\right)\left(a_1-\frac{32}{13}a_1+\frac{16}{91}\right)$

$13d=\frac{S}{7}-2a_1$ $\quad \left(-\frac{3}{13}a_1+\frac{8S}{91}\right)\left(-\frac{19}{13}a_1+\frac{16}{91}\right)$

$d=\frac{S}{91}-\frac{2}{13}a_1.$

$15\cdot 7=S=105$

$\frac{a_9+a_{17}}{2}=a_{13}.$ $\quad \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

$108+12=117.$

$\left(a_1+\frac{105}{91}-\frac{20}{13}a_1\right)\left(a_1+\frac{145}{91}-\frac{28}{13}a_1\right)<S+49$ $\quad \frac{(a+b)^2}{4}>ab.$

$2a_9=2a_{13}-a_{17}.$

$\left(\frac{105}{91}-\frac{7a_1}{13}\right)\left(\frac{145}{91}-\frac{15a_1}{13}\right)<S+49$

$a_{13}^2=\frac{(a_9+a_{17})^2}{4}>a_9a_{17}>S+12$

$(105-49a_1)(145-105a_1)<91S+4\ldots$

$a_{13}^2>S+12.$

$(a_1+12d)^2>S+12$

$\begin{cases}(8S-21a_1)(16S-133a_1)>91S+1092\\(105-49a_1)(14S-105a_1)<91S+4459\end{cases}$

$-9<-5-\sqrt{13}$

$-4<-\sqrt{13}$

$4>\sqrt{13}$

$8\cdot16S^2-(133\cdot8+21\cdot16)Sa+21\cdot a_1^2>91S+1092.$

$0<\sqrt{13}-5.$

$5<\sqrt{13}$

$-1<\sqrt{13}-5$

$4<\sqrt{13}$

$(a_{13}-4d)(a_{13}+4d)>S+12.$ $\quad a_{13}^2-16d^2>S+12.$

$(a_{13}-2d)(a_{13}+2d)<S+49$ $\quad a_{13}^2-4d^2<S+49.$

$91+49=140$

$\cancel{S+12}$

$90+48=138$

$(2a_1+13)7=S.$

$(a_1+8)(a_1+16)>S+12$ $\quad S+12+16d^2<S+49+4d^2$

$(a_1+10)(a_1+14)<S+49.$ $\quad 12d^2<36$

$\begin{cases}(a_1+8)(a_1+16)>14a_1+103.\\a_1^2+10a_1+25>0.\quad (a_1+5)^2>0.\\(a_1+10)(a_1+14)<14a_1+138.\\a_1^2+10a_1+2<0\end{cases}$

$d=1$

$a_1=-25-2.$

$a_1=-5\pm\sqrt{23}.$

$-5-\sqrt{23}<a_1<\sqrt{23}-5$

$-9\;-8\;-7\;-6\;-5\;-4\ldots\;-1$

21102639 (U872620 M1304876)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

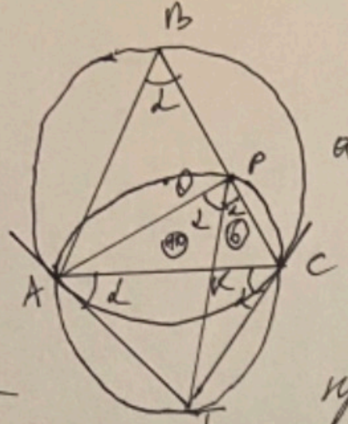
Шифр: **21102639**

ID профиля: **872620**

Вариант 19

Чистовик ①

6) $S_{APK}=10 \quad S_{PCK}=6$



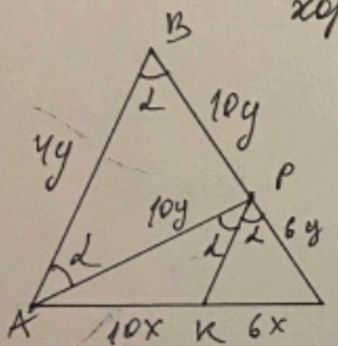
а) т.к. O - центр окружности =>

$=> \begin{cases} OA \perp AT \\ OC \perp CT \end{cases} =>$ AOCT вписан в окружность =>

=> т. T принадлежит окружности, проходящей через точки A; O; C

$\angle CPK = \angle CAT$
$\angle APK = \angle ACT$ т.к. опираются на одну хорду

$\angle ABC \overset{об}{=} \alpha$ => по теореме об угле между хордой и касательной $\angle CAT = \angle ACT = \angle ABC = \alpha$



в $\triangle APC$: PK – биссектриса $=> \frac{KC}{AK} = \frac{S_{PCK}}{S_{APK}} = \frac{6}{10}$. $KC \overset{об}{=} 6x$. $PC \overset{об}{=} 6y$.

$\frac{AK}{AP} = \frac{KC}{PC}$

$\angle ABP = \angle KPC = \alpha => AB \parallel KP => \triangle ABPK$ - трапеция =>

$=> \angle BAB = \angle APK = \alpha => \triangle ABP$ - равнобедренный =>

$=> BP = AP = 10y$

$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\angle ACB \\ S_{PKC} &= \frac{1}{2} KC \cdot PC \cdot \sin\angle ACB \end{aligned}\right\} => \frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = \frac{16x \cdot 16y}{6x \cdot 6y} = \frac{64}{9} =>$

$=> S_{ABC} = \frac{64 \cdot 6}{9} = \frac{128}{3}$

б) $\alpha = \operatorname{arctg} 2$

$\cos\alpha = \cos(\operatorname{arctg} 2) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 2)} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$

$AB = 2AP\cos\alpha = 2 \cdot 10y \cdot \frac{1}{5} = 4y \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{25}$

$S_{ABC} = \frac{128}{3} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\alpha \Rightarrow \frac{128}{3} = \frac{1}{2} \cdot 64y^2 \cdot \frac{\sqrt{24}}{25}$

$\frac{100}{3\sqrt{24}} = y^2$

По теореме косинусов:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\alpha$

$AC^2 = 16y^2 + 256y^2 - 128y^2 \cdot \frac{1}{5} = 272y^2 - \frac{128}{5}y^2 = \left(272 - \frac{128}{5}\right)y^2 = \frac{1232}{5} \cdot \frac{100}{3\sqrt{24}} =$

$= \frac{1232 \cdot 20}{3 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{12320}{3\sqrt{6}} = \frac{6160\sqrt{6}}{9} => AC = \frac{\sqrt{6160\sqrt{6}}}{3}$

Ответ: а) $S_{ABC} = \frac{128}{3}$

б) $AC = \frac{\sqrt{6160\sqrt{6}}}{3}$

Чистовик ②

4) $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 21. \quad (1) \\ НОК(a,b,c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc} & \boxed{3} & & \boxed{7} & (*) \\ a & & b & & c \end{array}$$

3; 7 3; 7 3; 7

Из (1) следует что каждое из чисел a, b, c в своём разложении содержит 3 и 7 в степени не меньше 1. ~~Из (1) также следует, что степень 3 и 7 в разложении 3 и 7 равна~~ 1.

Пусть каждое из чисел a, b, c содержит в своей разложении 3 и 7 в степени 1. Для того чтобы $НОД(a,b,c) = 21$ и $НОК(a,b,c) = 3^{14} \cdot 7^{15}$, Необходимо распределить между числами a, b, c 14 троек и 12 семёрок следующим образом: (*) все тройки разделим между числами a и b $\Rightarrow 2^{14}$ вариантов

Без ограничения общности все семёрки разделим между числами b и c $\Rightarrow 2^{12}$ вариантов.

Всего вариантов троек (a,b,c) (без перестановок) $2^{12} \cdot 2^{14} = 2^{26}$,

~~причём нужно учесть 2 случая: 1) все 1~~

число троек с перестановками: $3! \cdot 2^{26} = 2^{27} \cdot 3$

Причём нужно учесть 2 случая: 1) все 14 троек принадлежат числу a, а 12 семёрок поровну разделены между числами b и c, тогда (a,b,c) и (a,c,b) — идентичны.

2) все 12 семёрок принадлежат числу c, а 14 троек поровну разделены между числами a и b, тогда (a,b,c) и (b,a,c) — идентичны.

Искомое число способов: $3 \cdot 2^{27} - 2$.

Ответ: $3 \cdot 2^{27} - 2$

21102639 (U872620 M1304877)

черновик

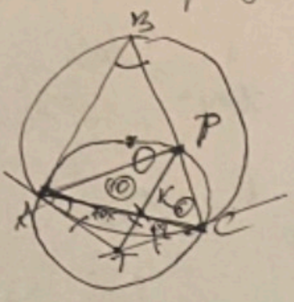
3 y 3 y 3 y

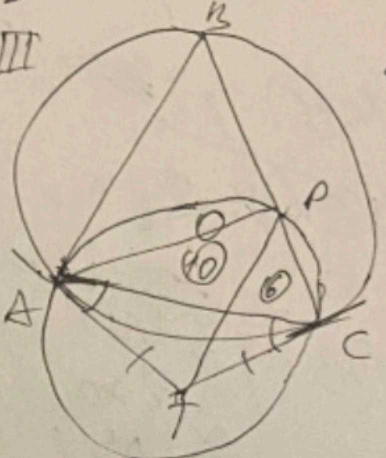
3 → по 2 числа

4 → по 2-м числам

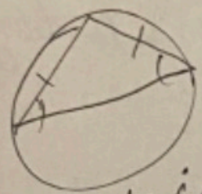
I II III

$2^{14} \cdot 2^{12} \cdot 3!$





I II III

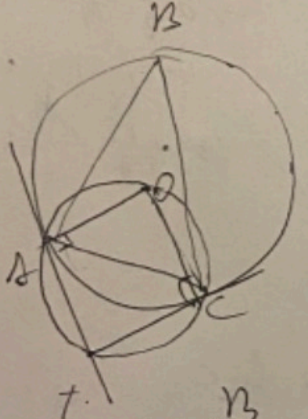


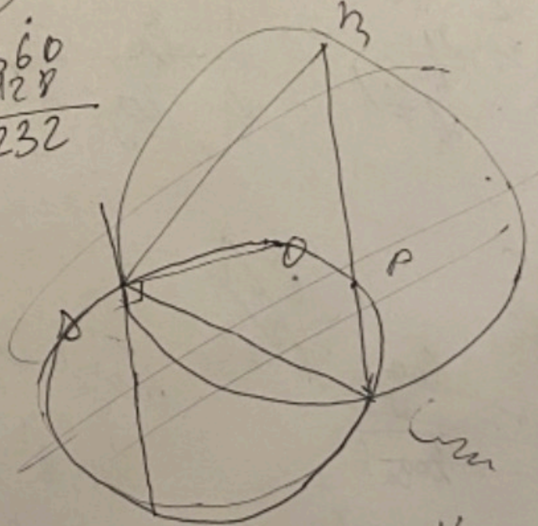
$\begin{array}{r} 272 \\ \times\ 5 \\ \hline 1360 \end{array}$

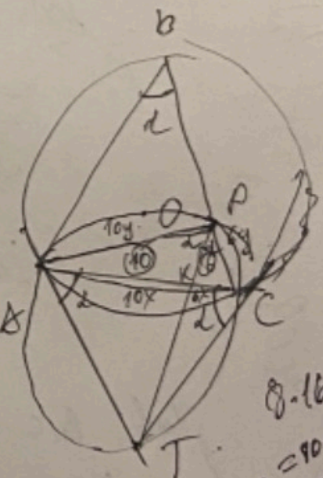
$\begin{array}{r} 1360 \\ -\ 128 \\ \hline 1232 \end{array}$

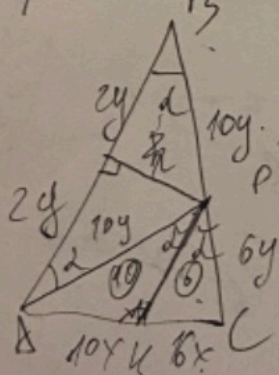
$\frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 4 \\ \hline 64 \end{array}$



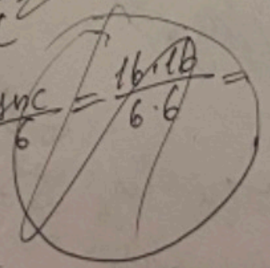






$\frac{S_{ABC}}{6} = \frac{AC}{KC} = \frac{16}{6}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = \frac{S_{ABC}}{6} = \frac{16 \cdot 16}{6 \cdot 6} =$



$S_{ABC} = \frac{256}{36} = \frac{128}{18} = \frac{64}{9}$

$8 \cdot 16 =$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{64}{9} \cdot 6 = \boxed{\frac{128}{3}}$

$\cos + \sin = 1$

$1 + tg^2 = \frac{1}{\cos}$

$\triangle PKC \sim \triangle ABC$

$\angle ABC = arctg 2$

$\cos = \frac{1}{1 + tg^2}$

$\cos(arctg 2) = \frac{1}{1 + tg^2 arctg 2} = \frac{1}{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 16y \cdot 4y \cdot \frac{2\sqrt{6}}{25} =$

$= \frac{\sqrt{6}}{25} \cdot 64y^2 = \frac{128}{3}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{25}$

$y^2 = \frac{50}{3\sqrt{6}}$

Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=21 \\ \text{НОК}(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15}\cdot 11 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\log_b a}=\log_b c$$

$$1=\log_b c\cdot\log_b a$$

$$\log_a c=\log_b c$$

B1. ОДЗ:
$$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^2\neq 1 \\ x>\frac{11}{4} \\ x-\frac{11}{4}\neq 1 \end{cases}$$

$$1)\ \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)}=2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$$

$$\frac{1}{4}=\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

$$b^{\log_a b}=c$$

$$a^x=b \qquad b^x=c$$

$$\log_a b=\frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$$\log_a b\cdot\log_a c$$

$$\ln b^2=\ln a\cdot\ln c$$

$$2\ln b=\ln a+\ln b$$

$$b^2=a^{\ln b}$$

$$e^{4\ln b}=(b^2)^{\ln a\cdot\ln b}$$

$$\frac{1}{\log_a \ln a}$$

$$a=\frac{x}{2}-1;\ c=x-\frac{11}{4}$$

$$b=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$$

$$b^{\ln b}=a^{\ln c}\qquad \ln c\cdot\ln^2 b=\ln a\cdot\ln c$$

$$b=\log_a b$$

$$b^{\log_a b}=c\cdot b \qquad 4\log_a c=2\log_a b$$

$$e^{\ln^2 b}=e^{\ln a\cdot\ln c}=\log_b a\cdot\log_b c$$

$$b=\log_b c\cdot a$$

$$\frac{\log_b a}{\log_c a}=2\log_c a$$

$$\log_c b=\log_c a$$

$$\frac{1}{2}\log_a b=2\log_c a$$

$$\log_a b\cdot\log_a c=4$$

$$\log_a b=\log_c a\cdot e^{b}=\frac{\ln a}{\ln c}=e^{\ln b}$$

$$\frac{1}{2}\qquad\frac{1}{4}\qquad\frac{\log_c a}{\log_a b}$$

$$\log_a b\cdot\log_a c=4$$

$$x=e^{b^{\ln b}}$$

$$\ln x=b^{\ln b}$$

$$\ln b^{2}\ \ \ln(\ln x)$$

$$\ln x=b^{\ln b}$$

$$\log_{\frac{x}{2}-1}\ {}^2$$