Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102584**

ID профиля: **858457**

Вариант 19

Чистовик.

① d - разность прогрессии; $a_9\cdot a_{17} > S+12 \Rightarrow (a_1+8d)(a_1+16d) > S+12 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1^2+24a_1d+128d^2>S+12 \Rightarrow a_1^2+24a_1d+128d^2+35>S+47$ (1)

$a_{11}\cdot a_{15}=(a_1+10d)(a_1+14d)=a_1^2+24a_1d+140d^2<S+47$ (2). Из (1) и (2):

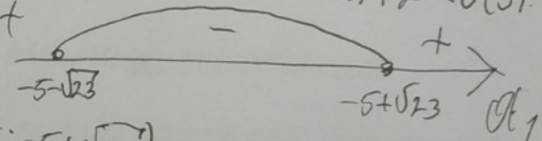
$a_1^2+24a_1d+128d^2+35>a_1^2+24a_1d+140d^2 \Rightarrow 12d^2<35$. (3) Так как прогрессия состоит из целых чисел, то $d\in Z$. Так как прогрессия возрастающая, то $d>0$. Пусть $d\geq 2$, тогда $12d^2 \geq 12\cdot 4=48>35$, условие (3) не выполняется. Значит $d=1$. $S=\frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot 14=\frac{a_1+a_1+13}{2}\cdot 14=(2a_1+13)\cdot 7=14a_1+91$

$a_9\cdot a_{17}=(a_1+8)(a_1+16)=a_1^2+24a_1+128>S+12=14a_1+103 \Rightarrow a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0 \Rightarrow a_1\neq -5$ (4)

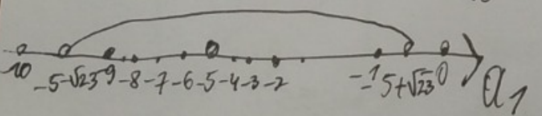
$a_{11}\cdot a_{15}=(a_1+10)(a_1+14)=a_1^2+24a_1+140<S+47=14a_1+138 \Rightarrow a_1^2+10a_1+2<0$ (5).

$a_1^2+10a_1+2=0 \Rightarrow a_1=-5\pm\sqrt{25-2}=-5\pm\sqrt{23}$



Объединяя условия (4) и (5): $a_1\in(-5-\sqrt{23};-5)\cup(-5;-5+\sqrt{23})$.

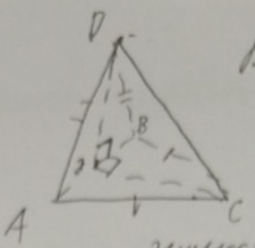
$4=\sqrt{16}<\sqrt{23}<\sqrt{25}=5 \Rightarrow -10<-5-\sqrt{23}<-9$; $-1<-5+\sqrt{23}<0$



Ответ: $a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

Чистовик

② Рассмотрим тэтраэдр ABCD:

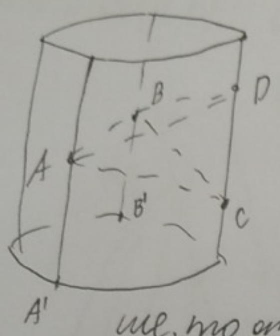


В △ADB проведём высоту Ж из в. D., так как △ADB - равнобед, то DЖ - медиана. Аналогично CЖ - высота и медиана (△ABC - равнобед)

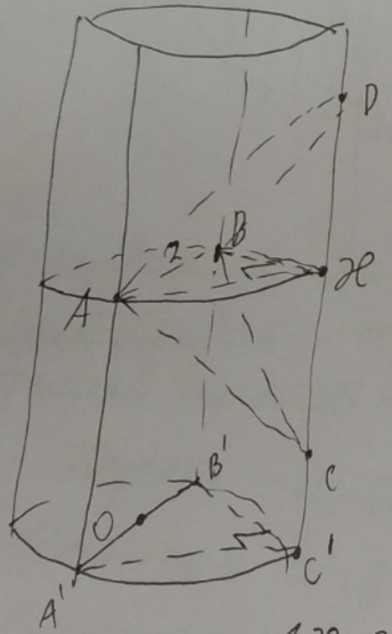
Прямая $AB \perp D\text{Ж}$ и $AB \perp \text{Ж}C$ ⇒ $AB \perp D\text{Ж}C$ ⇒ $AB \perp DC$.

~~Постро~~

Построим около тэтраэдра ABCD цилиндр:



Так как $CD \parallel$ оси цилиндра, то CD лежит на образующей.
Так как $CD \perp AB$, то $AB \parallel$ основаниям.
Пусть A' и B' - проэкции т. A и т. B на нижнее основание
Радиус цилиндра будет наименьшим, если A'B' - диаметр основания, т.к. если радиус будет меньше, то отрезок AB „не влезет" в цилиндр. Значит $A'B' = 2R = AB$, R - радиус цилиндра. $R = AB/2 = 1$.



Пусть C' - проэкция т. C на ниж. основание
$\angle A'C'B'$ - вписанный и опирается на диаметр ⇒ $A'C'B' = 90^\circ$.

Проведём сечение $\parallel A'B'C'$ через т. A и т. B. т. Ж - проэкция точек C и D на это сечение. ~~Т.к. АВЖ ∥ A'B'C'~~, то △ ∠AЖB - впис. и опир. на диаметр ⇒ $A\text{Ж}B = 90^\circ$

~~Из △AЖD (прямоугол.) По т. Пифагора~~ $\cancel{D\text{Ж} = \sqrt{AD^2 - A\text{Ж}^2}}$ ~~т.к. AD = BD, а AЖ и BЖ - проэк~~

△AЖD = △BЖD - по катету DЖ и гипотенузе AD = BD. ⇒ AЖ = ЖB. По т. Пифагора для △ABЖ (прямоугол. и равнобед.) $A\text{Ж} = \text{Ж}B = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$. Из △AЖD (прямоугол.) $\text{Ж}D = \sqrt{AD^2 - A\text{Ж}^2} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

Из △AЖC (прямоугол.) $\text{Ж}C = \sqrt{AC^2 - A\text{Ж}^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$ (т. Пифагора)

$CD = \text{Ж}D + \text{Ж}C = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{34}$

2

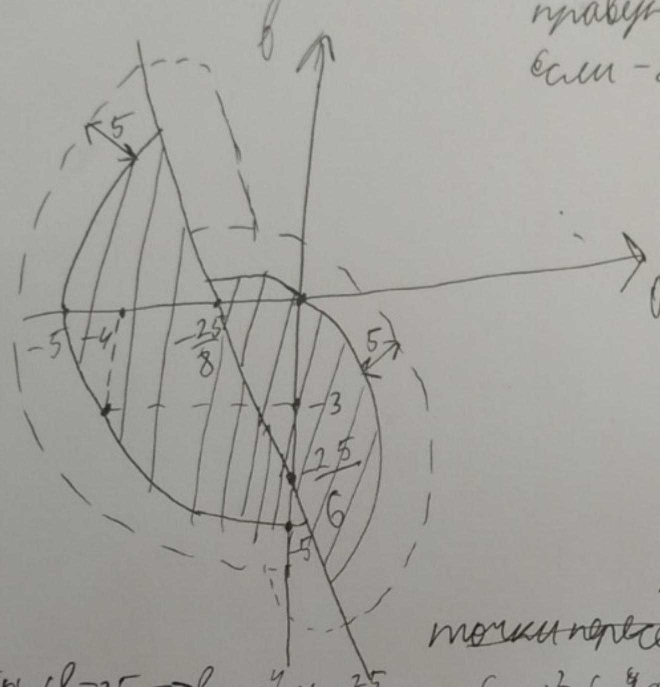
Чистовик

③ 1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5^2$. Это неравенство задаёт круг с центром в точке $O_1(a;b)$ и радиусом 5

2) $a^2+b^2 \le \min(-8a-6b;25)$ (*). а) Пусть $-8a-6b<25$ (1). Это нер-во задаёт полуплоскость, ограниченную прямой $-8a-6b=25$. Построим её в координатах $(a;b)$: $a=0$, $b=-\frac{25}{6}$; $b=0$, $a=-\frac{25}{8}$. ~~Если~~ Точка $(0;0)$ удовл. (1) $\Rightarrow$ нер-во (1) задаёт правую полуплоскость (т. е. верхнюю). Если $-8a-6b<25$, то из (*): $a^2+b^2\le -8a-6b \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+8a+16+b^2+6b+9\le 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+4)^2+(b+3)^2\le 5^2$. Это нер-во задаёт круг с центром $(-4;-3)$ и радиусом 5. $-4<-\frac{25}{8}=-3\frac{1}{8}$; $-3>-\frac{25}{6}=-4\frac{1}{6}$. ~~Т.к. если $a=0$ и $b=0$, то~~ ~~Так как $4^2+3^2=5^2$, то круг проходит через $(0;0)$~~. Найдём ~~точки пересечения этого круга и прямой~~:



$\cancel{\begin{cases} -8a-6b=25 \Rightarrow b=-\frac{4}{3}a-\frac{25}{6} \\ (a+4)^2+(b+3)^2=25 \end{cases} \Rightarrow (a+4)^2+\left(-\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}\right)^2=25}$

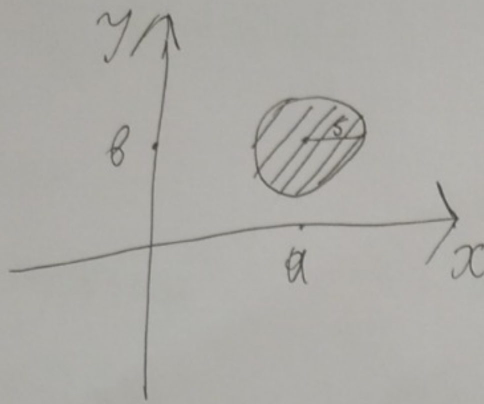
Так как мы находимся в верхней полуплоскости, то от круга останется лишь его часть

б) Пусть $-8a-6b>25$, тогда мы находимся в ниж. полуплоскости и $a^2+b^2\le 25=5^2$ (из (*)). Это нер-во задаёт круг с центром $(0;0)$ и радиусом 5. Аналогично а) от круга останется лишь его часть. ~~Любая точ~~ Полученная фигура задаёт допустимые значения a и b, т. е. ~~позадаёт~~ положение центра окр. O_1. Чтобы построить фигуру M нужно увеличить данную фигуру на 5 (см. рис.)

3

21102584 (U858457 M1299535)

5. $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 = 5^2$ – окр. радиуса 5, центр $(a;b)$



$-8a-6b=25$

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b; 25)$ $\quad a^2+b^2=5$

пусть $-8a-6b<25$

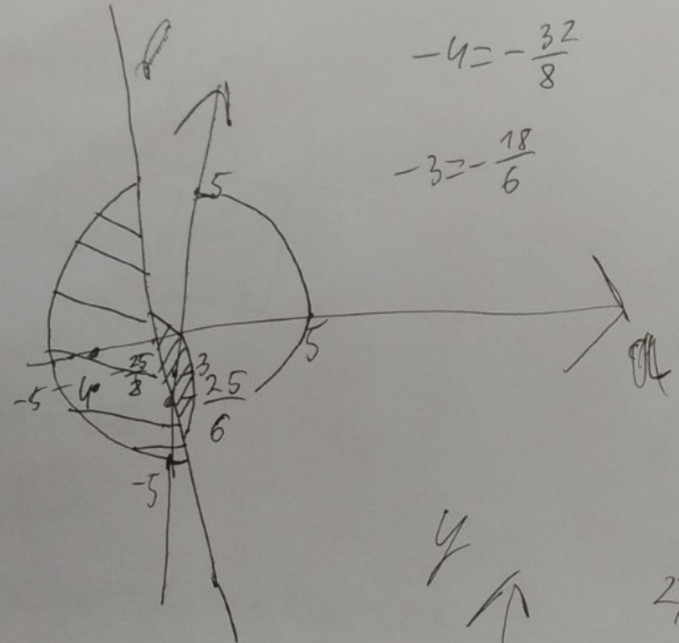
$6b>-8a-25$

$b>-\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}$

$-8a-6b=25$

$a=0 \quad b=0$

$b=-\frac{25}{6} \quad a=-\frac{25}{8}$



$-4=-\frac{32}{8}$

$-3=-\frac{18}{6}$

$a^2+b^2<-8a-6b$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9<25$

$(a+4)^2+(b+3)^2<5^2$

$360-36=$
$=324$

307

2) $-8a-6b>25$

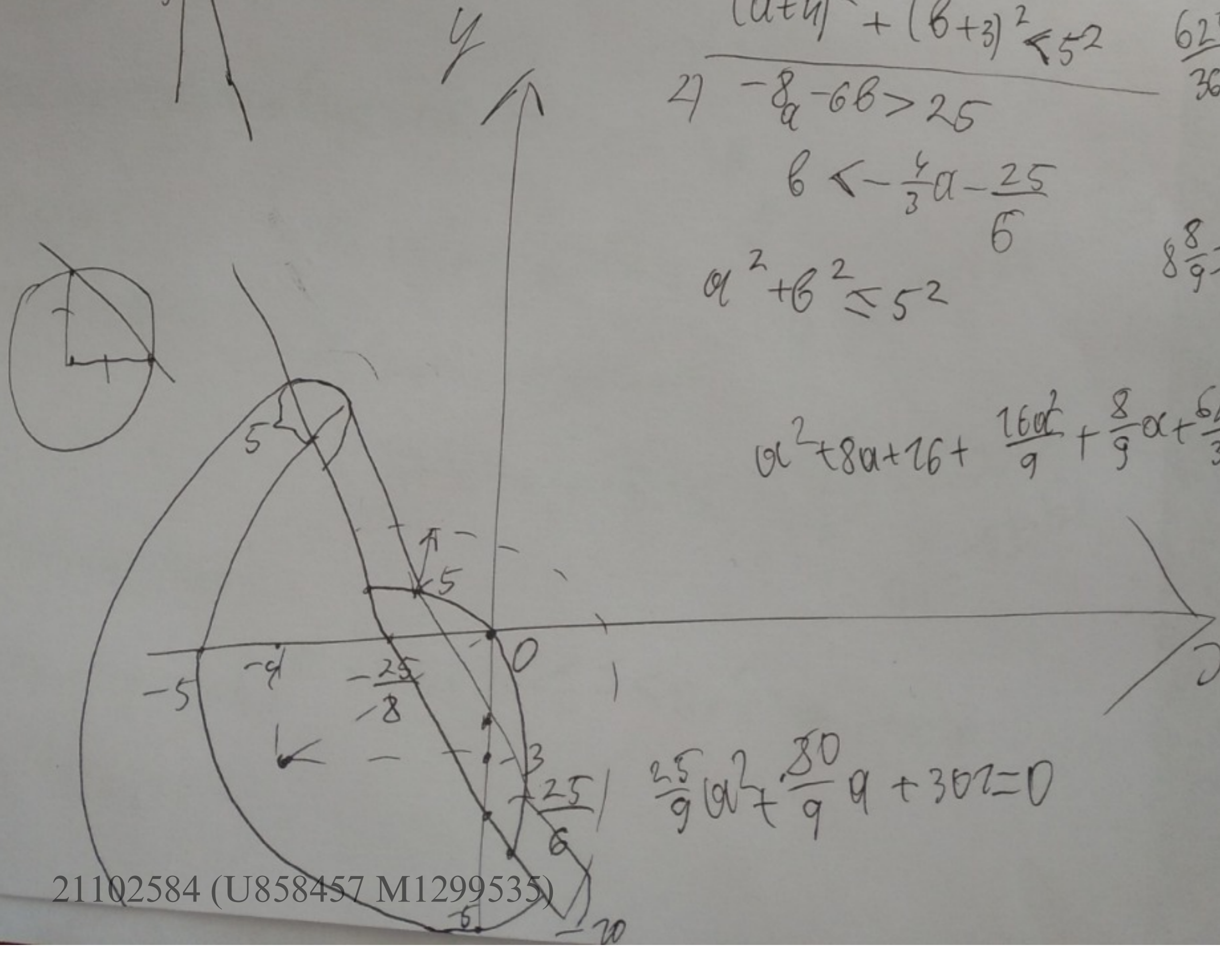
$b<-\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}$

$a^2+b^2\le 5^2$

$\frac{625}{36}-\frac{36\cdot 9}{36}$

$8\frac{8}{9}=\frac{80}{9}$

$a^2+8a+16+\frac{16a^2}{9}+\frac{8}{9}a+\frac{625}{36}-25=0$



$\frac{25}{9}a^2+\frac{80}{9}a+307=0$

$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14$; $a_{14} = a_1 + 13d$; ~~$a_9 \cdot a_{17}$~~

$S = (2a_1 + 13d) \cdot 7(1)$

$a_9 \cdot a_{17} > S + 12$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > S + 12$

$a_1^2 + 24a_1 d + 126d^2 > S + 12$

$a_1^2 + 24a_1 d + 126d^2 + 35 > S + 47$

$a_1 a_{15} < S + 47$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 47$

$a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < S + 47$

$a_1^2 + 24a_1 d + 126d^2 + 35 > a_1^2 + 24da_1 + 140d^2$

$13d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{13} \Rightarrow |d| = 1$

$|d| = 1$, т.к. $d \in Z$

Если $a_1 \in Z$, то $d \in Z$

$\boxed{d = 1 \text{ или } d = -1}$

$d = 2$

$d^2 = 4$ $\quad 4 \cdot 13 = 40 + 12 = 52$

$d^2 = \frac{52}{13}$

$13d^2 < 35$

$16 \times 8 = 128$

~~$a_9 + a_9 = a_1 \pm 8$~~

$a_{17} = a_1$

Так как прогрессия возр., то $d = 1$

S

$a_9 = a_1 + 8$

$a_{17} = a_1 + 16$

$(a_1 + 8)(a_1 + 16) > S + 12$

$a_1^2 + 24a_1 + 128 > S + 12$

$a_1^2 + 24a_1 + 116 > S$

$4 = \sqrt{16} < \sqrt{23} < \sqrt{25} = 5$

$\frac{D}{2} = 25 - 2 = 23$

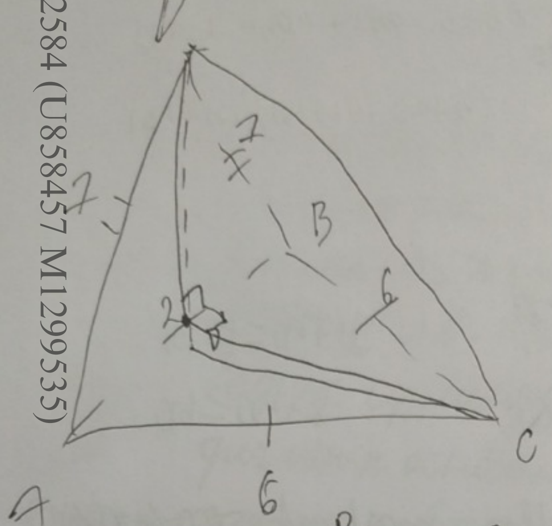
$a_1 = -5 \pm \sqrt{23}$

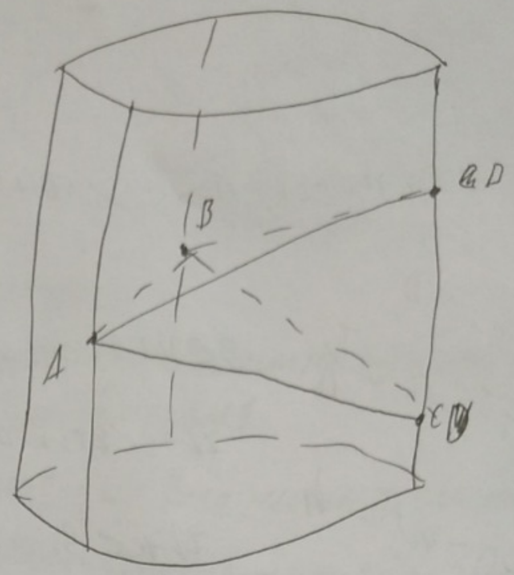
$(a_1 + 10)(a_1 + 14) < S + 47$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < S + 47$

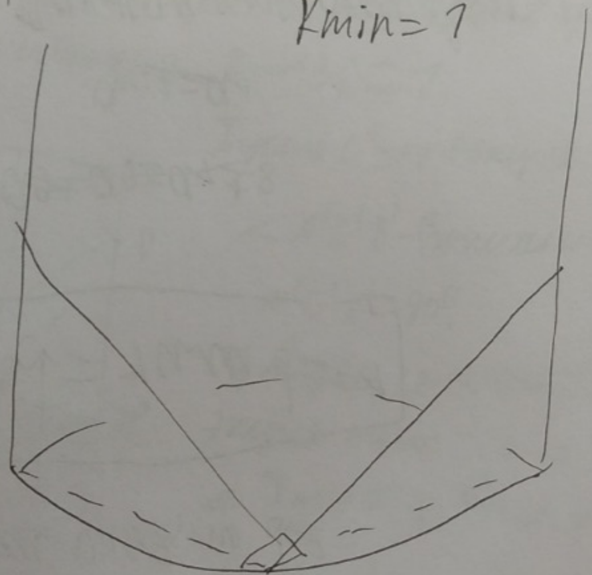
$a_1^2 + 24a_1 + 93 < S$

$a_1^2 + 24a_1 + 93 < S < a_1^2 + 24a_1 + 116$



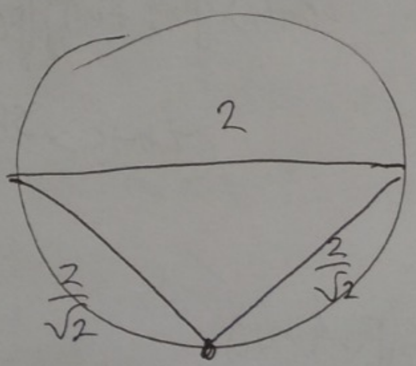


$R_{min} = 7$

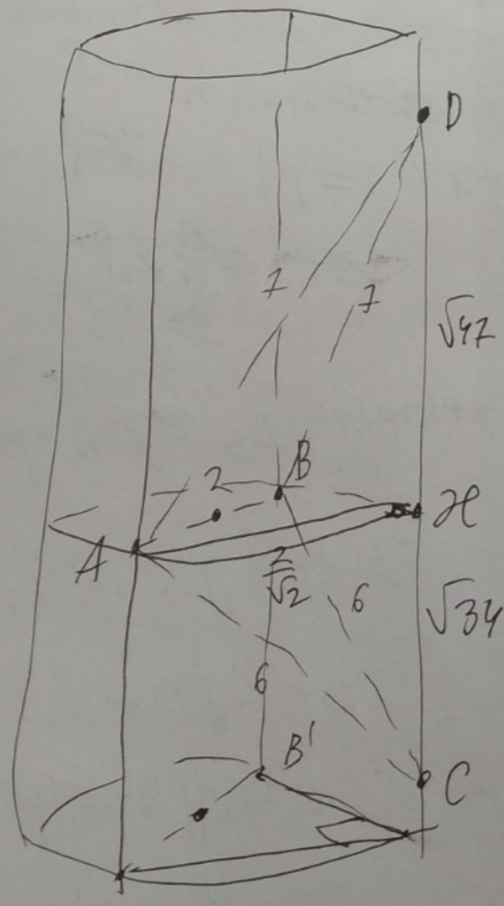


$49 - \frac{4}{2} = 49 - 2 = 47$

$36 - 2 = 34$



$\sqrt{34} + \sqrt{47}$



A' B' - диаметр

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102584**

ID профиля: **858457**

Вариант 19

Чистовик

(4). Так как НОК$(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15}$, то любое из чисел $a;b;c$ представляется в виде $7^k\cdot 3^p$ (т.к. если будет ещё какой-то простой множитель в разложении, то НОК$(a;b;c)$ не будет на него делиться) и в хотя бы одном числе (в его разложении) есть 7^{15} и хотя бы в одном 3^{17}. Так как НОД$(a;b;c)=21=7\cdot 3$, то хотя в бы в одном числе (в его разложении на прост. множ-и) есть 7 и хотя бы в одном 3. ~~Пусть p, q ...~~ значит в каком-то числе есть 3^{17}, в каком-то 3, а в третьем 3 в степени от 1 до 17

	a	b	c
11	3^{11} 3^{17}	3^n	3
ч	7^{11} 7^{15}	7^m	7

Есть 3 варианта для того, где может быть 3^{17}, тогда есть 2 варианта, где может быть 3 (т.к. одно место уже занято), тогда 1 вариант для 3 в степ. от 1 до 17. На каждый вариант с 3^{17} и 3 есть 17 вар-тов с 3 в степ. от 1 до 17. Всего получается $3\cdot 2\cdot 17$ вариантов расставить тройки по числам $a;b;c$.

Аналогично есть $3\cdot 2\cdot 15$ вариантов расставить семёрки по числам a, b и c. То есть на каждый из $3\cdot 2\cdot 17$ вариантов расставить тройки есть $3\cdot 2\cdot 15$ вариантов расставить семёрки. Всего $3\cdot 2\cdot 17\cdot 3\cdot 2\cdot 15$ вариантов, т.е. $6^2\cdot 15\cdot 17=36\cdot 17\cdot 15$

36×17: $252 + 36 = 612$

~~615×15: $3075 + 615 = 9225$~~

612×15: $3060 + 612 = 9180$

Ответ: 9180.

4

Чистовик

5) Пусть $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=a$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=b$; $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2=c$

По св-вам логарифмов $ac=\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(x-\frac{11}{4})^2=\log_{(\frac{x}{2}-1)}(x-\frac{11}{4})$ (1)

$b=\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=2\log_{(x-\frac{11}{4})}(\frac{x}{2}-1) \Rightarrow \frac{b}{2}=\log_{(x-\frac{11}{4})}(\frac{x}{2}-1) \Leftrightarrow$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$: $ac=\frac{2}{b} \Rightarrow abc=2$ $\qquad \Rightarrow \frac{2}{b}=\log_{(\frac{x}{2}-1)}(x-\frac{11}{4})$ (2)

Пусть $a=b$, тогда $c=a+1$, тогда $abc=a^2(a+1)=2 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow 2a^2=\frac{1}{a+1}$ (*) Если $a>1$, $\frac{1}{a+1}<1$, а $2a^2>2$, то есть равенство не выполняется~~

~~Если $a=1$, то $2a^2=2$, $\frac{1}{a+1}=\frac{1}{2}$, (*) неверно; Если $a<1$~~

$\Rightarrow a^3+a^2-2=0$. $a=1$ - корень

$$\begin{array}{r|l} a^3+a^2+0-2 & a-1 \\ \underline{a^3-a^2} & a^2+2a+2 \\ 2a^2+0 & \\ \underline{2a^2-2a} & \\ 2a-2 & \\ \underline{2a-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$a^2+2a+2=0$

$D=4-4\cdot2<0 \Rightarrow$ нет. вещ. корней $\Rightarrow$

$\Rightarrow a=1$ - ед. корень $\Rightarrow c=1, ab=2$

Буквой a можно было обозначить любое число, значит значения чисел равны 1; 1 и 2. Пусть ~~$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=2 \Rightarrow (\frac{x}{2}-1)^4=(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$~~

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=2 \Rightarrow x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-1 \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{11}{4}-1=\frac{7}{4}$; $x=\frac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=\log_{(\frac{7}{4}-1)^2}(\frac{7}{4}-\frac{1}{4})=\log_{(\frac{3}{4})^2}(\frac{3}{2})\neq 1$, т.к. $1=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}$

Значит $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)\neq 2$

Пусть $\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}(x-\frac{11}{4})^2=2 \Rightarrow (\frac{x}{2}-\frac{1}{4})^2=(x-\frac{11}{4})^2 \Rightarrow (\frac{x}{2}-\frac{1}{4})^2-(x-\frac{11}{4})^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+x-\frac{11}{4})(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}-x+\frac{11}{4})=0 \Rightarrow (\frac{3}{2}x-\frac{12}{4})(-\frac{x}{2}+\frac{10}{4})=0 \Rightarrow \frac{3}{2}x=\frac{12}{4}=3$; $\frac{x}{2}=\frac{10}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2 \Rightarrow \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=\log_{\sqrt{2-\frac{11}{4}}}(\frac{2}{2}-1)$ - не имеет смысла, $x=2$ - н.к.

$x=5 \Rightarrow \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=\log_{\sqrt{\frac{9}{4}}}(2{,}5-1)=\log_{1{,}5}1{,}5=1$; $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=$

$=\log_{(\frac{5}{2}-1)^2}(\frac{5}{2}-\frac{1}{4})=\log_{2{,}25}2{,}25=1$, значит $x=5$ - подходит. Пусть $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=2$,

тогда $\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}(x-\frac{11}{4})^2=1 \Rightarrow \frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{4} \Rightarrow x^2-6x+\frac{122}{4}=0 \Rightarrow 2x^2-12x+61=0$

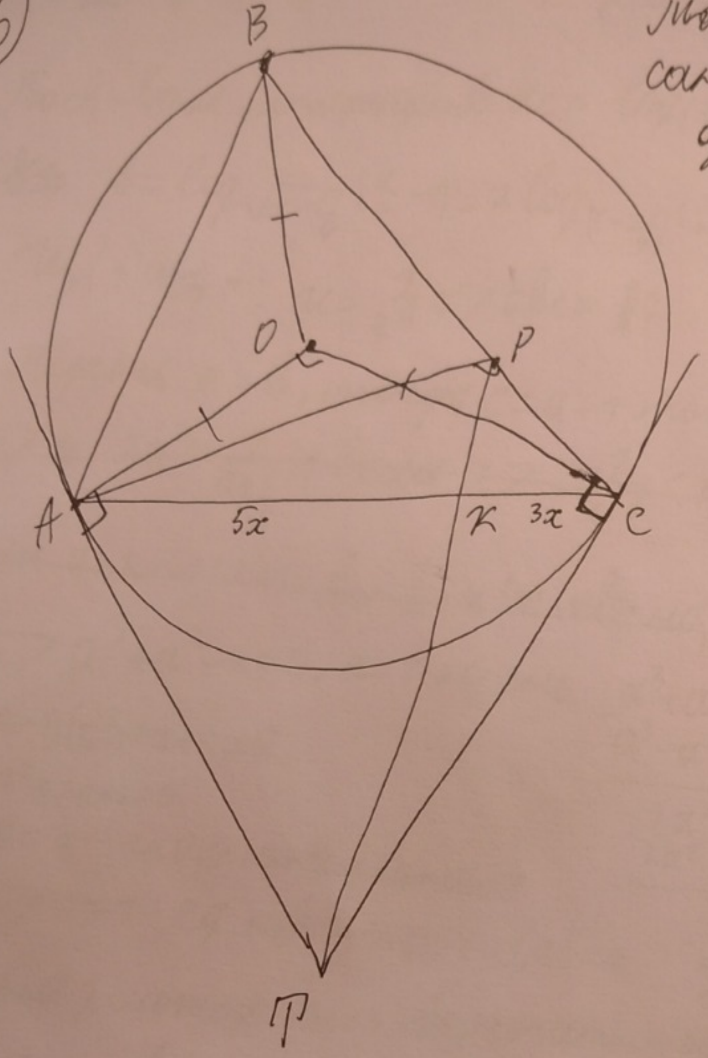
$D=144-4\cdot2\cdot61<0$, значит $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})\neq 2 \Rightarrow \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=1$;

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)=1$ и $\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}(x-\frac{11}{4})^2=2$. Но в этом случае есть ед. реш-е $x=5$ Ответ: 5

5

Чистовик

6



Так как $\angle AOC$ и $\angle APC$ – вписанные и опираются на одну дугу, то $\angle AOC = \angle APC$

Т.к. $\triangle APK$ и $\triangle KPC$ имеют общую высоту, то

$$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

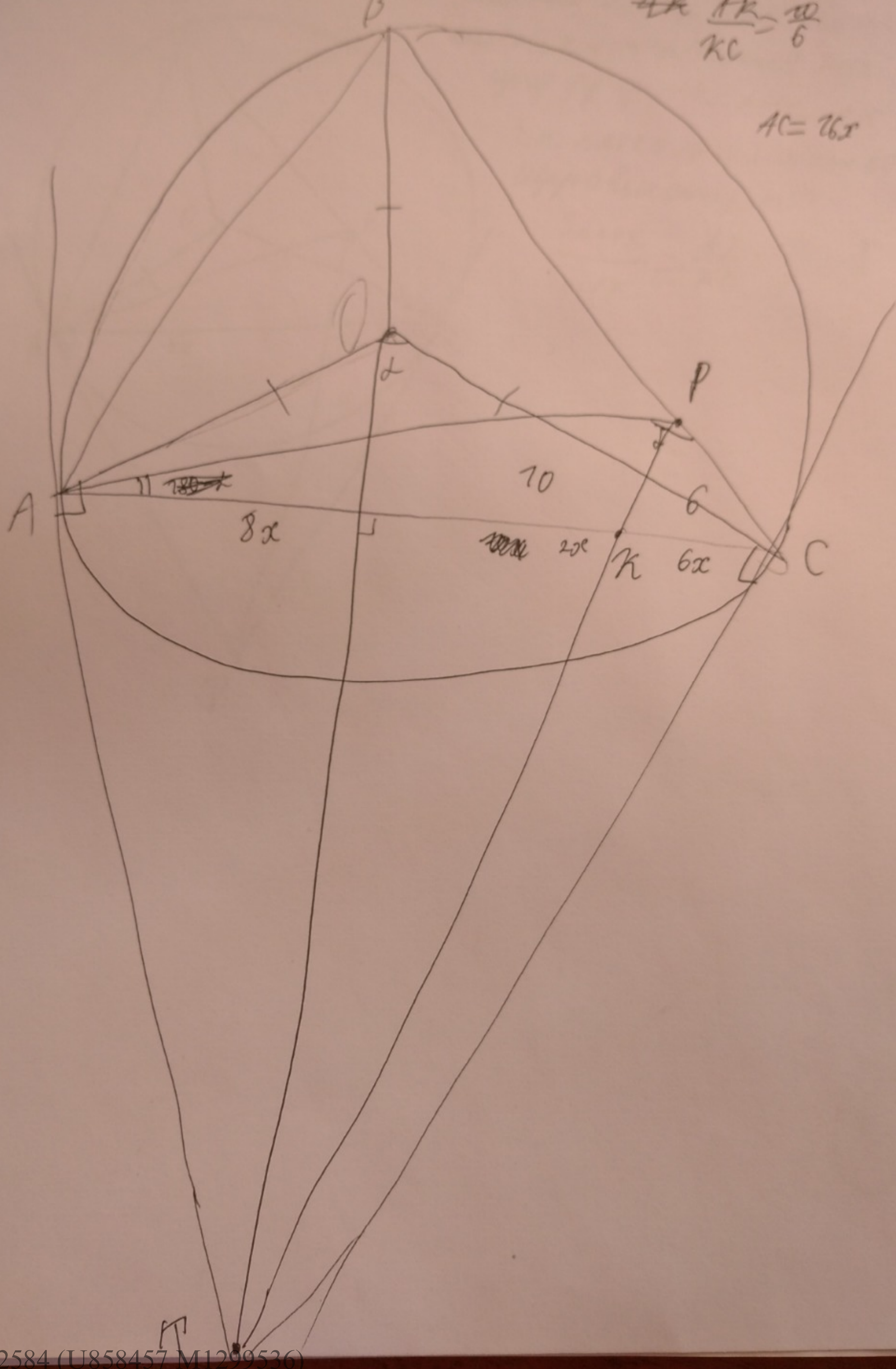
6

Черновик

$\angle AO \; \angle OAC = \frac{180-\alpha}{2}$

$\cancel{4x}$ $\frac{AK}{KC} = \frac{10}{6}$

$AC = 16x$



Черновик

20 НОД$(a;b;c)=21=7\cdot 3$

$7^k\cdot 3^l$ – любое из $a;b;c$, k

НОК$(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15}$

$a;b;c$ не имеют в общих делителях 7^n или 3^n, где $n\geq 2$

$\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$ где-то есть точно 3^{17} и 7^{15} 3 и 7

~~одно из имеет точно 21~~

a b c

$7^{15}\cdot 3$ $7^{15}\cdot 3^{17}$ $7\cdot 3$ $C_3^2=3$ в.

$7\cdot 3^{16}$

$\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

$7^2\cdot 3$ $7\cdot 3^2$ $7^2\cdot 3^2$

"3" a b c тв.

3^{17} $3^{\{1;17\}}$ 3 $3\cdot 2\cdot 17$

"7" a_1 b_1 c_1

7^{15} $7^{\{1;15\}}$ 7 $3\cdot 2\cdot 17$

$(3\cdot 2\cdot 17)^2$ – кол-во пар вариантов

Возьмём гранфоличные варика

$(3\cdot 2\cdot 17)^2\cdot 6$

$a\cdot 7^{15}$; $b\cdot 7^{15}$; $c\cdot 7^{15}$ – 3в. $\cdot$ 2в. $\cdot$ 1 = 6

$17\times 15 = 85 + 17 = 255$

$36\times 15 = 180 + 36 = 540$

$255\times 36 = 1530 + 765 = 9180$

$36\times 17 = 252 + 36$

$540\times 17 = 378 + 54 = 9180$

21102584 (U858457 M1299536)

Черновик

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)$; $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2$

$\parallel$ $\quad$ $\parallel$ $\quad$ $\parallel$

a $\quad$ b $\quad$ c

$a \cdot c = \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(x-\frac{11}{4})^2 = \log_{(\frac{x}{2}-1)}(x-\frac{11}{4})$

$2b = \log_{(x-\frac{11}{4})}(\frac{x}{2}-1)$

$a \cdot c = \frac{1}{2b}$

$2abc = 1$

$abc = \frac{1}{2}$

Пусть $a = b$, $c = a+1$

$\frac{1}{a} \cdot \frac{3}{2}$

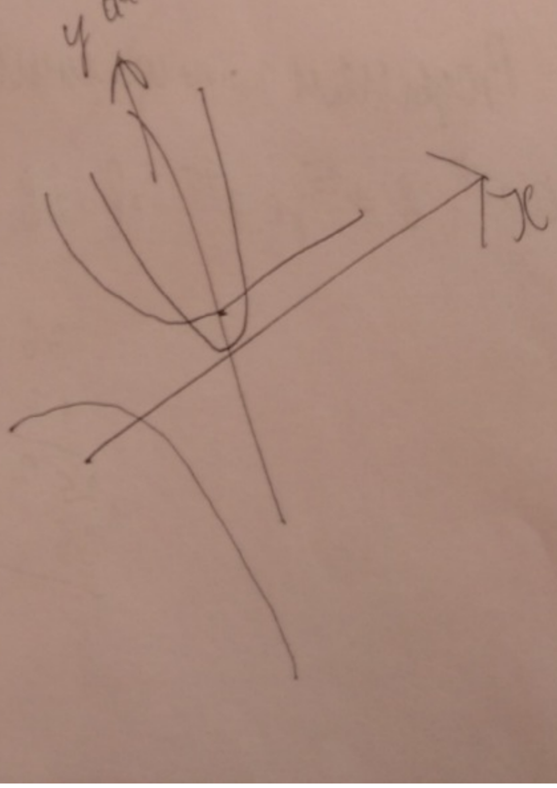
$a^2 \cdot (a+1) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} + \frac{\cancel{2}\,1}{4} = \frac{1+3}{8} = \frac{3}{8}$

$a^3 + a^2 - \frac{1}{2} = 0$

$4a -$

$\frac{1}{a+1} =$



21102584 (U858457 M1299536)

Черновик