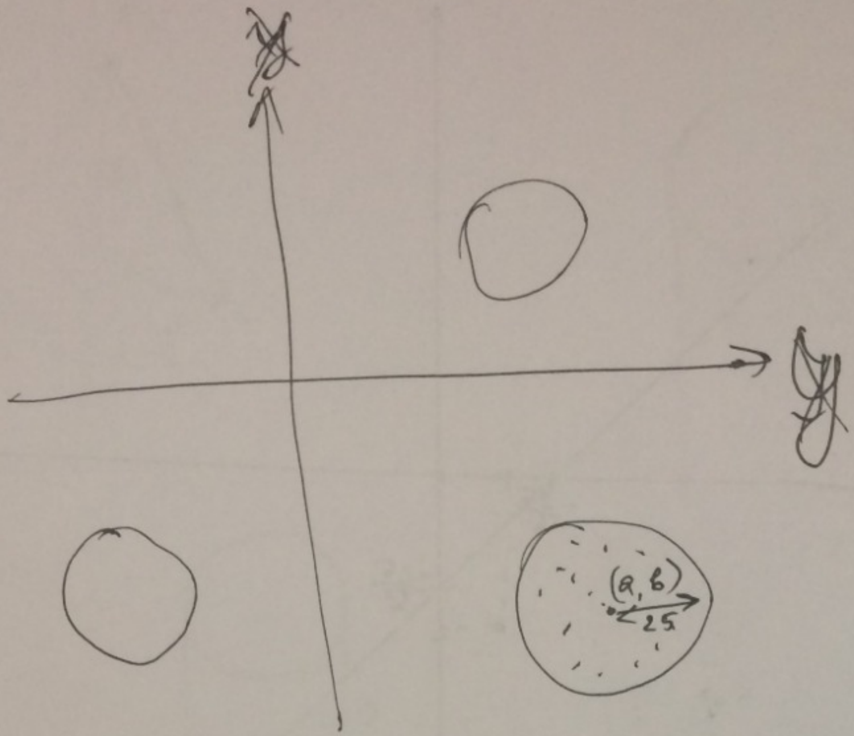
Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102570**

ID профиля: **855536**

Вариант 19



$-8a-6b \leq 25$

$a^2+b^2 \leq -8a-6b$

$a^2+8a+b^2+6b \leq 25$

16+9

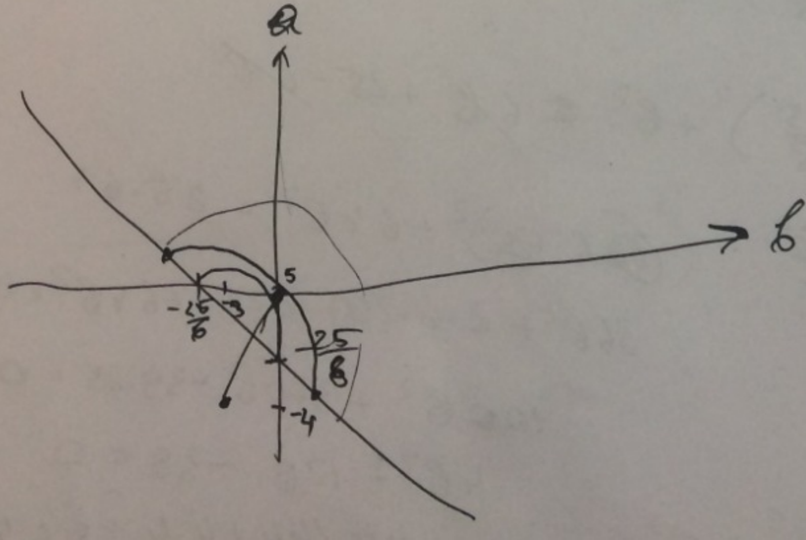
$$\boxed{(a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25}$$

$-8a-6b \geq 25$

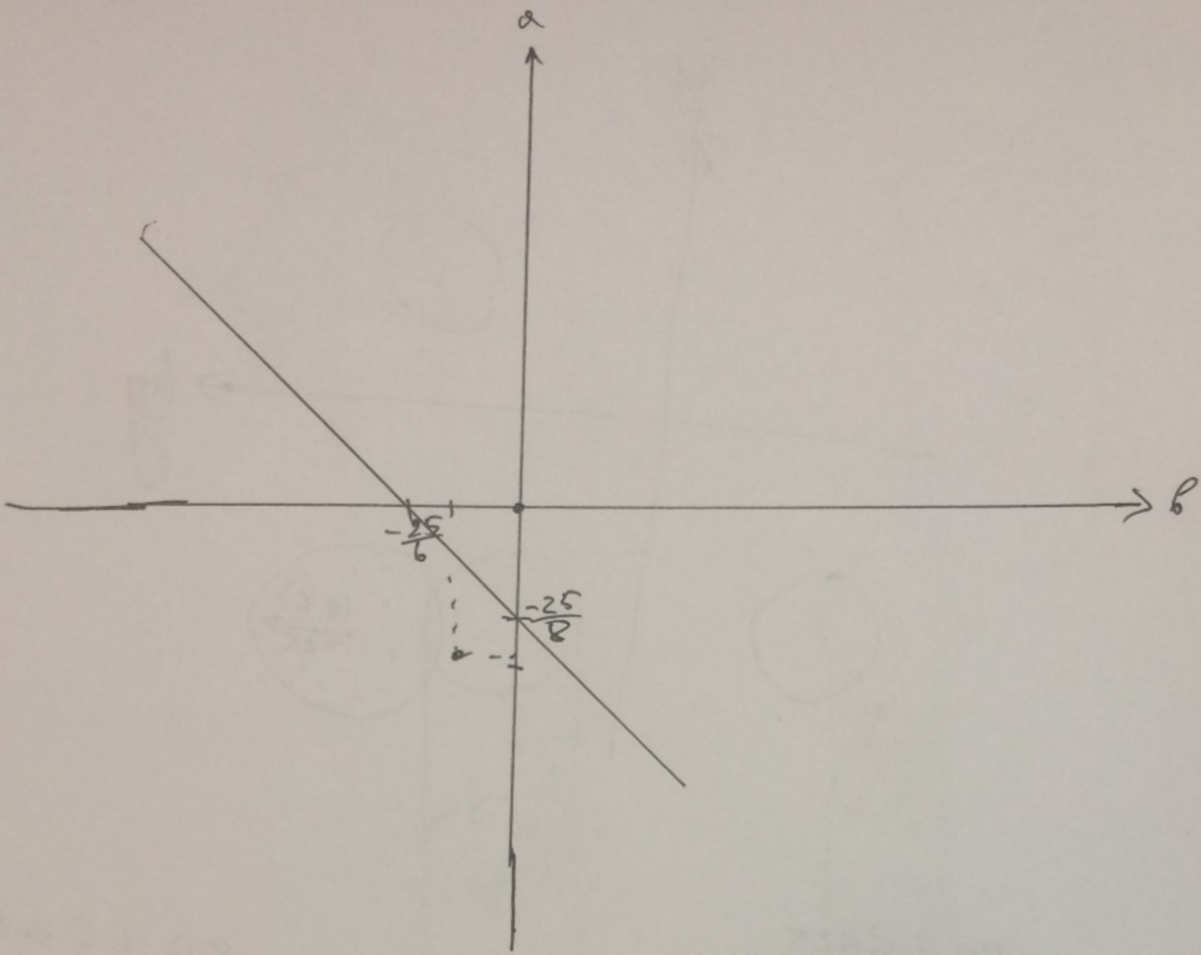
$a^2+b^2 \leq 25$

$8a+6b \geq -25$

$a \geq -\frac{6}{8}b-\frac{25}{8}$



(Черновик)



$-8a-6b \le 25$

$8a+6b \geqslant -25$

$a \geqslant -\frac{6}{8}b-\frac{25}{8}$

$\left(-\frac{6}{8}b-\frac{25}{8}\right)^2+b^2 = -8\left(-\frac{6}{8}b-\frac{25}{8}\right)-6b$

$\begin{array}{r} 64 \\ -25 \\ \hline 39 \end{array}$

$\left(\frac{6}{8}b+\frac{25}{8}\right)^2+b^2 = \cancel{6b}+25-\cancel{6b}$

$25\cdot 25$
$-25\cdot 64$

$\cancel{\frac{36}{48}b^2}$

$(6b+25)^2+64b^2=25\cdot 64$

$36b^2+2\cdot 6\cdot 25b+625+64b^2=25\cdot 64$

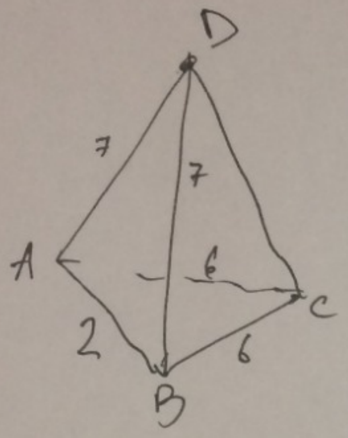
$100b^2+300b-39\cdot 25=0 \quad |:25$

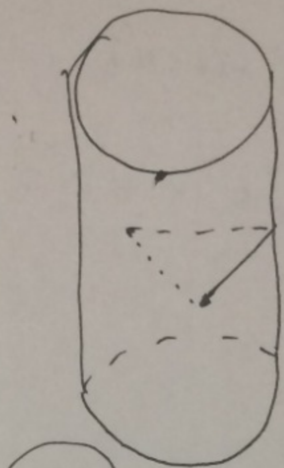
$4b^2+12b-39=0$

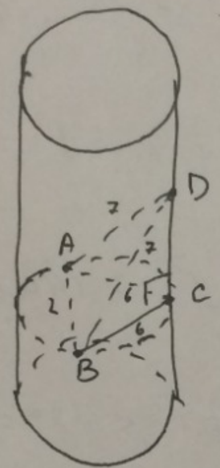
$D=144+4\cdot 4\cdot 39=4^2\cdot 3^2+4^2\cdot 39=$
$=4^2\cdot 48$

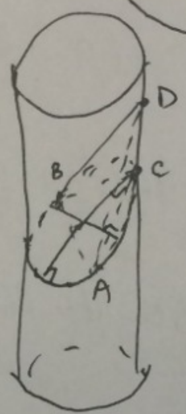
21102570 (U855536 M1299699)

Черновик







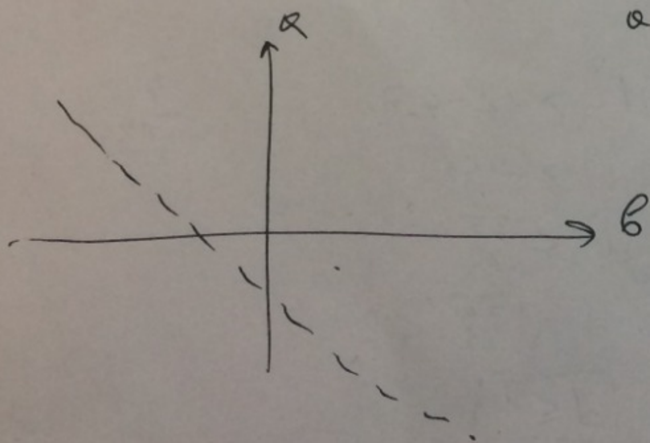


$\min(-8a-6b) \geq 25$

$-8a-6b \leq 25$

$8a+6b \geq -25$

$a \geq -\frac{6}{8}b - \frac{25}{8}$



Черновик

$(a_1+16d)(a_1+8d)>S+12$

$(a+10d)(a+14d)<S+47$

$(a_1+16d)(a_1+8d)>\frac{a_1+a_1+13d}{2}\cdot 14+12$

$(a_1+5)^2>0$

$a_1+5\neq 0$

$a_1\neq -5$

$(a_1+16d)(a_1+8d)>14a_1+7\cdot 13d+12$

$a_1^2+8a_1d+16a_1d+128d^2>14a_1+91d+12$

$a_1^2+14a_1d+10a_1d+140d^2<14a_1+91d+47$

$a_1^2+24a_1d+128d^2>14a_1+91d+12$

$100-4=96$

-10

$a_1^2+24a_1d+140d^2<14a_1+91d+47$

$-a_1^2-24a_1d-140d^2>-14a_1-91d-47$

$92=2\cdot 46=$

$=4\cdot 23$

$-22d^2>12-47$

$\begin{array}{r} 47 \\ -12 \\ \hline 35 \end{array}$

$\begin{array}{r} 128 \\ -91 \\ \hline 37 \\ -12 \\ \hline 25 \end{array}$

$-22d^2>-35$

$d^2<\frac{35}{22}$

$d<\sqrt{\frac{35}{22}}<2$

$\boxed{d\leq 1}$

$\begin{array}{r} 140 \\ -91 \\ \hline 49 \\ -47 \\ \hline 2 \end{array}$

21102570 (U855536 M1299699)

Чистовик ВАРИАНТ 19

№1

Пусть d - разность прогрессии, тогда:

$\bullet\ S = \frac{a_1 + a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = (2a_1+13d)\cdot 7 = 14a_1+91d$

$\bullet\ a_9 = a_1+8d$

$\bullet\ a_{17} = a_1+16d$

$\bullet\ a_{11} = a_1+10d$

$\bullet\ a_{15} = a_1+14d$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} (a_1+16d)(a_1+8d) > S+12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ^{(1)}\ a_1^2+8a_1d+16a_1d+128d^2 > S+12 \\ ^{(2)}\ a_1^2+14a_1d+10a_1d+140d^2 < S+47 \quad \Big|\cdot(-1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a_1^2+24a_1d+128d^2 > S+12 \\ -a_1^2-24a_1d-140d^2 > -S-47 \end{cases}$$

$$128d^2-140d^2 > 12-47$$

$$-22d^2 > -35$$

$$d^2 < \frac{35}{22}$$

$$\underset{\text{т.к. прогр. возр}}{0 <} d < \sqrt{\frac{35}{22}}$$

(Чистовик)

т.к. арифм. прогрессия состоит из целых чисел,

то $a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_2 = a_1 + d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$,

а т.к. $0 < d < \sqrt{\frac{35}{22}} < 2$, то $0 < d \le 1 \Rightarrow \boxed{d = 1}$

тогда:

$$\begin{cases} (1)\ a_1^2 + 24a_1 + 128 > S + 12 \\ (2)\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < S + 47 \end{cases}$$

Подставим S:

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 \cdot 1 + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 \cdot 1 + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Rightarrow (a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 + 5 \ne 0 \Rightarrow a_1 \ne -5 \\ (*)\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$$

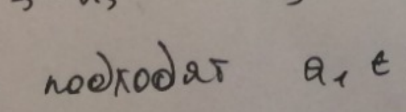
(*) $a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

найдём корни трёхчлена: $a_1^2 + 10a_1 + 2 = 0$

$D = 100 - 4 \cdot 2 = 100 - 8 = 92$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} =$

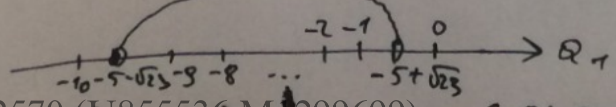
$= -5 \pm \sqrt{23}$



нам подходят $a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23}) \cap \mathbb{Z} \setminus \{-5\}$

$4 < \sqrt{23} < 5 \Rightarrow -5 < -\sqrt{23} < -4 \Rightarrow -10 < -5-\sqrt{23} < -9$

$-1 < -5+\sqrt{23} < 0$



т.е. нам подходят $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Чистовик

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \\ {}^{*} a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$$

*

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$

1) $-8a-6b \le 25$, $8a+6b \geq -25$, $\boxed{b \geq -\frac{8}{6}a - \frac{25}{6}}$:

$a^2+b^2 \le -8a-6b$

$a^2+8a+b^2+6b \le 0$

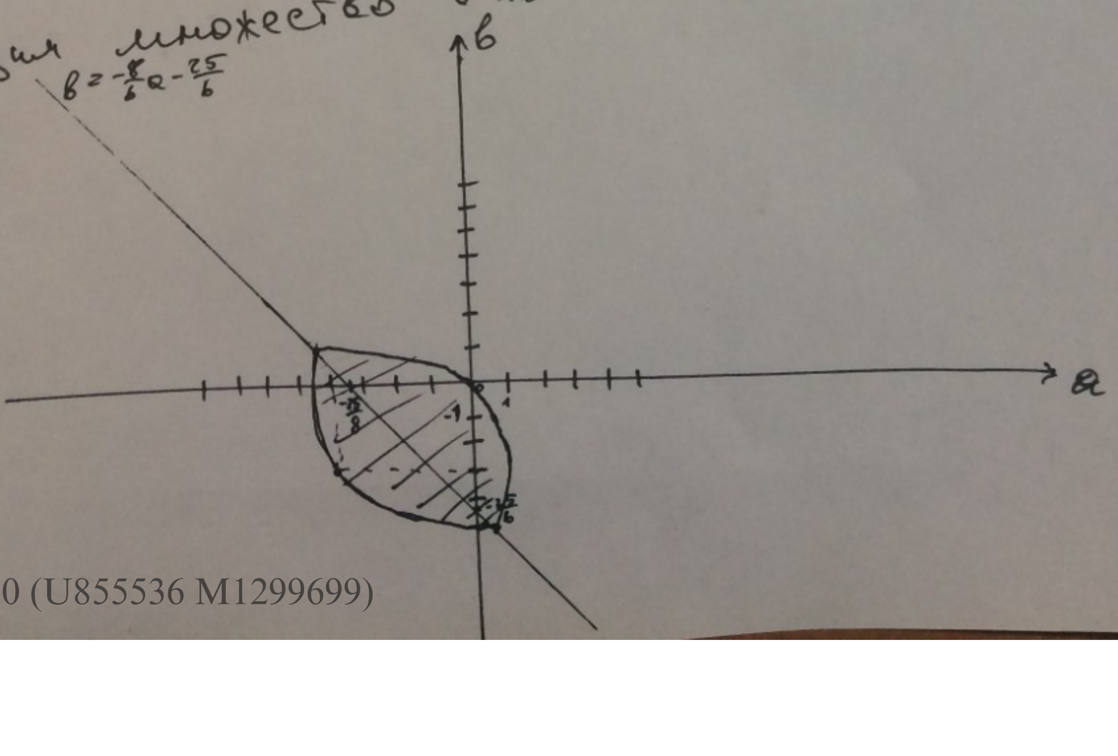
$a^2+8a+16+b^2+6b+9 \le 16+9$

$\boxed{(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25}$

2) $b < -\frac{8}{6}a - \frac{25}{6}$:

$\boxed{a^2+b^2 \le 25}$

Изобразим множество в плоскости „ab":



3

21102570 (U855536 M1299699)

Чистовик

Найдём т. перес-я окружности $(a+4)^2+(b+3)^2=25$ и прямой $b=-\frac{8}{6}a-\frac{25}{6}$

$a^2+b^2=25$

$a^2+\left(-\frac{8}{6}a-\frac{25}{6}\right)^2=25 \quad |\cdot 36$

$36a^2+(8a+25)^2=25\cdot 36$

$36a^2+64a^2+2\cdot 8a\cdot 25+25^2=25\cdot 36$

$100a^2+16\cdot 25a+25(25-36)=0$

$100a^2+16\cdot 25a-25\cdot 11=0 \quad |:25$

$4a^2+16a-11=0$

$D=4^2\cdot 4^2+4\cdot 4\cdot 11=4^2(16+11)=4^2\cdot 27=4^2\cdot 3^2\cdot 3$

$a=\frac{-16\pm 4\cdot 3\sqrt{3}}{8}=-2\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\cancel{a^2+(b+3)^2=25}$

$\cancel{(b+3)^2=24}$

$\cancel{b+3=2\sqrt{6}}$

$\cancel{b=2\sqrt{6}-3}$

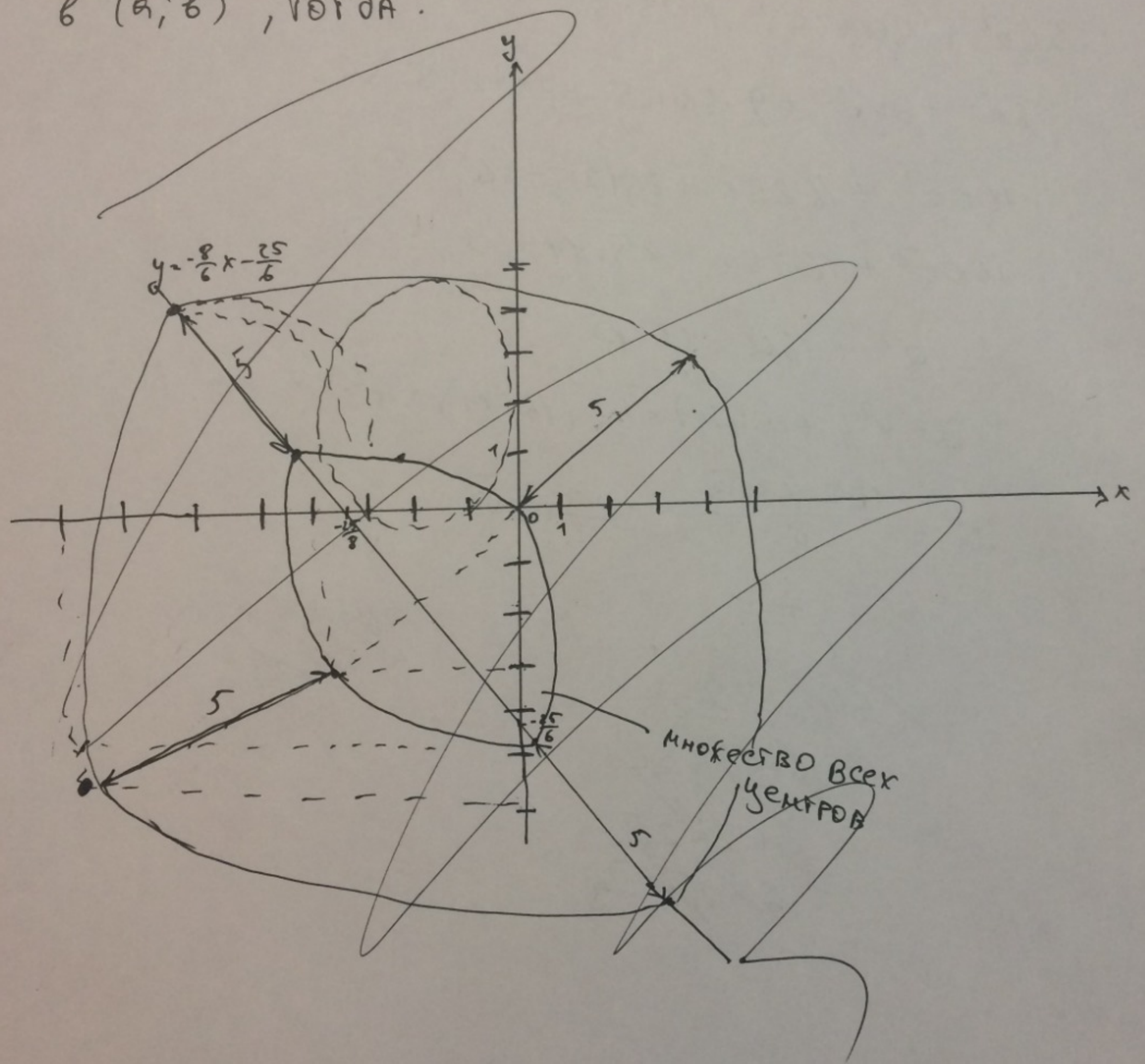
Заметим, что окружность $(a+4)^2+(b+3)^2=25$ проходит через $(0;0)$, окр-сть $a^2+b^2=25$ проходит через $(-4;-3)$, и обе окр-сти пересекают прямую $b=-\frac{8}{6}a-\frac{25}{6}$ в тех же точках, т.к.

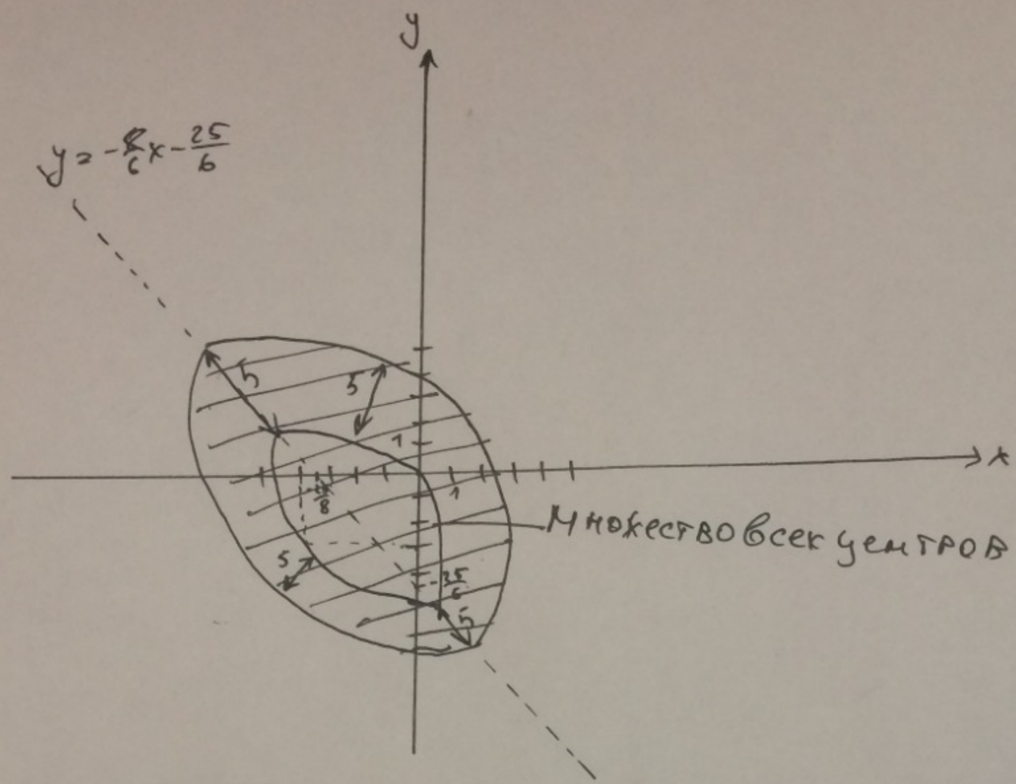
4

Чистовик

при $b = -\frac{8}{6}a - \frac{25}{6}$ нижнее нер-во системы принимает вид $a^2+b^2 \leq 25 = -8a-6b$ (т.е. это происходит в обоих случаях)

Рассм. неравенство $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25$
в плоскости xy это круг радиусом 5 с центром в $(a;b)$, тогда:





Рассмотрев каждую пару (a, в), подходящую для второго неравенства, в качестве центра окружности радиусе 5, получаем картинку, на 5 шире предыдущей

~~тогда фигура M складывается из двух частей,~~
~~два сектора~~

$\boxed{\text{Черновик}}$

$(a+4)^2+(b+3)^2$

$a^2+b^2=25$

$a^2+\left(-\frac{8}{6}a-\frac{25}{6}\right)^2=25$

$36a^2+(8a+25)^2=25\cdot 36$

$36a^2+64a^2+2\cdot 8a\cdot 25+25^2=25\cdot 36$

$100a^2+16\cdot 25a+25(25-36)=0$

$100a^2+16\cdot 25a+25\cdot(-11)=0$

$4\cdot 25a^2+16\cdot 25a-11\cdot 25=0 \quad |:25$

$4a^2+16a-11=0$

$D=4^2\cdot 4^2+4\cdot 4\cdot 11=4^2(16+11)=4^2\cdot 27$

Черновик

$-2-\frac{3}{2}\sqrt{3} \overset{<}{\vee} -\frac{25}{8} \quad | \cdot 8$

$-16-12\sqrt{3} \overset{<}{\vee} -25$

$-12\sqrt{3} \overset{<}{\vee} -9$

$9 \overset{<}{\vee} 12\sqrt{3}$

$3 \vee 4\sqrt{3}$

$9 \vee 16 \cdot 3$

$-2 \overset{>}{\vee} \frac{3}{2}\sqrt{3}$

$-2+\frac{3}{2}\sqrt{3} \overset{>}{\vee} 0$

$\frac{3}{2}\sqrt{3} \overset{>}{\vee} 2$

$3\sqrt{3} \overset{>}{\vee} 4$

$9 \cdot 3 \overset{>}{\vee} 16$

$\frac{3}{2}\sqrt{3} \vee 3$

$-16 \pm$

$-\frac{25}{8} \cdot -\frac{8}{6} - \frac{25}{6}$

$\frac{25}{6} - \frac{25}{6} = 0$

$-2-\frac{3}{2}\sqrt{3} \overset{<?}{\vee} -\frac{25}{8}$

$-3,\ldots$

$-16-12\sqrt{3} \vee -25$

$-12\sqrt{3} \vee -9$

$-2-1{,}5\cdot1{,}5 \quad -2-2{,}25=$

$=-4{,}25$

$a^2+\left(-\frac{8}{6}a - \frac{25}{6}\right)^2 = 25$

$36a^2+64a^2+2\cdot8\cdot25a+25^2=25\cdot36$

$100a^2+16\cdot25a+25(\underbrace{25-36}_{-11})=0$

100

$4a^2+16a-11=0$

$D=4^2\cdot4^2+4\cdot4\cdot11=4^2(16+11)=4^2\cdot3^2\cdot3$

$\frac{-16\pm12\sqrt{3}}{8}=-2\pm\frac{3}{2}\sqrt{3}$

21102570 (U855536 M1299699)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102570**

ID профиля: **855536**

Вариант 19

Черновик

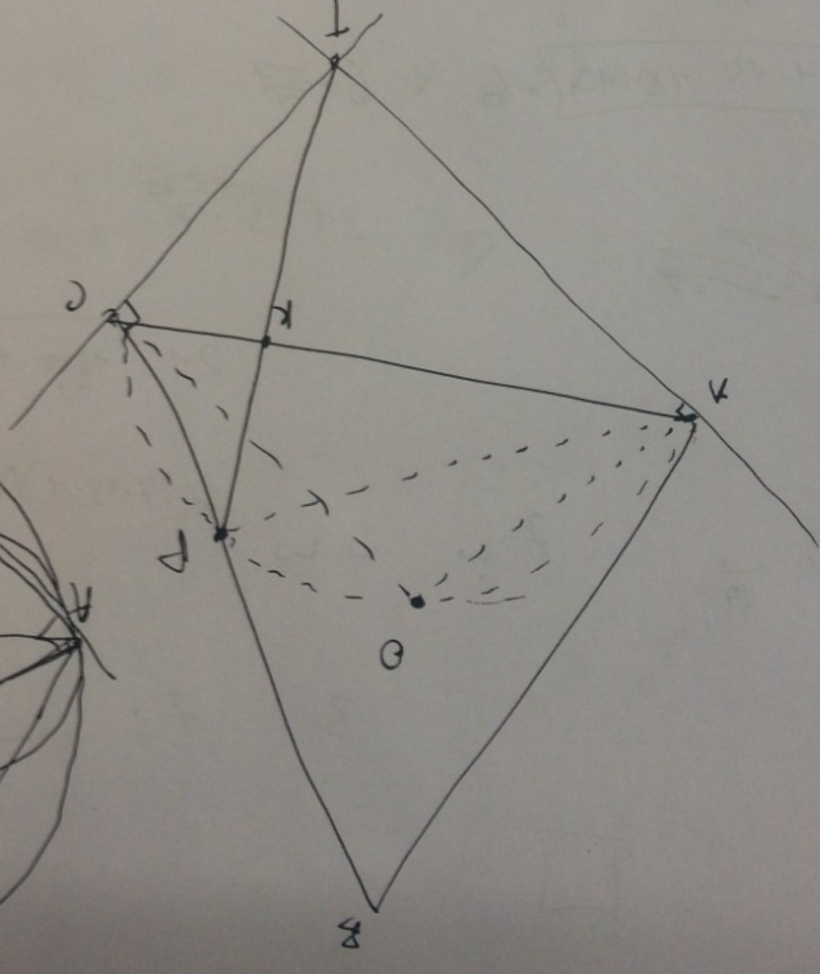
$9+6$

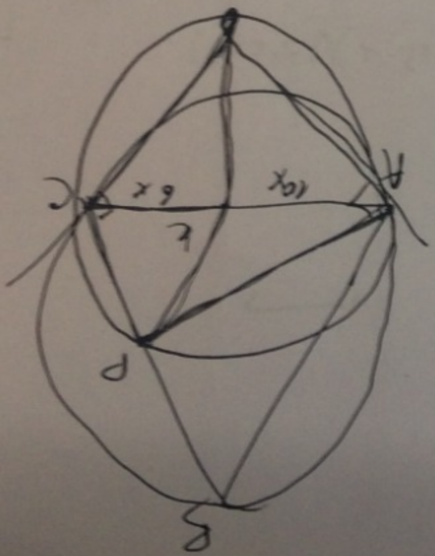
$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 17 \\ \hline 105 \\ +15 \\ \hline 255 \end{array}$$

$6\cdot(255-1)(255-2)$

$6\cdot 254\cdot 253$

$$\begin{array}{r} 254 \\ \times 253 \\ \hline 762 \\ 1270 \\ +508 \\ \hline 64262 \end{array}$$





$(17\cdot15)^3$

$3\cdot 7^{a_7}$ $7\cdot 3$ 3

$a_7 - 15$

$b_7 -$

$3\cdot\underbrace{\quad}_{17}$ $7\cdot$ $7\cdot 3$

1ое 2ое 3е

$3\cdot\underbrace{\quad}_{17}$ $7\cdot$ $3\cdot 7$

21 $\underbrace{3^{12}\cdot 7^{15}\cdot 11\cdot 14}$

$21\cdot 11\cdot 7^{14}\cdot 2$

$\boxed{\cdot 11\cdot 14\cdot 10\cdot 13}\cdot 6 + 6\cdot$

$21\ 3^{12}\cdot 7^{15}$

21 $\underbrace{\;12\cdot15 - 1\quad 17\cdot15 - 2\;}$

$6\cdot(17\cdot15-1)(17\cdot5-2)$

$3\cdot\underbrace{\quad}_{14}$ $7\cdot$

3 7

$a = 3\cdot 7^{a}$

$3\cdot 7^{a_7}$

$3\cdot 7^{a_7}$ $7\cdot 3^{b_3}$

a_7

$7\cdot 3^{b_3}$ $7\cdot$ b

$3^{c_3}\cdot 7^{c_7}$

3 c $3\cdot 7$ c

$3\cdot 7^{a_7}$ 21 тогда

$7\cdot 3^{b_3}$ b

$3^{c_3}\cdot 7^{c_7}$ c

21102570 (U855536 M1299700)

Черновик

$3 \cdot 7$

$3^{17} \cdot 7^{15}$

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \cdot \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \cdot \ldots$

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log$

$a \cdot a \cdot (a+1) = 1$

$a^3 + a - 1 = 0$

$\sqrt{x-\frac{11}{4}}^2 / \left(\frac{x}{2}-1\right)$

$x - \frac{11}{4} = \frac{x}{2} - 1$

$\frac{x}{2} = \frac{11}{4} - 1$

$x = \frac{11}{2} - 2 = 5{,}5 - 2 = 3{,}5$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 4 \\ \hline 144 \\ -125 \\ \hline 19 \end{array}$$

$x - \frac{11}{4} = \frac{x^2}{4} - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 1 + 1$

$\frac{x^2}{4} - 2x + 1 + \frac{11}{4} = 0$

$x^2 - 8x + 4 + 11 = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$3 \cdot 7^x \quad 7 \cdot 3^y \quad 3^7 \cdot 7^p$

$21 \quad 21 \qquad 3 \cdot 7^x \quad 7 \cdot 3^y \quad 3^7 7^p$

$3 \cdot 7^x \quad 7 \cdot 3^y \quad 3^z \cdot 7^p \qquad 3 \cdot 7^x \quad 3 \qquad \boxed{21 \quad 21 \quad 3^{17} \cdot 3^{15}} \quad \boxed{3}$

$x > 1 \quad y > 1 \quad \cancel{z, p > 1}$

$\boxed{1\cancel{7} \quad 1\cancel{5} \quad 17 \cdot 15 - 2} \cdot 6$

$21 \cdot 3^{\alpha} 7^{\beta}$

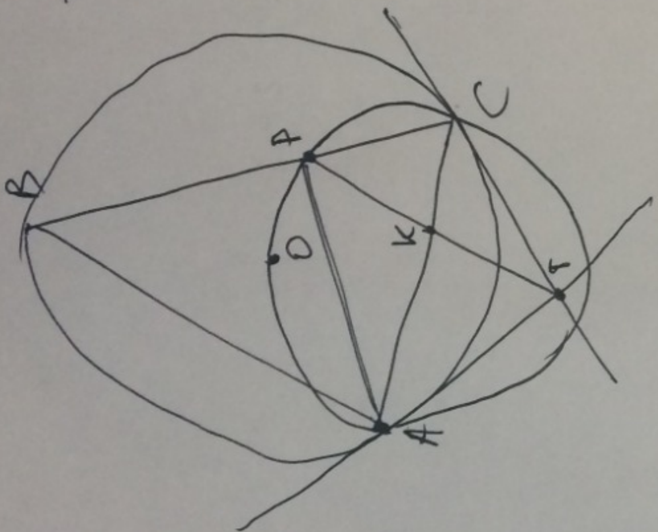
$21 \quad 3^{17} \cdot 3^{15} \quad 3^{17} \cdot 3^{15}$

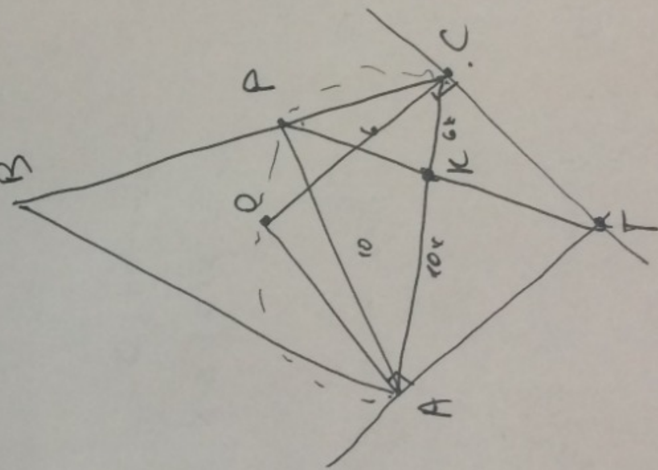
$\boxed{21 \quad 17 \cdot 15 - 1 \quad 17 \cdot 15 - 2}$ $\boxed{13}$

$(17 \cdot 15 - 1) \cdot (17 \cdot 15 - 3) \cdot 2$

$3 \cdot 7^x \quad 7 \cdot 3^y \quad 3 \cdot 7^x$

$x-$





$3 \cdot 7$

$\boxed{\text{Чистовик}}$ Вариант 19 Часть 2

№5

Пусть $\frac{x}{2} - 1 = a > 0, \neq 1$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = b > 0, \neq 1$

$\sqrt{x - \frac{11}{4}} = c > 0, \neq 1$, тогда

логарифмы принимают вид:

$$\log_{a^2} b \; ; \; \log_c a \; ; \; \log_b c^4$$

$$\Updownarrow \; a, b, c > 0$$

$$\frac{1}{2} \log_a b ; \log_c a ; 4 \log_b c$$

Заметим, что:

$$\frac{1}{2} \cdot \log_a b \cdot 4 \log_b c \cdot \log_c a =$$

$$= 2 \log_a c \cdot \log_c a = 2 \cdot \log_a a = 2 \cdot 1 = 2$$

Пусть два логарифма равны a^*, а третий a^*+1, тогда:

$$a^* \cdot a^* \cdot (a^*+1) = 2$$

$$a^{*3} + a^{*2} - 2 = 0$$

$$a^{*3} - a^{*2} + 2a^{*2} - 2a^* + 2a^* - 2 = 0$$

$$a^{*2}(a^*-1) + 2a^*(a^*-1) + 2(a^*-1) = 0$$

$$(a^{*2} + 2a^* + 2)(a^* - 1) = 0$$

$$((a^{*2} + 2a^* + 1) + 1)(a^* - 1) = 0$$

$$((a^*+1)^2 + 1)(a^* - 1) = 0$$

7

$\boxed{\text{Чистовик}}$

$a^4-1=0$

$a^4=1$

Т.о. два логарифма равны 1, а другой − 2

~~Пусть~~ $\cancel{\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=2}$ ~~, тогда:~~

$$\cancel{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^4}$$

$$\cancel{\left(\frac{x}{2}-1\right)^4=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}$$

1) Пусть $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2$

$$\left(\sqrt{x-\frac{11}{4}}\right)^2=\frac{x}{2}-1$$

$$x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-1$$

$$\frac{x}{2}=\frac{11}{4}-1$$

$$x=\frac{11}{2}-2=5,5-2=3,5$$

При этом:

$a=\frac{x}{2}-1=1,75-1=0,75>0,\ \neq 1$

$b=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=1,75-0,25=1,5>0,\ \neq 1$

$c=\sqrt{x-\frac{11}{4}}=\sqrt{\frac{14}{4}-\frac{11}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{0,75}>0,\ \neq 1$

$\Rightarrow \boxed{x=3,5}$ − решение

Чистовик

2) Пусть $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=2$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2-\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=0$$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}-x+\frac{11}{4}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+x-\frac{11}{4}\right)=0$$

$-\frac{x}{2}+\frac{10}{4}=0$

$\frac{x}{2}=\frac{10}{4}$

$x=\frac{10}{2}$

$\cdot\, x=5$

$\frac{3}{2}x-3=0$

$x=\frac{3\cdot 2}{3}$

$\cdot\, x=2$

При $x=5$:

$a=\frac{x}{2}-1=2,5-1=1,5>0,\neq 1$

$b=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=2,5-0,25=2,25>0,\neq 1$

$c=\sqrt{x-\frac{11}{4}}=\sqrt{5-2,75}=\sqrt{2,25}>0,\neq 1$

$\boxed{x=5}$ – реш-е

при $x=2$:

$a=\frac{x}{2}-1=\frac{2}{2}-1=1-1=0$, но $a>0,\neq 1$ $\Rightarrow$

$x=2$ не подх.

$\boxed{\text{Чистовик}}$

3) Пусть $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=2$, тогда

$$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=1$$

Тогда:

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=1$$

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x^2-2x\cdot\frac{11}{4}+\frac{121}{16}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{16}$$

$$x^2-\frac{12}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{121}{16}=0$$

$$x^2-6x+\frac{4+121}{16}=0$$

$$x^2-6x+\frac{125}{16}=0 \quad |\cdot 16$$

$$16x^2-6\cdot16x+125=0$$

$$D=6^2\cdot16^2-4\cdot16\cdot125=$$

$$=6^2\cdot16\cdot4\cdot4-4\cdot16\cdot125=$$

$$=16\cdot4(36\cdot4-125)=$$

$$=16\cdot4(144-125)=16\cdot4\cdot19$$

↓

4

(Чистовик)

Тогда:

$$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1$$

$$\sqrt{x-\frac{11}{4}}=\frac{x}{2}-1$$

$$x-\frac{11}{4}=\frac{x^2}{4}-2\cdot\frac{x}{2}\cdot 1+1$$

$$x-\frac{11}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1$$

$$\frac{x^2}{4}-2x+1+\frac{11}{4}=0 \quad |\cdot 4$$

$$x^2-8x+4+11=0$$

$$x^2-8x+15=0$$

по об. т. Виета:

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$$

при $x=3$:

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\log_{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}\left(3-\frac{11}{4}\right)^2=$$

$$=\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^2=2\log_{\frac{5}{4}}\frac{1}{4}\neq 1$$

$x=3$ не подх

при $x=5$

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\log_{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}}\left(5-\frac{11}{4}\right)^2=$$

$=\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{9}{4}\right)^2=2\neq 1$, $x=5$ не подх (в рамках этого случая)

5

Чистовик

тогда подходят $x=3{,}5$; ~~x~~ $=5$

Ответ: 3,5 ; 5

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

~~Упорядочим $a\le b\le c$, тогда найдя все такие тройки ($a\le b\le c$) и умножив на количество перестановок ($3!=6$), получим ответ.~~

т.к. $НОК(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15}$, в разложении a, b, c на простые множители есть только тройки и семёрки.

т.к. $НОД(a,b,c)=3\cdot 7$, то хотя бы в одном из чисел только одна 3, и хотя бы в одном из чисел только одна 7. (но не меньше, иначе НОД был бы <21)

~~Пусть одно~~

~~1) Пусть хотя бы одно из чисел~~

Тогда наши числа имеют вид:

$3\cdot 7^{x}$; $7\cdot 3^{y}$; $3^{z}\cdot 7^{p}$; $x,y,z,p\in N$

6

21102570 (U855536 M1299700)

(Чистовик)

Заметим, что все числа повторятся не могут, иначе их НОД был бы равен им самим $\Rightarrow$ каждое из них равнялось 21, и НОК был бы равен им самим $\Rightarrow$ каждое равнялось $3^{17} \cdot 7^{15}$ но $21 \neq 3^{17} \cdot 7^{15}$ $\Rightarrow$ противоречие!

~~1) никто не повторяется:~~

~~тогда $x \in \{2, \ldots, 15\}$, $y \in \{2, \ldots, 17\}$, $3^z \cdot 7^p \neq 3 \cdot 7^x$ и $3^z \cdot 7^p \neq 7 \cdot 3^y$~~

~~$\Rightarrow$ кол-во вариантов (для не упорядоченной тройки):~~

~~$14 \cdot 16 \cdot (15 \cdot 17 - 2)$~~

~~$\Rightarrow$ для упорядоченной тройки:~~

~~$3! \cdot 14 \cdot 16 (15 \cdot 17 - 2) = \boxed{6 \cdot 14 \cdot 16 \cdot (15 \cdot 17 - 2)}$~~

2) повторяется $3 \cdot 7^x$ и $7 \cdot 3^y$, тогда

$x = y = 1$ и наш набор:

$21 \quad 21 \quad 3^z \cdot 7^p$

но тогда число $\underset{(\text{т.к. НОК} = 3^{17} \cdot 7^{15})}{3^z \cdot 7^p = 3^{17} \cdot 7^{15}}$ $\Rightarrow$

кол-во вариантов -1 (для неупор.)

$\Rightarrow$ для упорядоченной $- \boxed{3}$

3) повторяется $3 \cdot 7^x$ и $3^z \cdot 7^p$, тогда

наш набор:

$3 \cdot 7^x \qquad 7 \cdot 3^y \qquad 3 \cdot 7^x$

тогда $x = 15$, $\underset{(\text{т.к. НОК} = 3^{17} \cdot 7^{15})}{y = 17}$, т. е.

наши числа:

$3 \cdot 7^{15} \quad 7 \cdot 3^{15} \quad 3 \cdot 7^{15}$

$\Rightarrow$ кол-во вариантов -1 (для неуп.) $\Rightarrow$ для уп.: $\boxed{3}$

7

21102570 (U855536 M1299700)

(Чистовик)

4) повторяется $7\cdot 3^y$ и $3^z\cdot 7^p$, тогда наш набор:

$$3\cdot 7^x \quad 7\cdot 3^y \quad 7\cdot 3^y$$

тогда $x=15$, $y=17$, т.е. наши числа:
(т.к. НОК $=3^{17}\cdot 7^{15}$)

$$3\cdot 7^{15} \quad 7\cdot 3^{17} \quad 7\cdot 3^{17}$$

т.е. кол-во вар-ов -1 (для неуп.)

$\Rightarrow$ для уп. $-\boxed{3}$

1)* никто не повторяется!

тогда $x\in\{1,\ldots,15\}$, $y\in\{1,\ldots,17\}$, а $3^z\cdot 7^p\neq x$ и $3^z\cdot 7^p\neq y$

тогда кол-во вар-ов:

$$15\cdot 17\cdot(15\cdot 17-2)-\underbrace{1\cdot 1\cdot(15\cdot 17-2)}_{\text{посчитали лишние вар-ы с } x=y=1\text{, тогда числа } 3\cdot 7^x \text{ и } 7\cdot 3^y \text{ повт.}} =$$

$$=(15\cdot 17-1)(15\cdot 17-2) \quad \text{(неупоряд.)}$$

$\Rightarrow$ для уп.: $3!\cdot(15\cdot 17-1)(15\cdot 17-2)=\boxed{6\cdot(15\cdot 17-1)(15\cdot 17-2)}$

Тогда всего вариантов (для уп. троек):

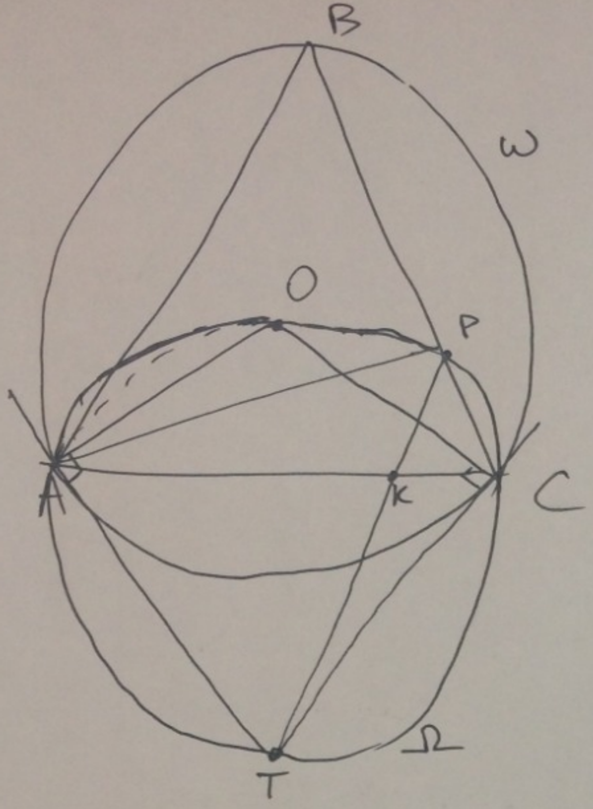
$$3+3+3+6(15\cdot 17-1)(15\cdot 17-2)=9+6\cdot 254\cdot 253$$

Ответ: $9+6\cdot 254\cdot 253$

8

Чистовик

№6



т.к. AT и TC – касательные к ω, то

$OA \perp AT$, $OC \perp CT$ $\Rightarrow$ $\angle OAT + \angle OCT = 90 + 90 = 180^\circ$

$\Rightarrow$ AOCT – вписанный, при этом если около

AOCT оп. окружность Ω, то $\triangle AOC$ тоже окажется

вписанным в Ω $\Rightarrow$ т. $P \in \Omega$