Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102539**

ID профиля: **873780**

Вариант 19

Вариант 19, Часть 8, ~~Черновик~~ Чистовик 1

(1) Арифм. прогрессия

$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots \longrightarrow$

$a_n = a_1 + (n-1)d.$

$S = a_1 + \ldots + a_{14} = \frac{2a_1 + d(13)}{2} \cdot 14 = 14a_1 + 91d$

$a_9 a_{17} > S+12 \quad | \quad a_{11} \cdot a_{15} < S+47$

$(a_1+8d)(a_1+16d) > S+12 \quad | \quad (a_1+10d)(a_1+14d) < S+47$

$a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > S+12 \quad | \quad a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < S+47.$

$a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \quad | \quad a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$

$a_1^2 + 24a_1d + 144d^2 - 144d^2 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

$(a_1+12d)^2 > 16d^2 + 91d + 14a_1 + 12 \quad | \quad (a_1+12d)^2 < 4d^2 + 14a_1 + 91d + 47$

$16d^2 + 91d + 14a_1 + 12 < (a_1+12d)^2 < 4d^2 + 14a_1 + 91d + 47$

$12d^2 < (a_1+12d)^2 - 4d^2 - 14a_1 - 91d - 12 < 35.$

$12d^2 < 35. \quad d > 0$

$d \in \mathbb{Z}.$

$\Rightarrow d = 1$

$12 < (a_1+12)^2 - 4 - 14a_1 - 91 - 12 < 35.$

$12 < a_1^2 + 10a_1 + 37 < 35$

$0 < a_1^2 + 10a_1 + 25 < 23$

$0 < (a_1+5)^2 < 23.$

$\Rightarrow a_1 = -9$

$a_1 = -8$

$\ldots$

$a_1 = -1$

Вар. 19. Часть 1. ~~Черновик~~ Чистовик 2.

② $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b,\ 25)\end{cases}$

— круг в центре (a,b) и радиусом 5.

→ исследуем где м. б. центр

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ 25 \le -8a-6b \end{cases}$

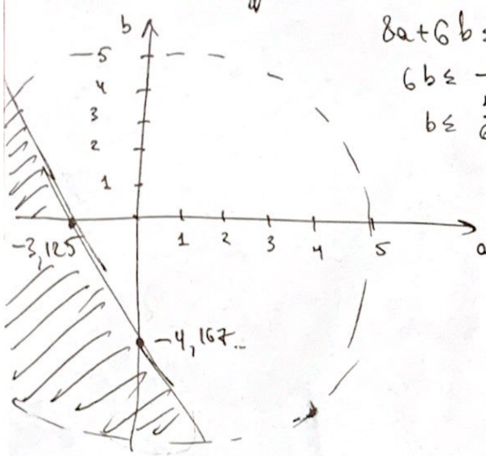
$a^2+b^2 \le 25 \le -8a-6b$

$-8a-6b \ge 25$

$8a+6b \le -25$

$6b \le -25-8a$

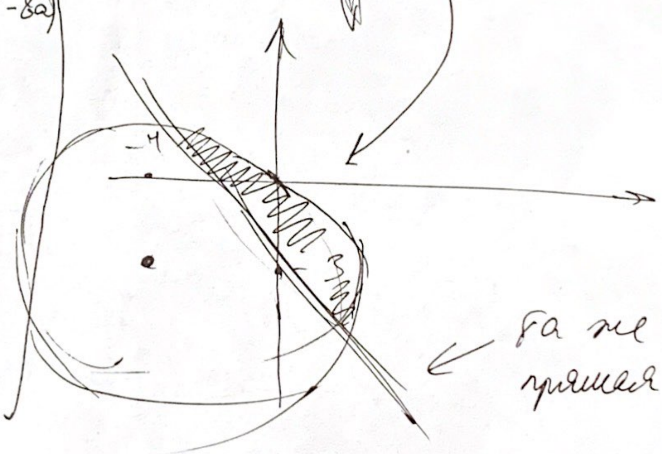
$b \le \frac{1}{6}(-25-8a)$



$\begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b \\ -8a-6b \le 25 \end{cases}$

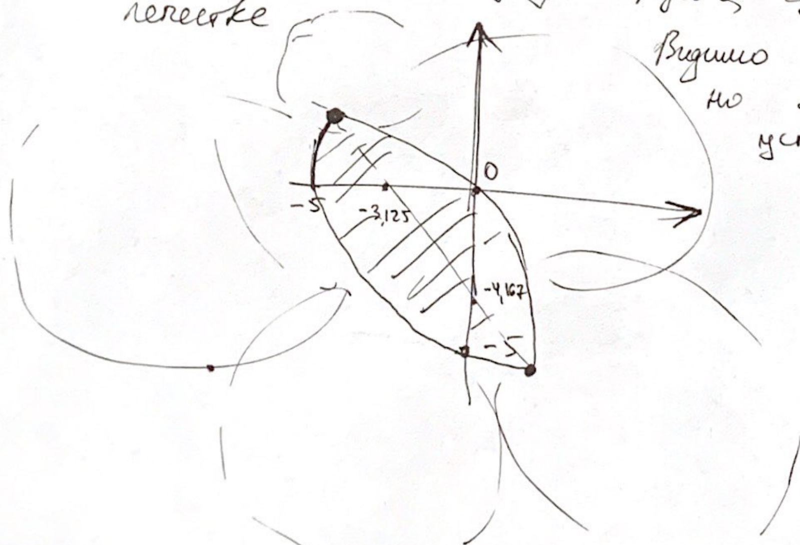
$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$

$-8a-6b \le 25$



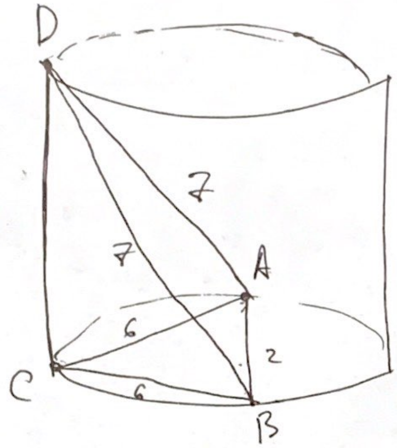
та же прямая

→ Надо вычислить площадь кругов где центр в лепестке



Видимо интегрировать, но я не успеваю.

② Вариант 19 Часть 2 Чистовик 3



$\therefore$] $CD = x$

Для нер-ва Δ $1 < x < 13$

т.к. все точки находятся на боковой пов-ти, то чтобы уменьшить радиус – ~~[illegible]~~ можно перемещать AB вдоль оси цилиндра.

При этом радиус уменьшается, CD увеличивается.

Явное ограничение: $AB = 2r$.

$\Rightarrow r = 1$

Ответ: 1.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102539**

ID профиля: **873780**

Вариант 19

Вариант 19, Часть 2 Чистовик 1.

(4) Число зек. (a, b, c) где $a, b, c \in \mathbb{N}$ – ?

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 21 = 3 \cdot 7 \\ НОК(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

$\exists$ $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$
$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$
$c = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}$

где $p_1 \ldots p_n$ – простые
$\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_n, \gamma_1 \ldots \gamma_n \in \mathbb{N}_0$

При составлении: $НОД = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)}$

$НОК = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)}$

Отсюда следует, что среди чисел $p_1 \ldots p_n$ есть всего 2 числа p_1 и p_2 = 3 и 7 соответсвенно

т.е $a = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\alpha_2}$, $b = 3^{\beta_1} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 3^{\gamma_1} \cdot 7^{\gamma_2}$

Причём: $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \geq 1$ по НОД. Но при этом. по НОК!

Итак:
$1 \leq \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \leq 17$
$1 \leq \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \leq 15.$

Причём, должно выполняться что $\min(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 1$
$\max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 17$
$\min(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 1$
$\max(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 15.$

Поэтому надо закрепить эти показатели степеней у чисел, а другое отпустить пробегать от 1 – 17 или от 1 – 15.

т.к тройки $(1, 1, 2)$ и $(2, 1, 1)$ считаются различными, то:

$\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 17$, $\gamma_1 = 2$ — 16.
$\alpha_1 = 17$, $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = 2$ — 16.
$\alpha_1 = 2$ — 16 $\beta_1 = 1$ $\gamma_1 = 17$
$\alpha_1 = 2$ — 16 $\beta_1 = 17$ $\gamma_1 = 1$
$\alpha_1 = 1$ $\beta_1 = 2$ — 16 $\gamma_1 = 17$
$\alpha_1 = 17$ $\beta_1 = 2$ — 16 $\gamma_1 = 1$.

~~Посчитали тройки~~ Осталось посчитать с совпадениями:

1	1	17	1	17	17
1	17	1	17	1	17
17	1	1	17	17	1

6 троек.

$\Rightarrow$ для $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – $15 \cdot 6 + 6$ троек $= 16 \cdot 6 = 96.$

Аналогично для $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$: $13 \cdot 6 + 6 = 14 \cdot 6 = 84$

$\Rightarrow$ Ответ: $96 \cdot 84 = 8064$ тройки.

Вариант 19. Часть 2. Чистовик 2

5) $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)$.

I: II: III:

$$\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)},\quad 2\frac{\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)}{\ln\left(x-\frac{11}{4}\right)},\quad 2\frac{\ln\left(x-\frac{11}{4}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}.$$

Видим ~~вдан~~ что числит. и знаменат. совпадают
В частности в произведении получим 2
т.е

$$\begin{cases} abc=2 \\ a=b \\ c=a+1=b+1 \end{cases} \Rightarrow a\cdot a\cdot(a+1)=2$$

$$a^3+a^2=2.$$

$$a^3+a^2-2=0$$

$$(a-1)(a^2+2a+2)=0$$

$$a=1 \lor (a+1)^2=-1.$$

$$a\in\varnothing$$

$\Rightarrow a=1$

Итак здесь две дроби равны 1, а другая 2.
Перебираем:

1) $I=III=1$ $II=I+1$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)}=1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=2\ln\left(\frac{x}{2}-1\right).$$

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{x=1}_{\text{не удовлетв ОДЗ}} \lor x=5.$$

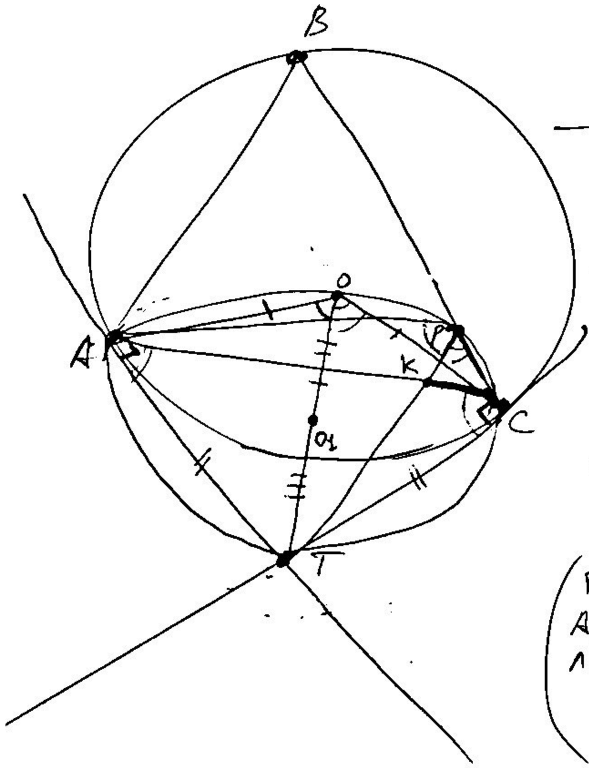
$\Rightarrow x=5.$

Аналогично проверяя случаи: $I=II=1$, $III=I+1=2$ и $II=III=1$, $I=2$

Ответ $x=5.$

Вариант 19, Часть 2 Чистовик 3

(6)



$S_{\Delta APK} = 10$

$S_{\Delta CPK} = 6$

Найти: 1) $S_{\Delta ABC}$ — ?

2) AC — ? при условии, что $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$.

Решение:

Т.к. AT и TC — касат. то $OA \perp AT$, $OC \perp CT$ $\Rightarrow$ OT — диаметр окружности ω_2 (пусть в условии ω — ω_1, а вторая окружность — ω_2)

O_1 — середина OT. $\Rightarrow$ O_1 — центр ω_2.

(Тут имелось в виду, что через точки A, O, C проходит единств. окружн., на которой лежит P и лежит T. $\Rightarrow$ точки A, O, C, T, P на окружн. ω_2 с центром O_1 — середина OT).

Здесь учитывалась симметрия относительно OT (поэтому если отразить ΔOAT он перейдёт в OCT).

Из условия $S_{\Delta APK} = \frac{1}{2} h \cdot AK$, $S_{\Delta CPK} = \frac{1}{2} h \cdot CK$ $\Rightarrow$ $\frac{AK}{CK} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

Видим много равных углов в окружности ω_2 в силу вписанности. Куча подобных Δ. Не успеваю по времени. Но кажется основной шаг с тем, что точки A, O, C, P, T на одной окр — сделан