Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102491**

ID профиля: **888761**

Вариант 19

№1 Вариант 19 Чистовик. стр.1

$a_1, a_2, a_3 \ldots$ арифм. прогр.

$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 7(2a_1 + 13d)$, $d > 0$

$\begin{cases} a_9 a_{17} > S + 12 \\ a_{11} a_{15} < S + 47 \end{cases}$

Сравним $a_{11}a_{15}$ и $a_9 a_{17}$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 16d) \ ? \ (a_1 + 8d)(a_1 + 14d)$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140 d^2 \ ? \ a_1^2 + 240d + 128 d^2$

$a_{11}a_{15}$ больше на $12d^2$

$S + 12 + a_9 a_{17} < a_{11} a_{15} < S + 47$

$12 d^2 < 35$

$d^2 < 3 \Rightarrow d = 1$, т.к. $d > 0$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 138 \\ a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \quad (1) \\ a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \quad (2) \end{cases}$

(1) $a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 100 - 8 = 92$

$a_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = -5 \pm \sqrt{23} \Rightarrow a \in (-5 - \sqrt{23}; -5 + \sqrt{23})$

$a \in [-9; -1]$

(2) $(a_1 + 5)^2 > 0$

$a_1 \neq -5$

Ответ: $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

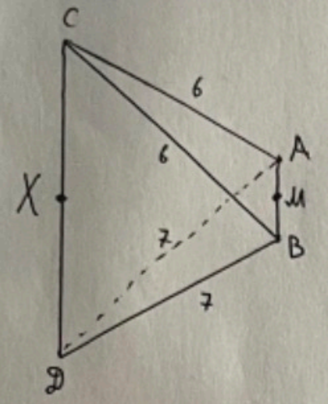
21102491 (U888761 M1300671)

№2 Вариант 19 Чистовик. стр 2.

$AB = 2$

$AC = CB = 6$

$AD = DB = 7$



1) Пусть M – середина AB.

т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle BAD$ – равнобед., то $CM \perp AB$ и $DM \perp AB$

Тогда $AB \perp CMD \Rightarrow AB \perp CD$

т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра, то $AB \parallel$ основанию.

2) Тогда AB – хорда. т.к. радиус цилиндра минимальный, то AB – диаметр окружности параллельной основанию.

Радиус цилиндра равен 1, M – находится в центре.

3) Из прямоуг. $\triangle CAM$ и $\triangle BDM$:

$CM = \sqrt{6^2 - 1} = \sqrt{35}$

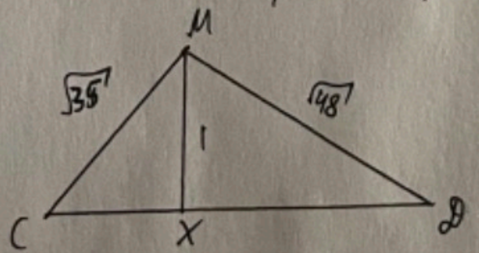
$DM = \sqrt{7^2 - 1} = \sqrt{48}$

Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью $\parallel$ основанию, проход. через AB.

X – точка на CD; ABX – вписанный.

т.к. $CD \perp AB$ и $XM \perp AB$, то в силу симметрии. , то $XM \perp CD$. MX – радиус, $MX = 1$

Получим:



Если X лежит по одну из сторон от C и D, то:

$CD = DX - CX = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

из т. Пифагора: $CX = \sqrt{34}$; $DX = \sqrt{47}$

$CD = CX + DX = \sqrt{47} + \sqrt{34}$ – если X лежит между C и D

Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{34}$; $CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

21102491 (U888761 M1300671)

№3 Вариант 19 Чистовик.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$$

1) $-8a-6b \le 25 \to b \ge \frac{-25-8a}{6}$

$a^2+b^2 \le -8a-6b$

$(a^2+8a+16+b^2+6b+9 \le 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$

$$\begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2=25 \\ b=\frac{-25-8a}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{-4\pm3\sqrt{3}}{2} \\ b=\frac{-25-8a}{6} \end{cases}$$

№1 Черновик. стр.1.

$a_1 \ldots$ – а.п.

$d > 0$

$$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7a_1 + 7a_{14} = 7(2a_1 + 13d),$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot a_{15} < S + 47 \\ a_9 \cdot a_{17} > S + 12 \end{cases}$$

$a_{11} a_{15} \;?\; a_9 a_{17}.$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) \;?\; (a_1 + 8d)(a_1 + 16d)$

$a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 \;?\; a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2$

$a_{11} a_{15} > a_9 a_{17}$ на $12d^2$

$S + 12 < a_9 a_{17} < a_{11} a_{15} < S + 47.$

$12d^2 < 35$

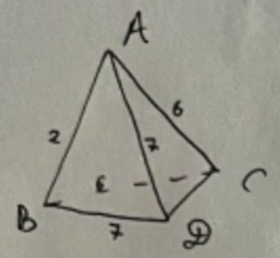
$d < 3 \Rightarrow d = 1$ т.к. $d > 0$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 138 \\ a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25} \\ \cancel{a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)} \end{cases}$$

черновик.

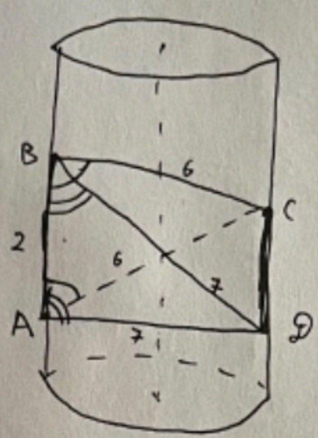
№2

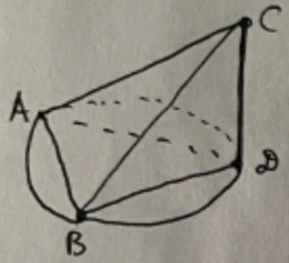


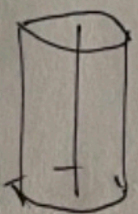
$AB=2$

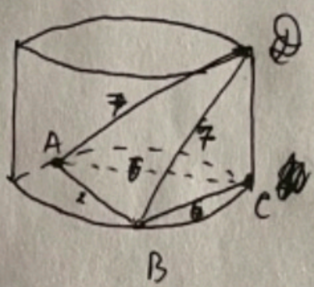
$AC=CB=6$

$AD=DB=7$





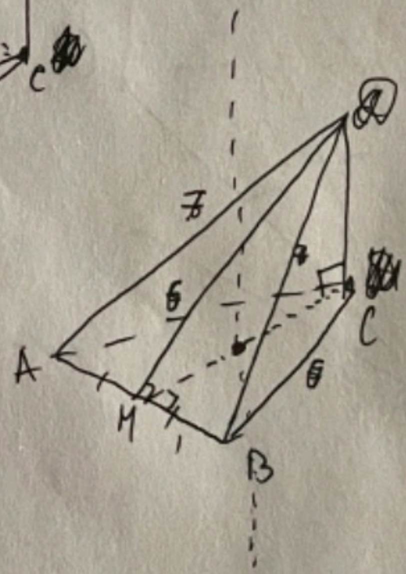




$$R_{ADB} = \frac{7\cdot 7\cdot 2}{4\cdot\sqrt{8(8-2)(8-7)(8-7)}} =$$

$$P_{ADB} = \frac{7+7+2}{2} = 8$$

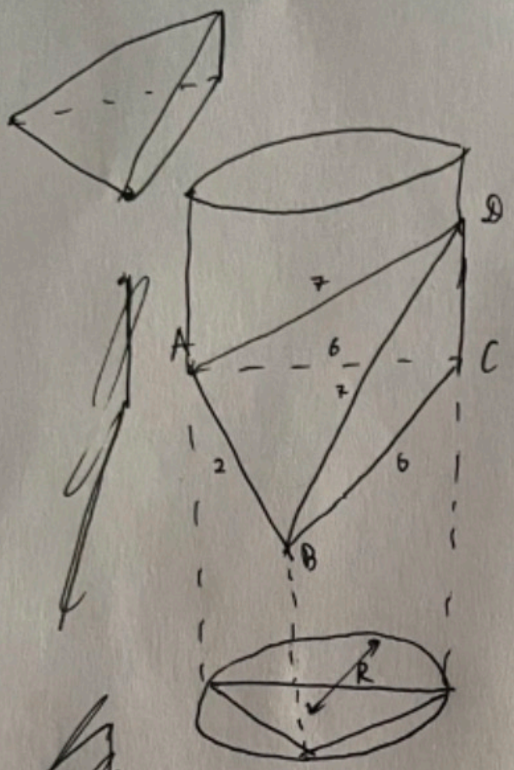
$$= \frac{49\cdot 2}{4\cdot\sqrt{6\cdot 8}} = \frac{98}{16\cdot\sqrt{3}} = \frac{49}{8\sqrt{3}}$$



$CM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$DM = \sqrt{35}$

$DC = \sqrt{48-35} = \sqrt{13}$



$R = ?$

$BD < CD + BC$

$CD > 1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102491**

ID профиля: **888761**

Вариант 19

Вариант 19 Чистовик.

№4

1) $НОД(a, b, c) = 21$

2) $НОК(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$

Тогда из (2) у a, b, c простые делители только 2 и 7.

Пусть 2 входит в a в a_1 степени, в b в b_1, и c – c_1.

Тогда $\min(a, b, c) = 1$, $\max(a, b, c) = 17$.

=> одно из них 1, одно 17 и ещё 1 от 1 до 17. Каждый вариант можно 3! способами переставить, кроме вариантов $(1; 1; 17)$ и $(1, 17, 17)$. В них 3 способа => всего $17 \cdot 3! - 3 - 3 =$ $= 96$ способов.

Аналогично выберем степени вхождения 7: получим $18 \cdot 3! - 3 - 3 = 102$ троек

Выбрав степени вхождения 2 и 7 однозначно восстановим a, b, c =>

=> всего $96 \cdot 102 = 97892$ варианта (a, b, c)

№5 Вариант 19. Чистовик

ОДЗ:

$x > \frac{11}{4}$; $x \neq \frac{15}{4}$; $x \neq 2$

$x \neq 4$; $x > \frac{1}{2}$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)$, $\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}(x-\frac{11}{4})^2$

"A "B "C

$A \cdot B \cdot C = \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}) \cdot 2\log_{(x-\frac{11}{4})}(\frac{x}{2}-1) \cdot 2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}(x-\frac{11}{4})$

$ABC = 2$

пусть $A = B \Rightarrow C = A+1$

$A^2(A+1) = 2$

$A^3 + A - 2 = 0$

$(A-1)(A^2+A+1) + (A-1) = 0$

$(A-1)(A^2+A+2) = 0$

$D < 0$

$A = 1 \Rightarrow \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}) = 1$

$(\frac{x}{2}-1)^2 = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{x^2}{4} - x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x-1)(x-5) \Rightarrow \boxed{\cancel{x=1} \quad x=5}$

Проверка при $x=5$.

~~$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}) = 1$~~

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1) = 1$

$\log_{(\sqrt{5-\frac{11}{4}})}(\frac{5}{2}-1) = 1$

$\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{2} = 1$

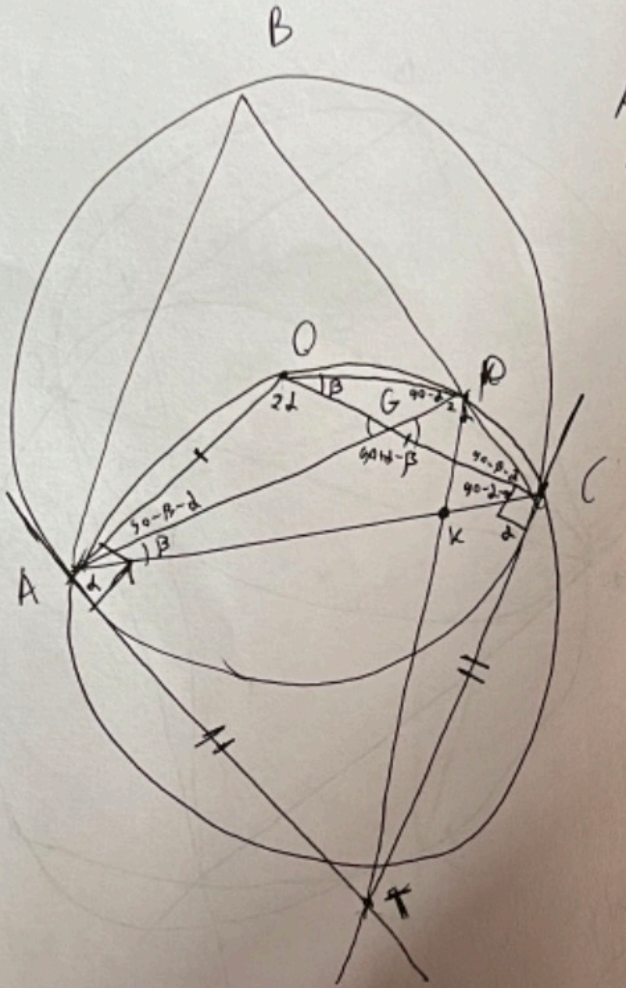
$\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}(x-\frac{11}{4})^2 = 2$

$\log_{(\frac{5}{2}-\frac{1}{4})}(5-\frac{11}{4})^2 = 2$

$\log_{\frac{9}{4}}(\frac{9}{4})^2 = 2$

Ответ: $x = 5$

Черновик



$AO = PC$

$\angle ACT = \alpha$

$\frac{180-2\alpha}{2}$

$\Delta AOG \sim \Delta GPC$

$\frac{AO}{PC} = \frac{OG}{GP} = \frac{AG}{GC}$

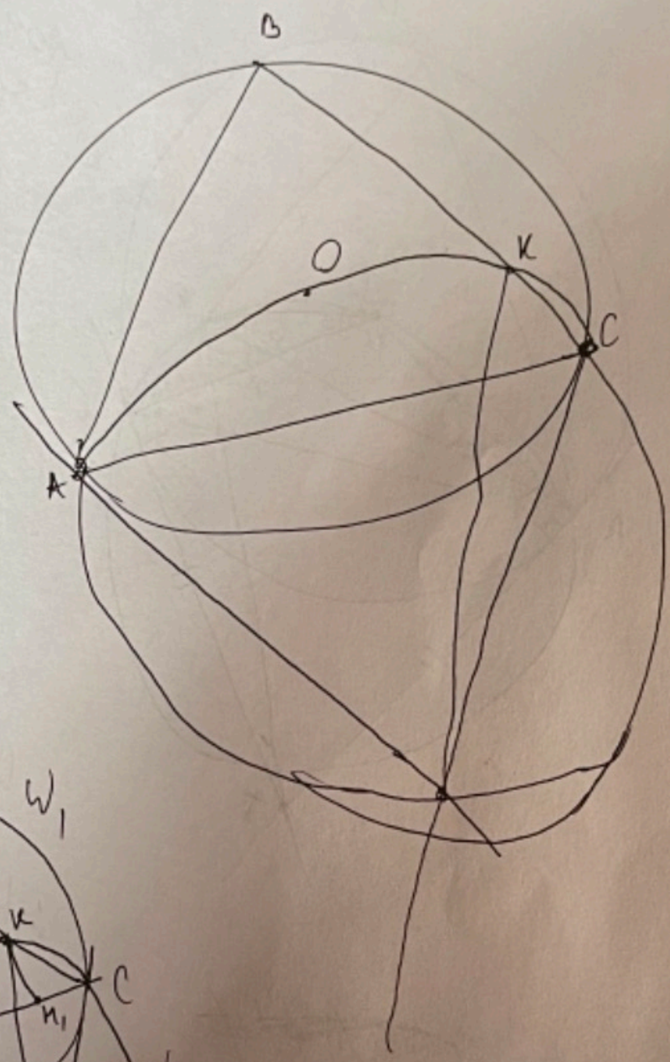
$180-90+\alpha-\beta.$

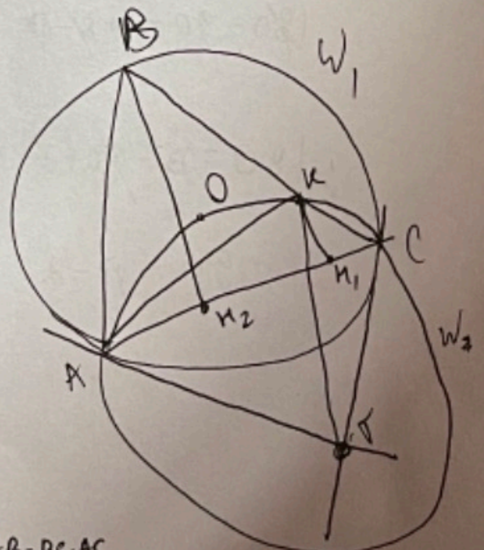
$180-90-\alpha+\cancel{\beta}-\cancel{\beta}$

$180-\beta-90+\alpha-2\alpha$

$90-\beta-\alpha.$

$S_{ABC} =$





$$S_{AKC} = \frac{1}{2} AC \cdot H_1$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot H_2$$

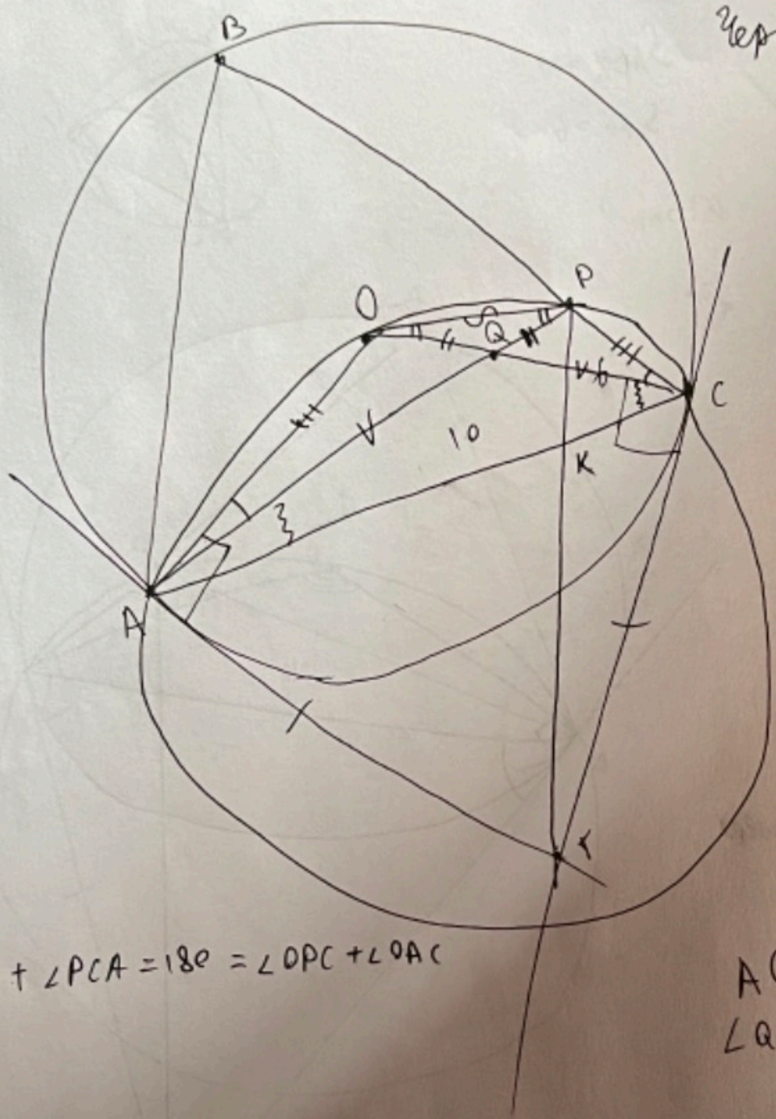
$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot R_1}$$

$$S_{AKC} = \frac{AK \cdot KC \cdot AC}{4 R_2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AKC}} = \frac{AB \cdot BC \cdot R_2}{AK \cdot KC \cdot R_1}$$

$$\frac{16}{S_{ABC}} = \frac{H_1}{H_2}$$

Черновик.



$S_{AOQ} \sim S_{QPC}$

$\frac{AO}{PC} = \frac{OQ}{QP} = \frac{AQ}{QC}$

$S_{AOP} \sim S_{OPC}$:

$\frac{AO}{PC} = 1 = \frac{AP}{OC}$

$AO = PC$ $AP = OC.$

$\angle AOP + \angle PCA = 180 = \angle OPC + \angle OAC$

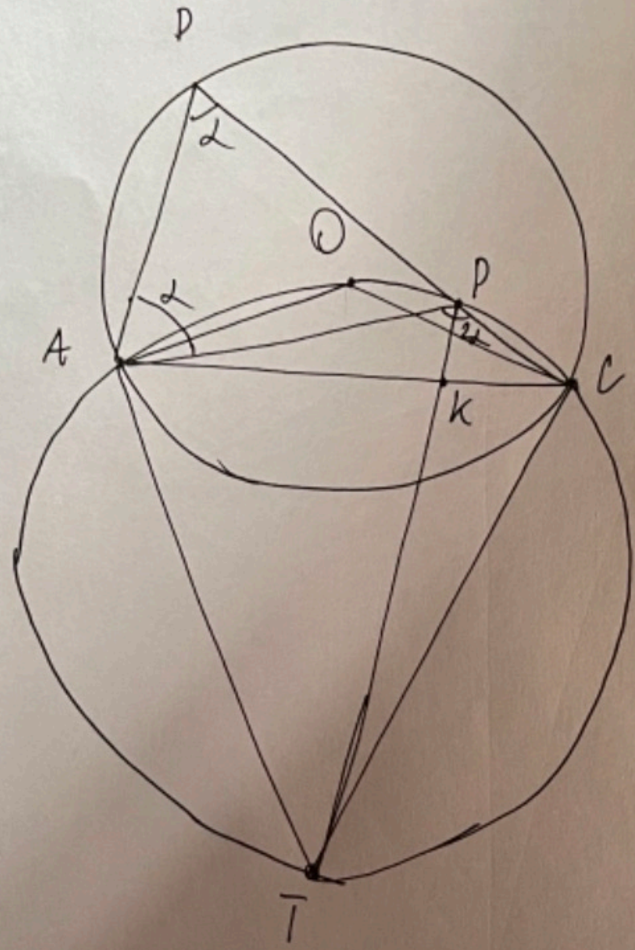
$\angle$

$AQ = QC$

$\angle QAC = \angle QCA$

б) №6 Вариант 19.

Чистовик.



Как известно, $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, а значит точки A, O, P, C, T лежат на одной окружности.
Более того, $AT = TC$, а значит ~~на одной окружности~~ PK - биссектрисса угла APC.
~~Как известно~~ $\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$, но с другой стороны, по условию, $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

Значит $\frac{AP}{PC} = \frac{5}{3}$, но при этом:

$$16 = 10+6 = S_{APK} + S_{PKC} = S_{ADC} = \frac{AP \cdot PC \cdot \sin APC}{2},\ \Rightarrow PC = \frac{3}{5}AP, \text{ получим:}$$

$$16 = \frac{3}{5} \cdot \frac{AP^2 \cdot \sin\angle APC}{2}, \text{ т.е. } AP^2 \cdot \sin\angle APC = 53\tfrac{1}{3}$$

$\angle ABC = \alpha$; $\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$, значит $\angle BAP = \alpha$

т.е. $\triangle ABP$ - равнобед. и $AP = BP$, но

$$S_{ABP} = \frac{AP \cdot BP \cdot \sin\angle APB}{2} = \frac{AP^2 \cdot \sin\angle APC}{2} = \frac{53\frac{1}{3}}{2}$$

т.к. $\angle APB + \angle APC = 180^\circ$, $\Rightarrow S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = \frac{53\frac{1}{3}}{2} + 16 = \frac{128}{3}$

б) По условию: $tg\,\alpha = 2$, значит $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$, при этом $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, тогда

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Далее $\sin\angle APC = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$, что

А. т.к. $AP^2\cdot\sin\angle APC = 53\frac{1}{3}$, а $\sin\angle APC = \frac{4}{3}$, то $AP = \sqrt{\frac{53\frac{1}{3}\cdot 5}{4}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$; $PC = \frac{3}{5}AP = \frac{10\sqrt{6}}{5}$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP\cdot PC\cdot\cos\angle APC = \frac{10\sqrt{6}}{9} + \frac{10\sqrt{6}}{25} - 2\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{10\sqrt{6}}{5}\cdot\cos 2\alpha \Rightarrow$

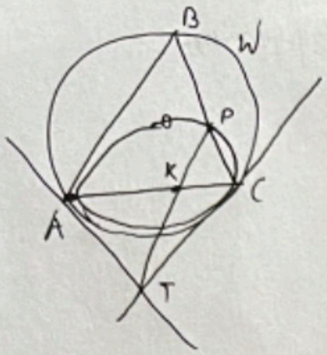
$\Rightarrow \frac{10\sqrt{6}}{9} + \frac{10\sqrt{6}}{25} - 2\cdot\frac{100\cdot 6}{15}\cdot\cos 2\alpha \Rightarrow \frac{68\sqrt{6}}{45} - 80\cos 2\alpha.$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{5}{25} - 1 = -\frac{3}{5}$

Черновик.

$AC^2 = \frac{68\sqrt{3}}{45} - 80\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$

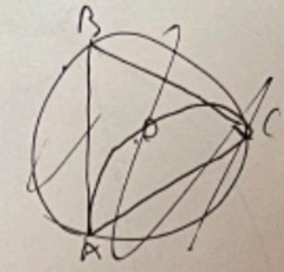
№6

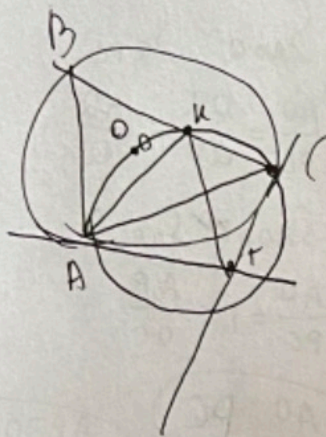


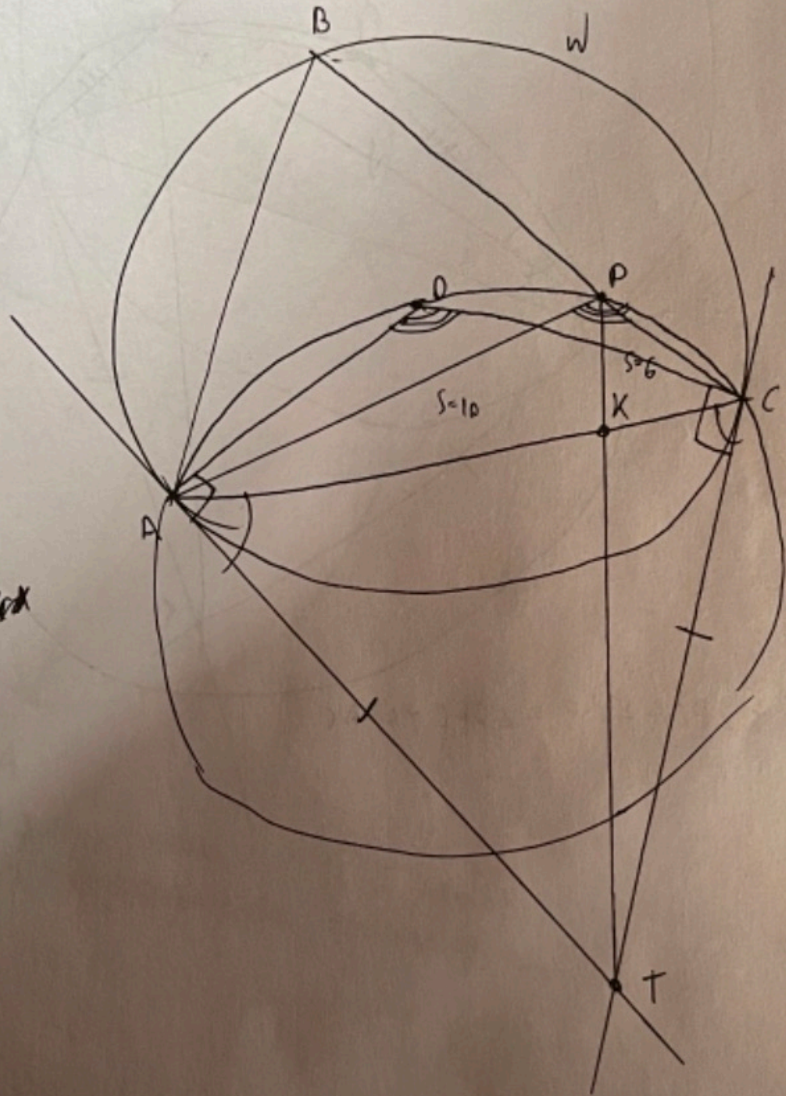
$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 6$

a) S_{ABC}?







$S_{APC} = S_{APK} + S_{CPK} = 16 =$ ~~abpk~~