Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102465**

ID профиля: **306509**

Вариант 19

1 $a_i \in \mathbb{Z} \ \forall i \in \mathbb{N}$ Вариант 19

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{14}$. $a_9 \cdot a_{17} > S + 12$ Чистовик

$a_n = a_1 + (n-1)d$. $a_{11} \cdot a_{15} < S + 47$

$d > 0$ $a_1 - ?$

$$S = 14a_1 + d + 2d \ldots + (14-1)d = 14a_1 + \frac{14 \cdot 13}{2} \cdot d =$$

$$= 14a_1 + 7 \cdot 13d. = 14a_1 + 91d$$

$a_9 = a_1 + 8d$ $a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{17} = a_1 + 16d$ $a_{15} = a_1 + 14d$.

$a_9 \cdot a_{17} = a_1^2 + 24da_1 + d^2 \cdot 128 > 14a_1 + 91d + 12$ (1)

$a_{11} \cdot a_{15} = a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$. (2)

$a_1^2 + 24da_1 + d^2 \cdot 128 > 14a_1 + 91d + 12$

$14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 24da_1 + 140d^2$

сложим эти нер-ва

$47 + d^2 \cdot 128 > 12 + 140d^2$

$$\begin{array}{r} 47 \\ 12 \\ \hline 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 140 \\ 128 \\ \hline 12 \end{array}$$

$35 > 12d^2$

$\frac{35}{12} > d^2 \Rightarrow d \in \left(0; \sqrt{\frac{35}{12}}\right)$ и d целое

$d > 0$.

т.к. если $d \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $a_1 \in \mathbb{Z}$ $a_2 = a_1 + d \notin \mathbb{Z}$

$\left.\begin{array}{l} d \in \left(0; \sqrt{\frac{35}{12}}\right) \\ d \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow d = 1.$

$\Rightarrow$ (1) $a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

(2) $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 100 - 4 \cdot 2 = 92 = 4 \cdot 23$

$a_{12} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$

$+$ $-5-\sqrt{23}$ $-$ $-5+\sqrt{23}$ $+$

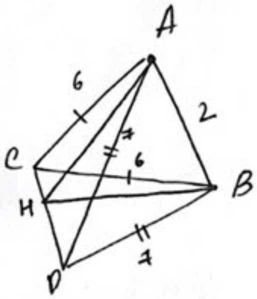
из (1) и (2) $\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23}) \end{cases}$ $a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

1

Вариант 19 Чистовик



1) $\triangle ACD = \triangle CBD$ по трем сторонам

опустим высоту AH. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2 - CH^2 = AH^2 \Rightarrow CB^2 - CH_0^2 = BH_0^2$

в равных $\triangle$ах равные высоты

$\Rightarrow$ BH $CH_0 = CH \Rightarrow H_0 = H \Rightarrow$

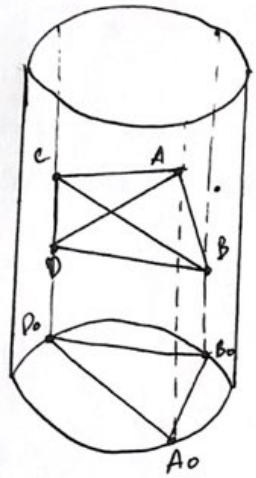
плоскость$(ABH) \perp CD \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow$

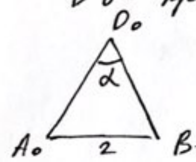
если $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow AB \perp$ оси.

$\Rightarrow AB \parallel$(основанию цилиндра)

$\Rightarrow$ проекция AB на плоскость основания $A_0B_0 \parallel AB$ и $A_0B_0 = AB = 2$

D_0 - проекция ~~прямой~~ отрезка CD





2) Цилиндр должен быть наименьшего радиуса, такое достигается, когда хорда A_0B_0 и есть диаметр, т.к. любая хорда меньше или равна диаметру (не больше диаметра)

$\Rightarrow R_{min} = 1 \Rightarrow \angle A_0D_0B_0 = 90°$ (при A_0B_0 - диаметр нашем радиусе)

3) $AH = HB = B_0D_0 = D_0A_0$ (т.к. $(ABH) \perp$ оси $\Rightarrow$

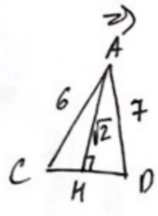
$\Rightarrow$ проекции этих отрезков равны) (и $H \in CD$)
$H \to D_0$

$\left.\begin{matrix} AH \perp CD \\ AA_0 \parallel CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp AA_0 \quad D_0A_0 \perp CD \Rightarrow D_0A_0AH$ параллелограмм

$\Rightarrow AH = D_0A_0$) аналогично $B_0D_0 = HB$

$\Rightarrow \triangle A_0D_0B_0$ прямоугольный и равнобед $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_0D_0 = \sqrt{2} = AH$



4) в $\triangle ACH$ и $\triangle AHD$ т Пифагора

$HD = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$

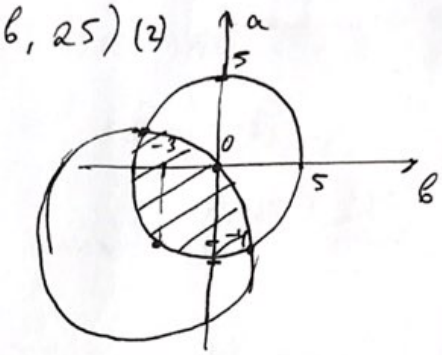
$HC = \sqrt{36 - 2} = \sqrt{34}$

$DC = HD + HC = \sqrt{34} + \sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{47}$

Вариант 19 Чистовик

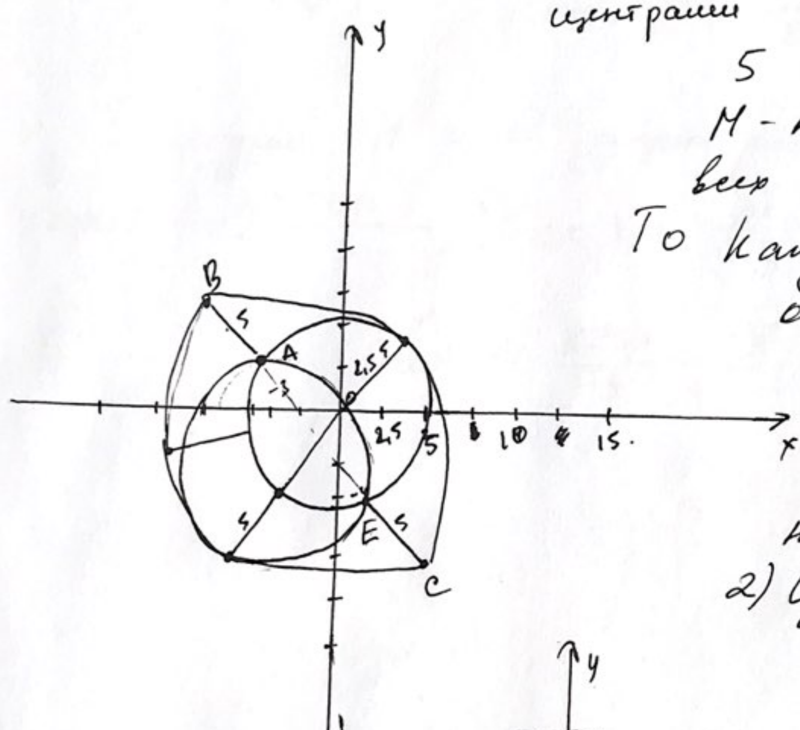
3. $\begin{cases} (x-a)^2-(y-b)^2 \le 25 \ (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \ (2) \end{cases}$



из (2): $\begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b \\ a^2+b^2 \le 25. \end{cases}$

$\begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases}$

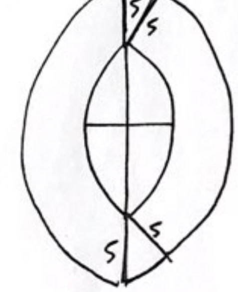
Все пары $(a;b)$ находящиеся внутри данных области подходят под (2), и все они являются центрами окружностей радиуса 5 из (1). Фигура M - ~~пересечени~~ объединение всех этих ~~окруж~~ кругов.

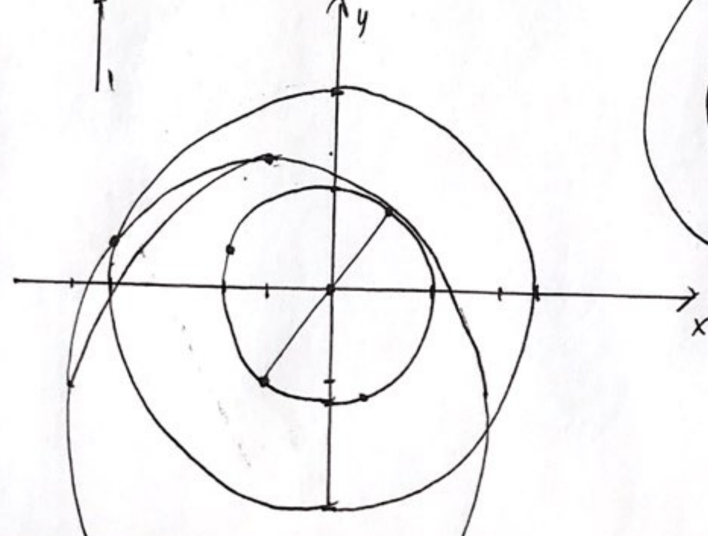


То каждую точку данных области отодвинули на 5, $(A \to B)$ $(E \to C)$

1) увеличение радиуса окруж на 5.

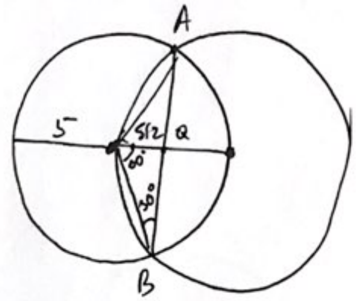
2) Сдвиг точек A и E





3.

Вариант 19 Чистовик

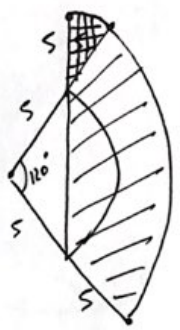


$5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$

по с-ву пересекающ. хорд

$AQ^2 = BQ^2 = AQ\cdot BQ = \frac{15}{2}\cdot\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AQ = \frac{5}{2}\sqrt{3}$



$S_{\text{закраш части}} = (\pi\cdot 10^2)\cdot\frac{120^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2}\cdot\sin 120\cdot 25 =$

$= \pi\cdot 10^2\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 25$

$S_{\text{клетчатой части}} =$

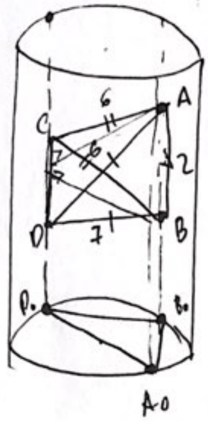
$= (\pi\cdot 5^2)\cdot\frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{25\pi\cdot 1}{12}$

$S_{\text{фигуры } M} = 2 S_{\text{закраш части}} + 4 S_{\text{клетчатой части}} = 2\left(\frac{100\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}25\right) + \frac{25\pi}{3} = \frac{225\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 25$

Ответ: $\frac{225\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}\cdot 25}{4}$

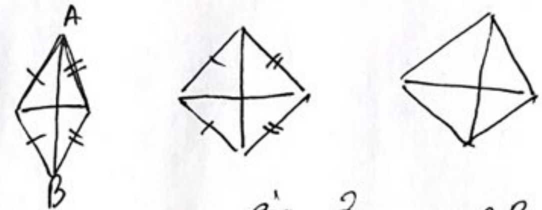
$\frac{35}{12}$ $\quad 4 \quad$ $\begin{array}{r} 91 \\ 12 \\ \hline 103 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 128 \\ 103 \\ \hline 25 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 91 \\ 47 \\ \hline 138 \end{array}$ $\quad$ $92 \div 4 = 23$, $\begin{array}{r} 92 \\ 8 \\ \hline 12 \end{array}$

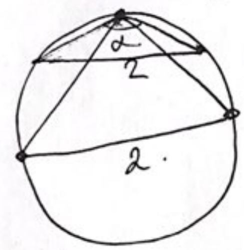
Решение 1



найти радиус CO - ?

$\Delta CDA = \Delta CBD$.

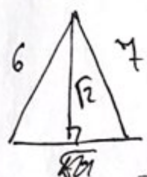




$\frac{2}{\sin\alpha} = 2R$.

$\frac{1}{\sin\alpha} = R$

$\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)' =$

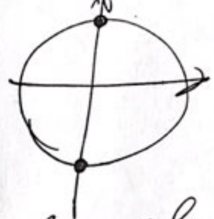


$a^2 + a^2 = 4 \Rightarrow$

$a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ $\quad = (\sin\alpha^{-1})' = (-1)\frac{1}{\sin^2\alpha} \cdot \cos\alpha = 0$.

$\sqrt{49-2} = \sqrt{47}$.

$\sqrt{36-2} = \sqrt{34}$

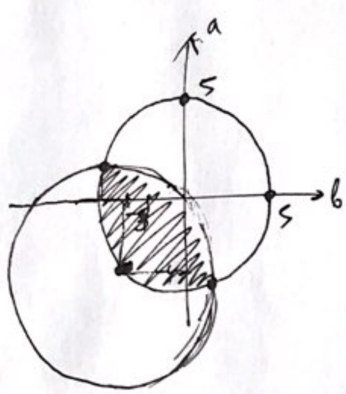


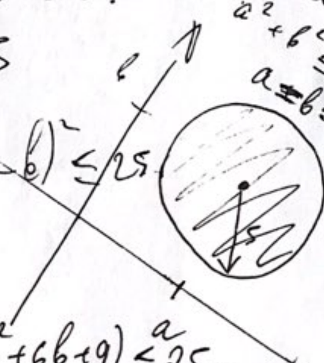
$\frac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{Черновик}}$

если a и b положит. $a^2+b^2 \le 8a-6b$, $a=b=0$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b. \\ a^2+b^2 \le 25 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 25. \end{cases}$$





$(a^2+8a+16)+(b^2+6b+9) \le 25$.

$(a+4)^2 + (b+3)^2 \le 25$.

1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102465**

ID профиля: **306509**

Вариант 19

Вариант 19

4

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 21 \\ НОК(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

$a = 3^{a_1} \cdot 7^{a_2} \cdot k_1$
$b = 3^{b_1} \cdot 7^{b_2} \cdot k_2$ $\quad k_i \not\vdots 7; 3$
$c = 3^{c_1} \cdot 7^{c_2} \cdot k_3$

Т.к. $НОД(a, b, c) = 21 = 3 \cdot 7 \Rightarrow$ в разложение какого-то числа тройка входит ровно 1 раз, и в разложение какого-то числа семерка входит ровно 1 раз

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$ Допустим это не так, тогда
$b = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$ 3 может вообще не входить
$c = 3^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$ или же входить 2 и более раза (наименьшая степень)

Если $\alpha_i = 0 \Rightarrow$ число не делится на $21 \Rightarrow$
$\Rightarrow НОД(a, b, c) \neq 21$

Если $\alpha_i \geq 2 \Rightarrow$ 21 - не наибольший общий делитель

аналогично: $\beta_i = 0 \Rightarrow НОД(a, b, c) \neq 21$
$\beta_i \geq 2 \Rightarrow$ 21 - не наибольший делитель.

$k_1 = k_2 = k_3 = 1$ т.к. НОК содержит степени 3 и 7

Т.к. $НОК(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \Rightarrow$ наибольшая степень 3 в разложении чисел a, b, c - 17 и наибольшая степень 7 в разложении a, b, c - 15 (Не может быть меньше из определения НОК, не может быть больше из определения кратного).

Выбрать для α: $\alpha_k = 1$ $\alpha_e = 17$
α оставш $= \{2, 3, \ldots 16, \cancel{17}\}$ 17 вариантов.

1) 1, 1, 17 $\quad$ + 3) 1, p, 17, где $p \in \{2 \ldots 16\}$ ← 15 чисел
2) 17, 17, 1

Выбрать соответственно для α_1 α_2 α_3
для 1) 1, 1, 77 ; 17, 1, 1 ; 1, 17, 1. по 3 варианта
2) 17, 17, 1 ; 1, 17, 17) 17 : 1 : 17

3) $15 \cdot 3!$ вариантов. $= 6 \cdot 15$ Итого $(6 + 6 \cdot 15) = 16 \cdot 6$
← перестановка 3х различ. чисел

Для β аналогично

$\alpha_н = 1$ $\alpha_e = 15$.

$\alpha_{ост} = \{1, 2 \dots 15\}$ Для $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ соот-ь:

1) 1,1,15 ~~15,1,1~~ 15,1,1 1,15,1

2) 15,15,1 1,15,15, 15,1,15.

3) $13 \cdot 3! = 13 \cdot 6$

Итого $(6 + 13 \cdot 6) = 14 \cdot 6$.

Для каждого распределения $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ есть $14 \cdot 6$ распределений $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Всего $16 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 6 = 16 \cdot 14 \cdot 36$

(В поправках оговорено, что последовательности (a, b, c) $(1, 1, 2) \neq (2, 1, 1)$)

Ответ: $14 \cdot 16 \cdot 36$

5

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-1>0. \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ x-\frac{11}{4}>0 \\ \frac{x}{2}-1\neq\pm1 \\ x-\frac{11}{4}\neq1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>2 \\ x>1/2 \\ x>11/4 \\ x\neq4 \\ x\neq15/4 \\ x\neq5/2 \end{cases} \quad \begin{cases} x>11/4=2\,3/4=2{,}75. \\ x\neq4 \\ x\neq15/4 \end{cases}$$

1) $\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\sqrt{x-11/4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)-1$

$$\log_{\frac{x}{2}-1}\sqrt{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\log_{\frac{x}{2}-1}\sqrt{x-\frac{11}{4}}}$$

$$\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=4\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)-2$$

$$\log_{\frac{x}{2}-1}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{4}{\log_{\frac{x}{2}-1}\left(x-\frac{11}{4}\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}{\log_{10}\frac{x}{2}-1}=\frac{4\lg\frac{x-\cancel{2}}{\cancel{2}}}{\lg\left(x-\frac{11}{4}\right)} \Rightarrow \quad 4\lg^2\frac{x}{2}-1=\lg\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\lg\left(x-\frac{11}{4}\right.$$

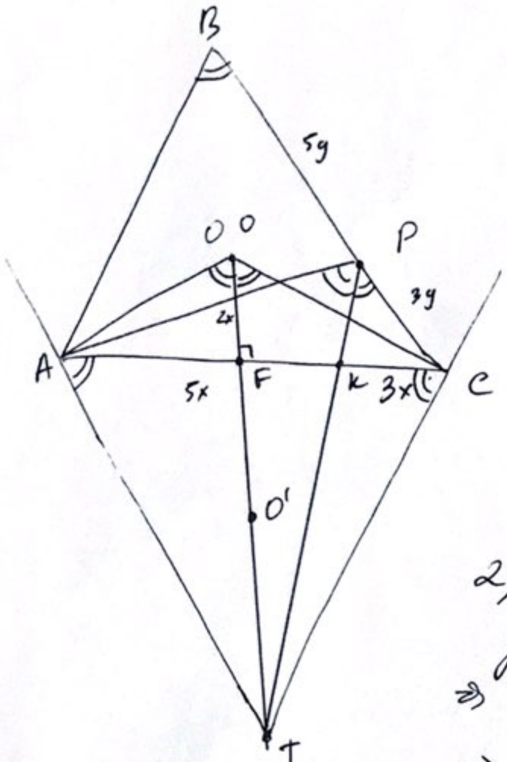
$$2\lg\frac{x}{2}-1=\pm\sqrt{\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\lg\frac{x-11}{4}}$$

$$\frac{\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}{\lg\frac{x}{2}-1}=\frac{4\lg x-\frac{11}{4}}{\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}-2$$

$$\frac{\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}{\sqrt{\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\lg\frac{x-11}{4}}}=\frac{2\lg x-\frac{11}{4}}{\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}-1$$

$$\sqrt{\frac{\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}{\lg x-\frac{11}{4}}}=\frac{2\lg x-\frac{11}{4}}{\lg\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}-1$$

6



Решение:

1) $\angle OCT = 90^\circ$.

$AT = TC$ } треугольники
$AO = OC$ } $\triangle AOF = \triangle OFC$ $\triangle AFT = \triangle FCT$

$\Rightarrow$ $OT \perp AC$. $AF = FC$

$\Rightarrow$ O' – центр окруж

впис около AOC $\in OT$

и тк $\angle OCT = 90^\circ$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ OT – диаметр $\Rightarrow$

$T \in$ окружности AOC

$\Rightarrow$ $APCT$ вписан

2) $\angle ABC = \angle TAC$ как впис и угол между хордой и касательной

$\Rightarrow$ $\angle CAT = \angle TPC = \angle ABC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $AB \parallel PK$ углы $\angle ABC$ и $\angle TPC$ соответственные $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т Фалеса $\frac{BP}{AK} = \frac{PC}{KC} \Rightarrow$ 3.

$\Rightarrow$ $\frac{BP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{S_{AKP}}{S_{KCP}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ $\Rightarrow$ $S_{ABC} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot S_{KPC} =$

$= \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 6 = \frac{8^2 \cdot 6}{9} = \frac{128}{3}$

б) $\operatorname{tg}\angle ABC = 2$ в $\triangle AOF$:

$OF = 2x$. $AF = 4x$.

Ответ а) $\frac{128}{3}$

4