Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102314**

ID профиля: **371435**

Вариант 19

$\boxed{1}$ S – сумма первых 14 членов возрастающей арифм. прогрессии $a_1, a_2, a_3 \dots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_9 a_{17} > S+12$, $a_{11} a_{15} < S+47$. Укажите все возможные значения a_1.

Черновик

Решение

$S = a_1 + \dots + a_{14}$ $\quad \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = (a_1 + a_{14}) 7 = 14a_1 + 91d.$

$$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S+12 \\ S+47 > a_{11} \cdot a_{15} \end{cases}$$

$\cancel{a_1 \ne 6}$ $\quad \boxed{a_1 \ne -5}$

$a_9 \cdot a_{17} + 47 > 12 + a_{11} \cdot a_{15}.$

$a_9 \cdot a_{17} + 35 > a_{11} \cdot a_{15}$

$(a_1 + 8d) \cdot (a_1 + 16d) + 35 = a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 + 35 > (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) = a_1^2 + 140d^2 + 24a_1 d \Rightarrow 35 > 12d^2 \Rightarrow d^2 \le 2 \Rightarrow d \le 1.$

т.к. $d > 0 \Rightarrow d = 1.$

прогрессия возрастающая.

$\Rightarrow a_9 \cdot a_{17} = (a_1 + 8d) \cdot (a_1 + 16d) = (a_1 + 8)(a_1 + 16) = a_1^2 + \cancel{24a_1}\,10a_1 + 128 > S + 12 = 14a_1 + 91d + 12 = 14a_1 + 91 + 12;$ $\quad S + 47 = 14a_1 + 91 + 47 > a_{11} \cdot a_{15} = (a_1 + 10)(a_1 + 14) = a_1^2 + 140 + 24a_1$

$\boxed{2}$ $a_1^2+10a_1+2<0 \Rightarrow a_1 = x.$

$x^2+10x+2<0$

$D = 100-4\cdot 2 = 100-8 = 92.$

$x_1 = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = -5+\sqrt{23}$

$x_2 = -5-\sqrt{23}$

$x \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23}) =$

$= x \in [-9; -1].$

$\begin{array}{r} -128 \\ 103 \\ \hline 25 \end{array}$

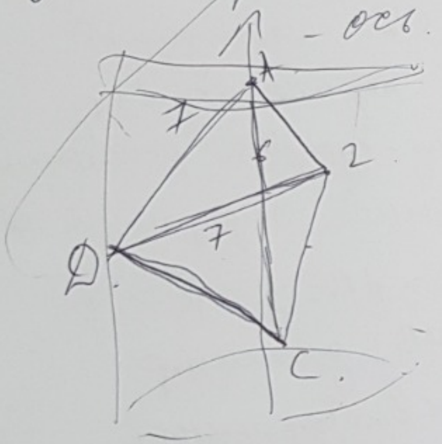
$\boxed{x - -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.}$

Ответ: ↑

продолжение 1-ой задачи.

21102314 (U371435 M1300479)

2. чертеж.



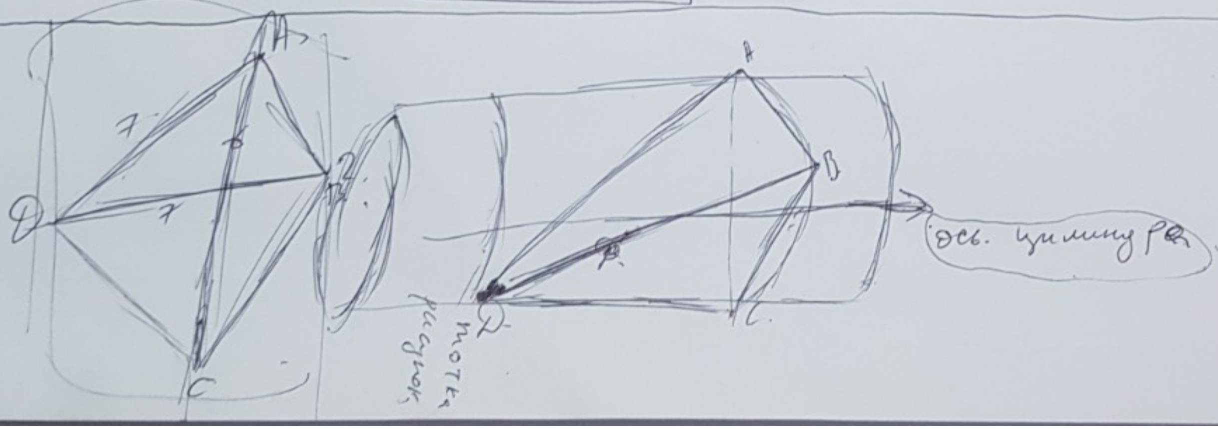
черновик.

2. $AC = BC = 6$; $AD = DB = 7$, $AB = 2$. $CD \parallel$ оси цилинр. т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$ то основания перпендикуляров из A и B на CD совпадают. Пусть эта точка P то плоскость APB перпендикуляр CD т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра, то CD – перпендикулярна основанию, плоскость APB параллельна основанию, радиус описанной окружности $\triangle PAB$ равен окружности с основанием $R \Rightarrow 2R \geq AB = 2$. $R \geq 1$; т.к. R наименьшее из возможных $\Rightarrow R = 1$; AB – диаметр описанной окружности $\triangle PAB$; $\angle APB = 90° \Rightarrow \triangle APB$ – равнобедренный ~~прям~~ прямоугольный $\triangle$-ник: $\Rightarrow AP = BP = \sqrt{2} \Rightarrow CP = \underset{\sqrt{AC^2 - AP^2}}{\sqrt{36-2}} = \sqrt{34}$;

$PD = \sqrt{49-2} = BD^2 - PB^2 = \sqrt{47}$.

Чистовик.

Ответ. $\boxed{CD = \sqrt{34} + \sqrt{47}}$



21102314 (U371435 M1300479)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102314**

ID профиля: **371435**

Вариант 19

$\boxed{1}$ $\begin{cases} a = 3^{x_1} \cdot 7^{x_2} \\ b = 3^{y_1} \cdot 7^{y_2} \\ c = 3^{z_1} \cdot 7^{z_2} \end{cases}$ $\min(x_1; y_1; z_1) = 1$. $\max(x_1; y_1; z_1) = 17$.

$\min(x_2; y_2; z_2) = 1$ $\max(x_2; y_2; z_2) = 15$.

$\begin{array}{r} \times\, 96 \\ 84 \\ \hline 384 \\ +\,768 \\ \hline 8064 \end{array}$ $\boxed{\text{Чистовик}}$ $\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 6 \\ \hline -\,102 \\ 6 \\ \hline 96 \end{array}$

$1 \le x_1;\ y_1;\ z_1 \le 17$.

$\begin{cases} \max(x_1; y_1; z_1) = 17. \\ \min(x_1; y_1; z_1) = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ выберем 1 max и 1 min и ~~3~~ третье между 1 и 17 $\Rightarrow 2 \cdot C_3^2 \cdot 17$. Мы считаем случае 1; 1; 17 и 1; 17; 17 дважды. ~~позиция~~ $- 6 \to 6 \cdot 17 - 6 = 96$.

аналогично для $\begin{cases} 1 \le x_2;\ y_2;\ z_2 \le 15. \\ \min(x_2; y_2; z_2) = 1. \\ \max(x_2; y_2; z_2) = 15. \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_3^2 \cdot 15 \cdot 2 - 6 = 6 \cdot 15 - 6 = 84 \Rightarrow 96 \cdot 84 = 8064$ т.к. ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ для каждого решения 1-ой системы соответствует каждое ~~[illegible]~~ решение 2-ой системы.

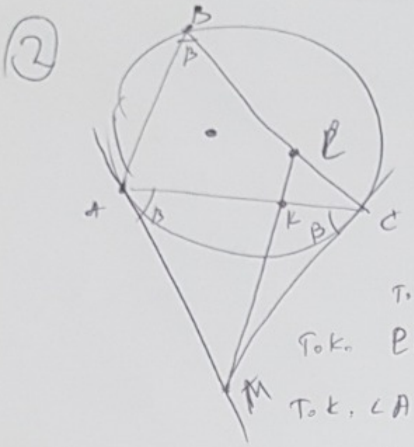
$\sim 6. \to 6 \cdot 17 - 6 = 96.$ ...случае 1; 1; 17 и ... третье

$; y_2; z_2 \le 15.$

$y_2; z_2) = 1.$

$; z_2) = 15. \Rightarrow$

(2)



а) пусть $\angle ABC = \beta$;

$\Rightarrow \angle MAC = \angle MCA = \beta$; $\angle AOC = 2\beta \Rightarrow$

$\angle APC = 2\beta$ и $\angle AMC = 180° - 2\beta \Rightarrow$

A, P, C, M – цикличны, то $\angle APM = \angle MPC = \beta$

т.к. $S_{APK} : S_{PKC} = 10 : 6 \Rightarrow AK : KC = 10 : 6$

т.к. PK – биссектриса $\angle APC \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$

т.к. $\angle ABC = \beta \Rightarrow \angle APC = 2\beta \Rightarrow \angle BAP = \beta \Rightarrow$

и $\frac{S_{BPA}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{10}{6}$

$S_{AKC} = 16 \Rightarrow S_{BPA} = \frac{10 \cdot 16}{6}$, отсюда

$S_{ABC} = S_{BPA} + S_{AKC} = 16 + \frac{80}{3} = 16 + 29 + \frac{2}{3} = 45\frac{2}{3}$

$x_2; y_2; z_2) = 15.$ $\Rightarrow$

$96 \cdot 84 = 8064$

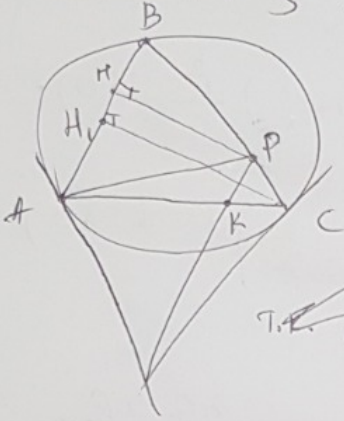
б) если $\operatorname{arctg} B = 2 \Rightarrow S_{ABC}$

$AB = 2x$ т.к. $AP = BP \Rightarrow HP \perp AB$, где

$HA = HB$ (середина) $PH = x\,\mathrm{tg} B = x \cdot \frac{1}{2}$

$S_{ABP} = \dfrac{2x \cdot \frac{1}{2}x}{2} = \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{80}{3}$; $x = \sqrt{\dfrac{160}{3}}$

$AB = 2x = 2\sqrt{\dfrac{160}{3}}$; $PH = \sqrt{\dfrac{160}{3}} \cdot \dfrac{1}{2}$



$H_1C \perp AB$, $PH \parallel CH_1$

$\dfrac{PH}{CH_1} = \dfrac{BH}{BH_1} = \dfrac{BP}{BC}$

~~т.к. $\frac{BP}{BC}$~~

21102314 (U371435 M1300480)

НОД $(a,b,c) = 21$.
НОК $(a,b,c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$.

$a = a_1 d$; $b = b_1 d$; $c = c_1 d$.

НОД $(a_1; b_1; c_1) = 1 \Rightarrow d = 21$;

НОК $(a,b,c) = d \cdot a_1 \cdot b_1 c_1 = 3^{17} \cdot 7^{15} = 3 \cdot 7 \cdot a_1 \cdot b_1 c_1$.

$a_1 b_1 c_1 = 3^{16} \cdot 7^{14}$.

$a_1 = 3^{x_1} \cdot 7^{x_2}$; $b_1 = 3^{y_1} \cdot 7^{y_2}$. $c_1 = 3^{z_1} \cdot 7^{z_2}$.

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 16 \\ x_2 + y_2 + z_2 = 14 \end{cases}$$

$45 \times 51 = 2295$

Черновик

т.к. общий ~~НОД~~ $= 1$. $\Rightarrow$ хотя-бы один из $x_1; y_1; z_1 = 0 \to$ т.к. это симетричное ур-е $\to$ $\to$ пусть $x_1 = 0 \to y_1 + z_1 = 16$. это ур-е имеет 17 решений для $y_1, z_1 \geq 0$ ($C^1_{16+2-1} = 17$); также для $x_2 + y_2 + z_2 = 14 \Rightarrow$ пусть $x_2 = 0 \Rightarrow y_2 + z_2 = 14 \Rightarrow$ $C^1_{14+2-1} = 15$ решений. для $y_2, z_2 \geq 0 \Rightarrow$ умножим на 3 17 т.к.
$\Rightarrow$ ... и для $y_1; z_1$ аналогично, и 15×3; $45 \times 51 = 2295$. т.к.

КС $= |0|$6

$1 = \angle$ ABC $=$

$\frac{AP}{C}$

$= \frac{16}{}$

$\begin{cases} \cancel{НОД(a,b,c)=21} \\ \cancel{НОК(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15}} \end{cases}$

Черновик

Продолжение 1-ой задачи.

для каждого решения 1-ого уравнения может соответствовать каждое решение 2-ого ур-е