Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102307**

ID профиля: **371385**

Вариант 19

Чистовик

Вариант 19

№ 1 $S = \frac{a_1 + a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 14a_1 + 91d$

Т.к. $a_1, a_2, a_3 \ldots$ - целые, то d - целое число (т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$ и $a_1 + d \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_{11} a_{15} < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > S + 12 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 47 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ 14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 \end{cases}\right| +$$

$128d^2 + 47 > 140d^2 + 12$

$12d^2 < 35$

Т.к. $d \in \mathbb{Z}$, то $d = 0, \pm 1$

$\cancel{d = 0}$

$$\cancel{\begin{cases} a_1^2 > 14a_1 + 12 \\ 14a_1 + 47 > a_1^2 \end{cases}} \quad \cancel{\begin{cases} a_1^2 - 14a_1 > 12 \\ a_1^2 - 14a_1 < 47 \end{cases}}$$

~~Т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 = -2; -1; 15; 16$~~

Так как по условию прогрессия возрастающая, то $d = 1$

Чистовик

Вариант 19

№ 1 продолжение

~~$d = -1$ не может быть, так как:~~

$$\cancel{\begin{cases} a_1^2 - 24a_1 + 128 > 14a_1 - 91 + 12 \\ 14a_1 - 91 + 47 > a_1^2 - 24a_1 + 140 \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} a_1^2 - 38a_1 < -140 - 91 + 47 \\ a_1^2 - 38a_1 > -128 - 91 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(a_1 - 38) < -184 \\ a_1(a_1 - 38) > -207 \end{cases}}$$

$d = 1$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12 \\ 14a_1 + 91 + 47 > a_1^2 + 24a_1 + 140 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 > -25 \\ a_1^2 + 10a_1 < -2 \end{cases}$$

$a_1 = -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

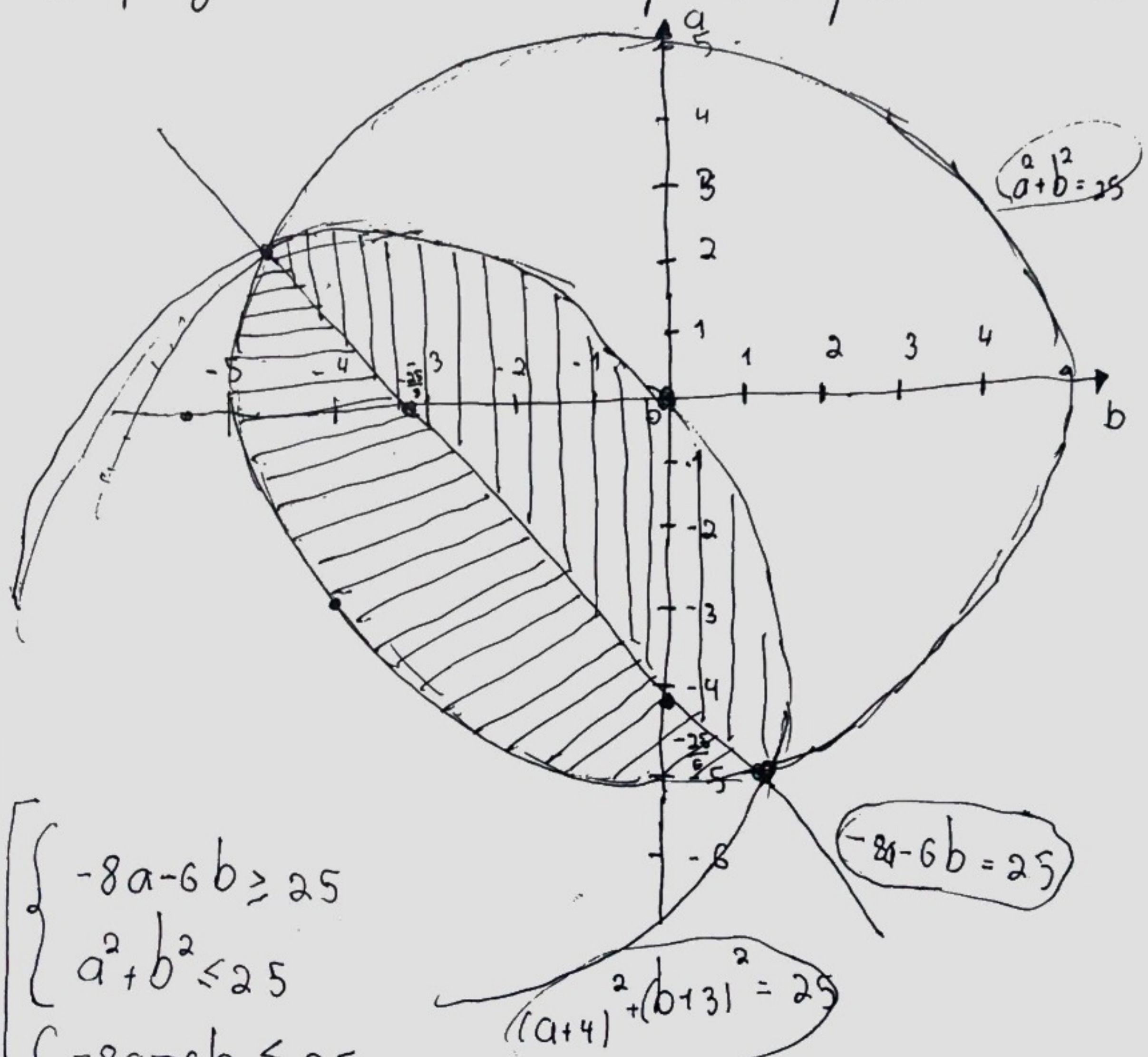
Ответ. $-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

Чистовик

№ 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b;\ 25) \end{cases}$$

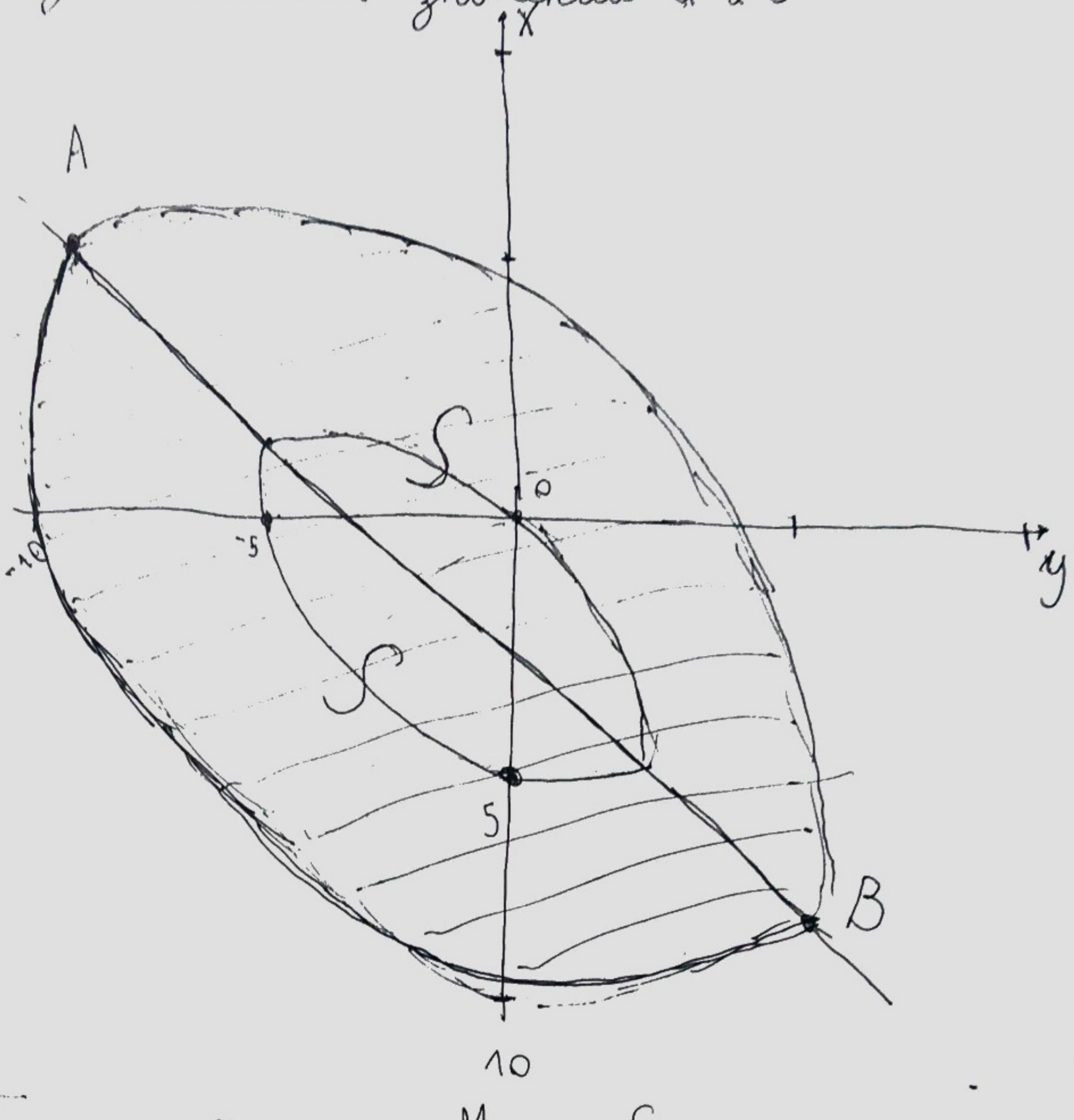
Нарисуем область второго неравенства.



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -8a-6b \ge 25 \\ a^2+b^2 \le 25 \end{cases} \\ \begin{cases} -8a-6b \le 25 \\ a^2+b^2 \le -8a-6b \iff (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \end{cases} \end{array}\right.$$

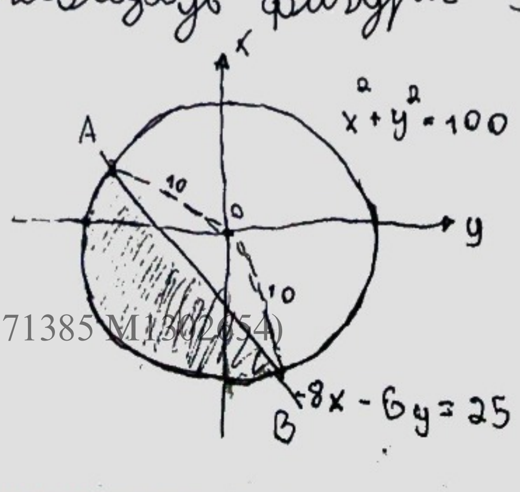
Чистовик

Нарисуем график первого уравнения, зная область значений a и b



Площадь фигуры M = 2S

Найдём площадь фигуры S:

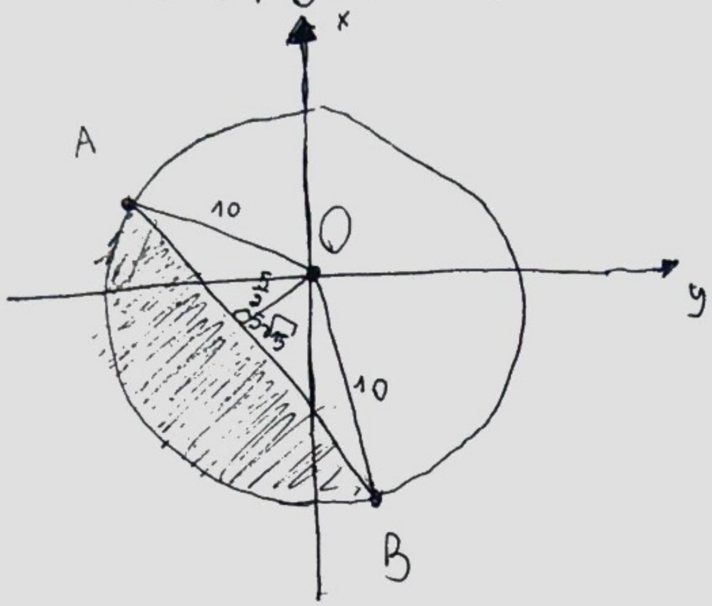


21102307 (U371385 M1302054)

4

Чистовик

$AO = OB = 10$
(радиус)



Найдём координаты точек A и B

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ -8x-6y=25 \end{cases}$$

$x = -\frac{25}{8} - \frac{6}{8}y$

$\frac{625}{64} + \frac{300y}{64} + \frac{36y^2}{64} + \frac{64}{64}y^2 = 100$

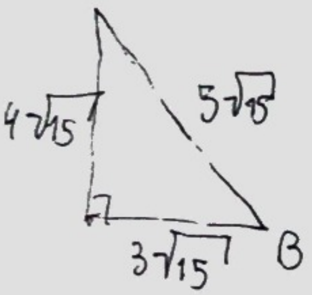
$100y^2 + 300y + 625 = 100 \cdot 64$

$4y^2 + 12y + 25 = 4 \cdot 64 = 256$

$256 - 25 = 231$

~~$4y^2+12y=$~~

$y^2 + 3y + \frac{25}{4} - \frac{4 \cdot 64}{4} = 0$



$9 + 231$ $\quad 16 \cdot 3 \cdot 5$

$\frac{-3 \pm \sqrt{240}}{2} = \frac{-3 \pm 4\sqrt{15}}{2}$

$\frac{-3+4\sqrt{15}+3+4\sqrt{15}}{2}$

$\Delta y = 4\sqrt{15}$

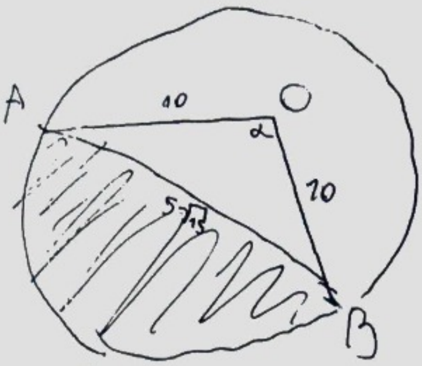
$\Delta x = 3\sqrt{15}$

$AB = 5\sqrt{15}$

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 5\sqrt{15} = \frac{25}{4}\sqrt{15}$

5 21102307 (U371385 M1302654)

Чистовик



$S_{\triangle AOB} = \frac{25\sqrt{15}}{2}$

$S_{\text{сектора } AOB}$ - ?

Теорема косинусов $\triangle AOB$

$25 \cdot 15 = 100 + 100 - 200 \cos\alpha$

$-\frac{25(\cancel{\ }7)}{200} = \cos\alpha$

$\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$

Ответ: $S_M = 2 \cdot \left(\frac{\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 100 - \frac{25\sqrt{15}}{2}\right)$

21102307 (U371385 M1302654)

Черновик

0 : 38

$\frac{a_1 + a_1 + 13d}{2} \cdot 14$

a_1 - целое
d - целое

231
-47
184

219
12
207

$14a_1 + 91d$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47$

1 37

-37

$a_1^2 + 24a_1d + 8 \cdot 16d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

2

25

$14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 24a_1d + 10 \cdot 14d^2$

$2 \cdot 36$

$8 \cdot 16d^2 + 47 > 10 \cdot 14d^2 + 12$

72

$a_1(a_1 + 10)$

128
140

3

$d = \pm 1$
$d = 0$

$13 \cdot 35$

105

$12d^2 < 35$

$4 \cdot 34$

$\frac{14}{2}$

17
3

$a_1(a_1 - 14)$

136

$49^2 - 98$

14

$16 \cdot 2$

$5 \cdot 33$

$15^2 - 14^2$

32

165

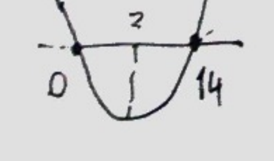
$14 \cdot 15$

225
-196

225
-196
29

$6 \cdot 32$

192



95

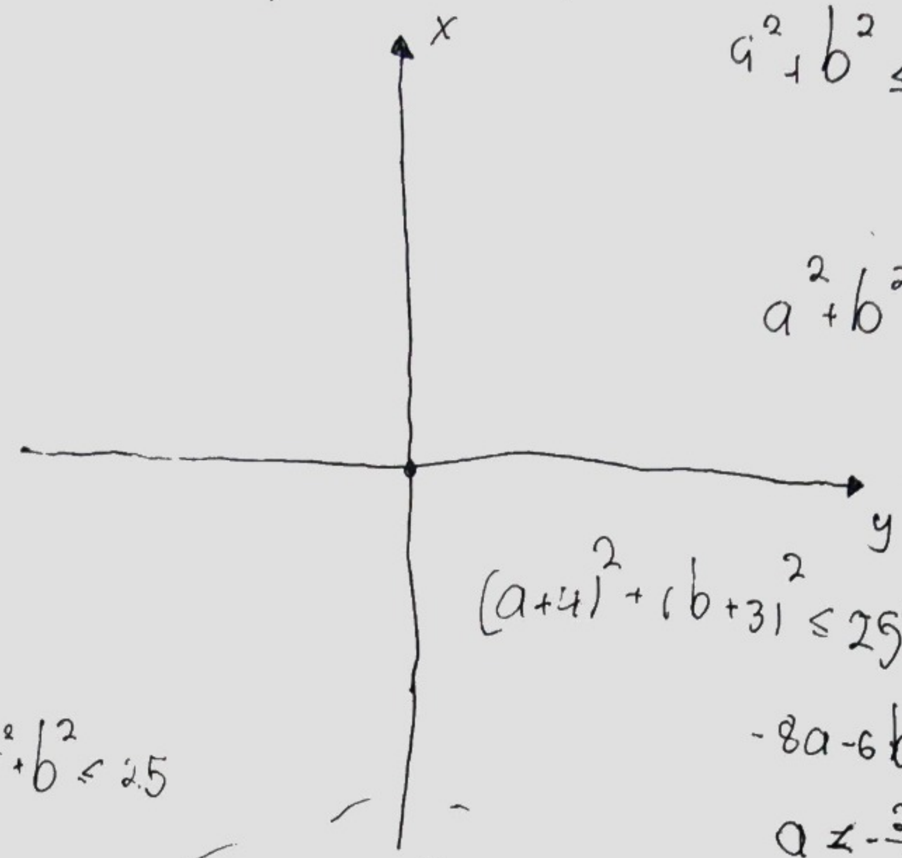
21102307 (U371385 M1302654)

1

Черновик

18

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b; 25)$



6 -8

$a^2+b^2+8a+6b \le 0$

$a^2+8a+16$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \quad a^2+$

$a^2+b^2 \le 25$

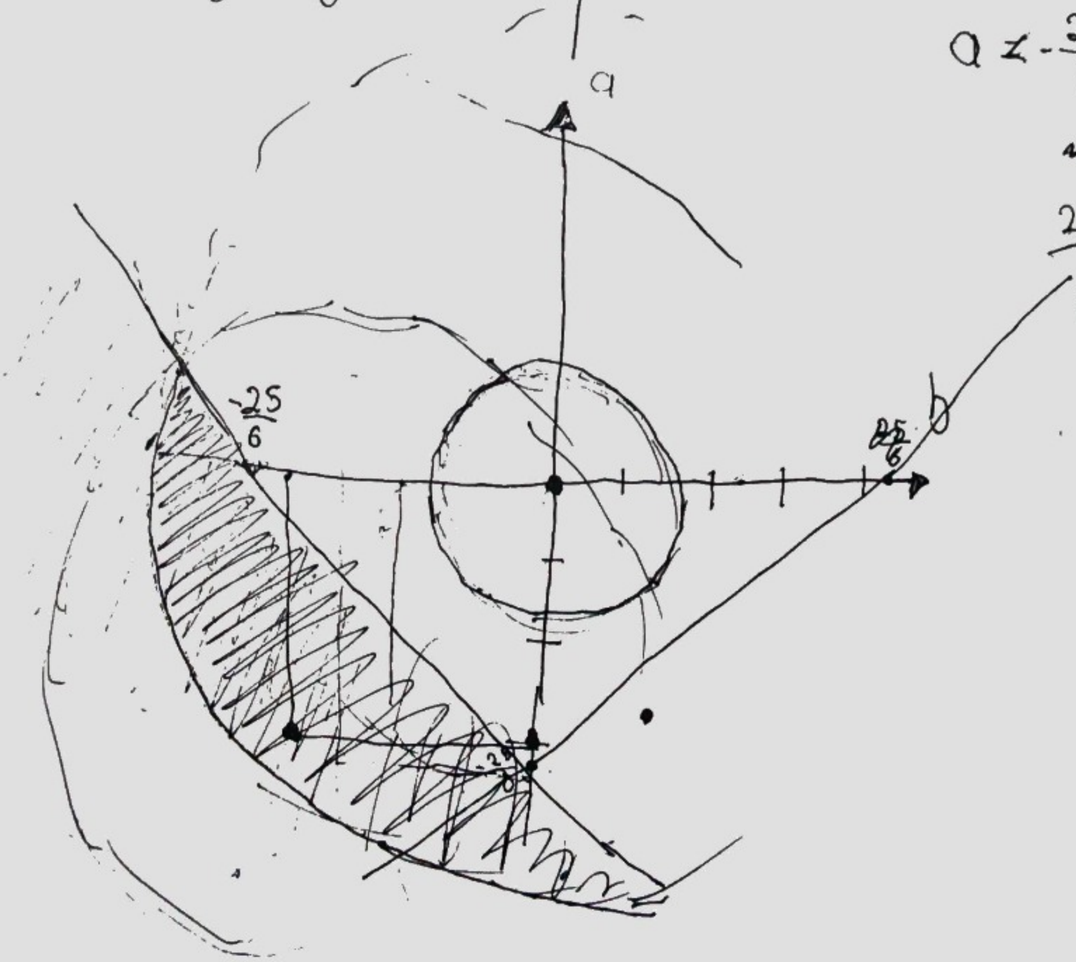
$-8a-6b=25$

$a \ne -\frac{25}{8} \div \frac{3}{-4} b$

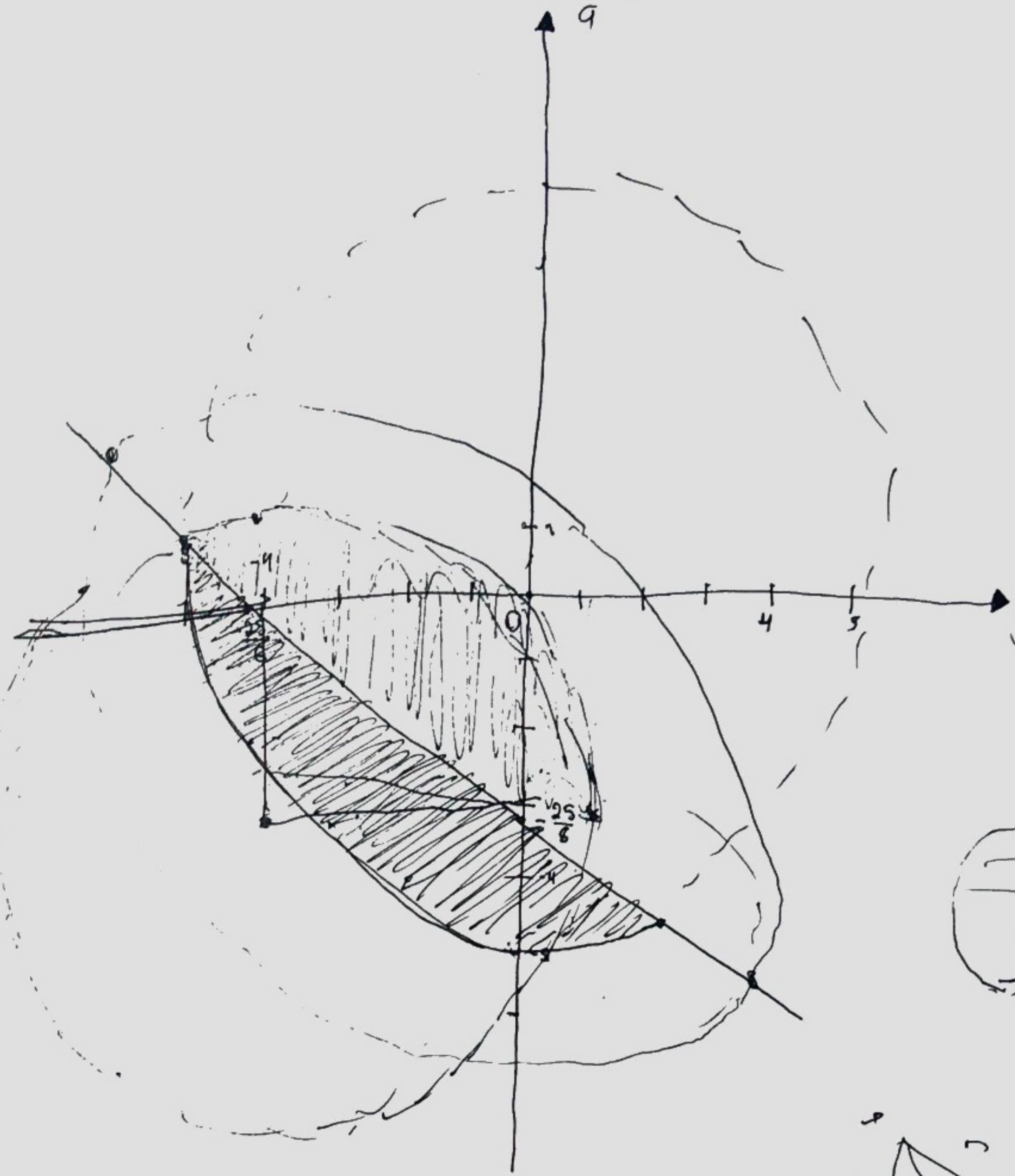
4 -3

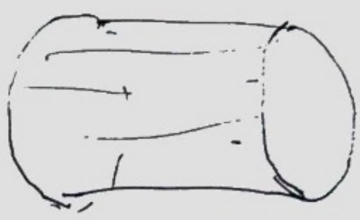
$\frac{25}{8}$ 4

3



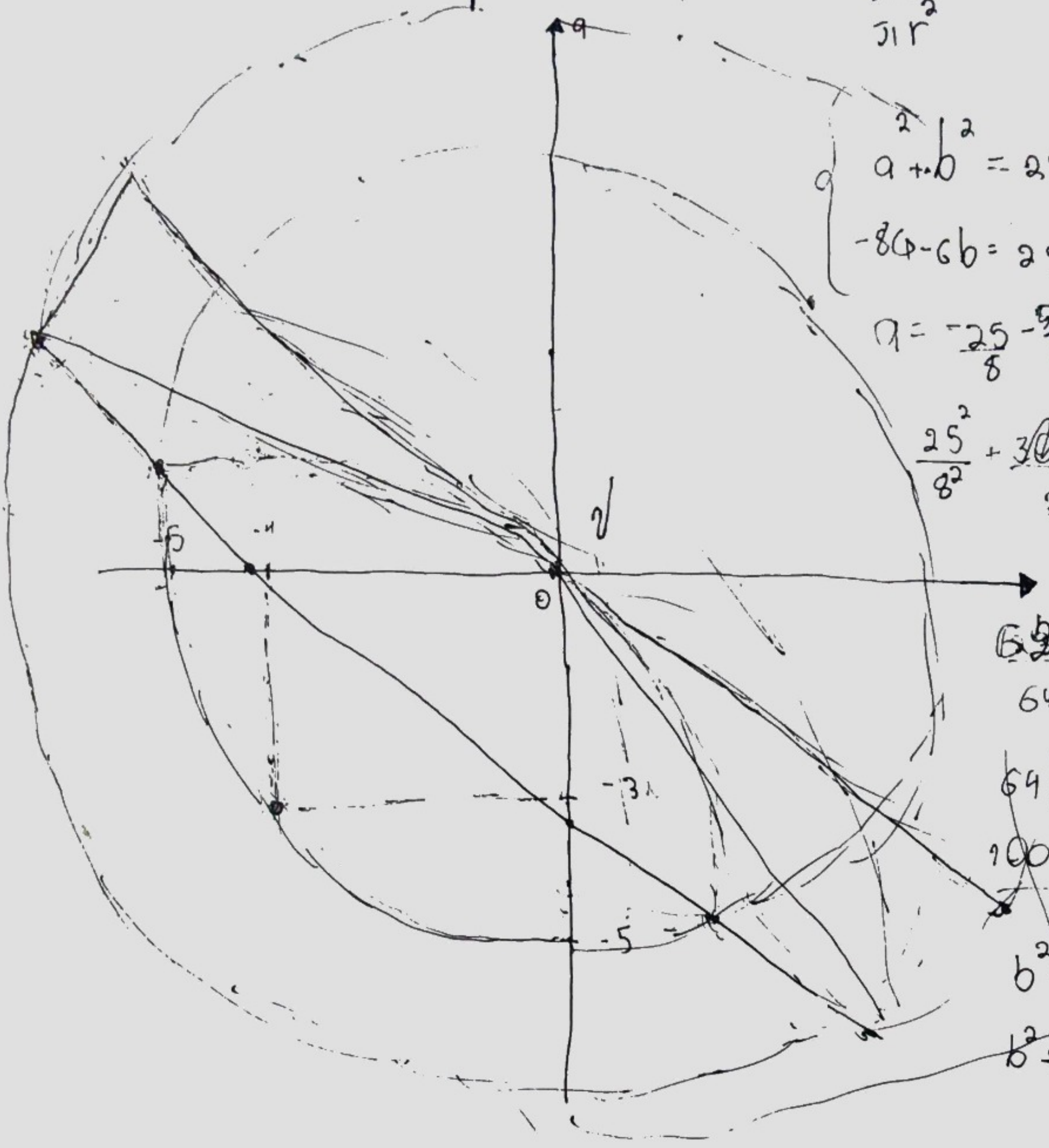
Черновик





3 21102307 (U371385 M1302654)

Черновик



πr^2

$$a^2+b^2=25$$
$$-8a-6b=25$$

$$a=-\frac{25}{8}-\frac{6}{8}b$$

$$\frac{25^2}{8^2}+\frac{300}{...}$$

$$\frac{25\cdot 6}{8\cdot 8}\cdot 2$$

$$\frac{300}{64}b$$

$$\frac{625}{64} \qquad \frac{36}{64}b^2$$

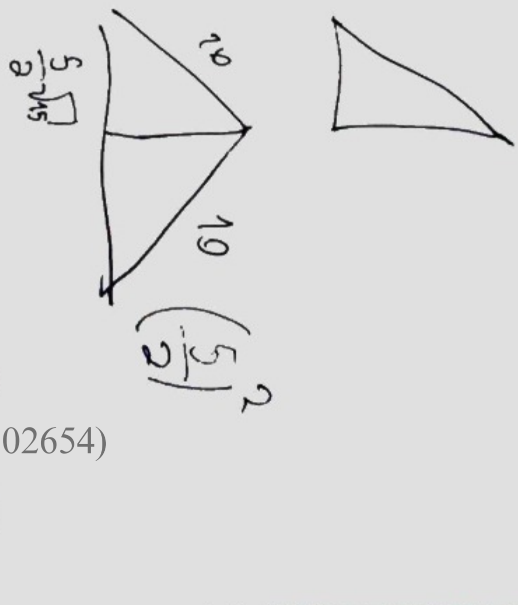
$$64b^2$$

$$\frac{100b^2+300b+625}{64}=25$$

$$b^2+6b+25=64$$

$$b^2+6b-39$$

$3\cdot 13$



21102307 (U371385 M1302654)

4

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102307**

ID профиля: **371385**

Вариант 19

Чистовик

Вариант 19

№ 4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 21 \\ НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases} \quad a;b;c \in \mathbb{N}$$

$a = 21k_a$

$b = 21k_b$

$c = 21k_c$

$$\begin{cases} НОД(k_a;k_b;k_c) = 1 \\ НОК(k_a;k_b;k_c) = 3^{16} \cdot 7^{14} \end{cases}$$

$x_i;y_i \in \mathbb{Z}_i$

$x_i;y_i \geq 0$

$k_a = 3^{x_a} \cdot 7^{y_a}$

$k_b = 3^{x_b} \cdot 7^{y_b}$

$k_c = 3^{x_c} \cdot 7^{y_c}$

$НОД(3^{x_a};3^{x_b};3^{x_c}) = 1$

$\Downarrow$

Одно из $x_a;x_b;x_c$ равно 0 ; $\min(x_a;x_b;x_c) = 0$

$НОД(7^{y_a};7^{y_b};7^{y_c}) = 1$

$\Downarrow$

Одно из $y_a;y_b;y_c$ равно 0 ; $\min(y_a;y_b;y_c) = 0$

$НОК(3^{x_a};3^{x_b};3^{x_c}) = 3^{16} \Rightarrow \max(x_a;x_b;x_c) = 16$

$НОК(7^{y_a};7^{y_b};7^{y_c}) = 7^{14} \Rightarrow \max(y_a;y_b;y_c) = 14$

21102307 (U371385 M1302655)

Чистовик

Вариант 19

№ 4 продолжение

$\min(x_a; x_b; x_c) = 0$

$\max(x_a; x_b; x_c) = 16$

Количество вариантов

(Расставить числа $0; 16; 0 \leq n \leq 16$ 17 вар

~~3·2·15~~

$\overline{}_{x_a}$ $\overline{}_{x_b}$ $\overline{}_{x_c}$

$1 \leq n \leq 15$	$3 \cdot 2 \cdot 15$
$n = 0$	$+$ 3
$n = 16$	$+$ 3

$$3 \cdot 2 \cdot 15 + 3 + 3 = 3 \cdot 32 = \boxed{96}$$

$\min(y_a; y_b; y_c) = 0$

$\max(y_a; y_b; y_c) = 14$

Количество вариантов

(Расставить $0; 14; 0 \leq m \leq 14$)

$\overline{}_{y_a}$ $\overline{}_{y_b}$ $\overline{}_{y_c}$

$1 \leq m \leq 13$	$3 \cdot 2 \cdot 13$
$m = 0$	3
$m = 14$	3

$$3 \cdot 2 \cdot 13 + 3 + 3 = 3 \cdot 28 = \boxed{84}$$

$$\boxed{96} \cdot \boxed{84} = 8064$$

Ответ: 8064

Чистовик

№ 5 $\quad \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right);\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right);\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ \frac{x}{2}-1>0 \\ x-\frac{11}{4}>0 \\ \frac{x}{2}-1\neq\pm1 \\ x-\frac{11}{4}\neq1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq1 \end{cases}$$

$x\in\left(\frac{11}{4};\frac{15}{4}\right)\cup\left(\frac{15}{4};4\right)\cup(4;+\infty)$

Заметим, что

$$\underbrace{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}_{a}+\underbrace{\left(x-\frac{11}{4}\right)}_{b}=3\underbrace{\left(\frac{x}{2}-1\right)}_{c}$$

$\log_{c^2}a;\ \log_{\sqrt{b}}c;\ \log_a b^2$

$$\boxed{\log_n m\cdot\log_k n=\log_k m}$$!

$$\boxed{\begin{matrix} \overset{a}{k}=\overset{b}{k}=\overset{c}{k-1} \\ ab=c^2 \end{matrix}}$$

2/0

$$\left[\begin{array}{l} \log_{c^2}a=\log_{\sqrt{b}}c=\log_a\frac{b^2}{a} \\ \log_{c^2}a=\log_a b^2=\log_{\sqrt{b}}\frac{c}{\sqrt{b}} \\ \log_{\sqrt{b}}c=\log_a b^2=\log_{c^2}\frac{a}{c^2} \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{b}}a=\log_a^2\frac{b^2}{a}$$

③ $\left(\log_b a=\log_a^2 b-2\log_a b+1\right)$

21102307 (U371385 M1302655)

Чистовик

№ 5 продолжение

$$4\log_a c = (\log_{c^2} a - 1)^2$$

21102307 (U371385 M1302655)

Черновик

$НОД(a;b;c) = 21$

$НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$

$3 \cdot 6 \cdot 7$

$3 \cdot 6 \cdot 7$ $\quad 6 \cdot 7$

$21k_1 \quad 21k_2 \quad 21k_3$

3^{18}

$3^1 \cdot 7^1$

$3^{x_1} \cdot 7^{y_1}$ $\quad x_i$

x_j

± решени

$3^{x_2} \cdot 7^{y_2}$

$x_i + x_j$

$3 \cdot 2$

$3^{x_3} \cdot 7^{y_3}$

$\forall\ 0\ 17$

6

$0\ \forall\ 17$

26

$17\ \forall\ 0$

0

1 ; 15

0 0 16

84

$3 \cdot 2 \cdot 15$

_ _ _

$3 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 14$

0 0 16 3

_ _ _

$36 \cdot 14 \cdot 16$

0 16 16 3

96

84

384

768

8064

30

1 21102307 (U371385 M1302655)

Черновик

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$ >1

$\log_{a^2} b$ >1, <1

$\log_{\sqrt{c}} a$ <1, >1

$\log_b c^2$ >1, >1

Больше их Суммы? Каждого в отдельности?

$c>0$

$c \neq 1$

$x>\frac{11}{4}$

$x \neq \frac{15}{4}$

$x \neq 4$ $x>\frac{11}{4}$

$x \neq \frac{15}{4}$

$x>2$ $a>0$

$x>\frac{1}{2}$ $b>0$

$x>\frac{11}{4}$ $c>0$

$x \neq 4; 0$ $a \neq \pm 1$

$x \neq \frac{5}{2}$ $b \neq 1$

$c \neq 1$

$a \neq 0$

$a \neq \pm 1$

$x \neq 2$

$x \neq 0$

$x \neq 4$

$\frac{x}{2}-1$

$b>0$

$b \neq 1$

$\frac{11}{4}$ $\frac{15}{4}$ 4

$\frac{11}{8}-1$

$\frac{1}{2}\log_a b$

$\log_{a^2} b = \log_{\sqrt{c}} a = \log_b \frac{c}{b}$

$\left(\frac{3}{8}\right)^2$ $\frac{11}{8} - \cancel{\frac{2}{8}}$

$\frac{9}{8}$

$2\log_c a$

$2\log_b c$

$x \in \left(\frac{11}{4}; \frac{15}{4}\right)$

log

log

21102307 (U371385 M1302655)

2

Черновик 8

$\overset{n}{\log_{a^2} b}$ $\overset{m}{\log_{\sqrt{c}} a}$ $\log_b c^2$

3 варианта!

$x \in \left(\frac{11}{4}; \frac{15}{4}\right)$

$\frac{1}{2}\log_a b = 2\log_c a$

$b>1$

$a<1$

$\log_a c$ $\frac{1}{2}\log_c b = \log$

$c<1$ ⊖ ⊕ ⊖

$\log_{a^2} b$ ($a^2<1$, $b>1$) $\log_{\sqrt{c}} a$ ($\sqrt{c}<1$, $a<1$) $\log_b c^2$ ($b>1$, $c^2<1$)

$\log_a b \cdot \log_c a$

$\log_c b$

$\frac{2}{nm}$

$x \in \left(\frac{15}{4}; 4\right)$

$b>1$

$\frac{1}{2}n$ $2m$ $2nm$

$c>1$

⊕

$a<1$ ⊖ ⊖

$\log_{a^2} b$ ($a^2<1$, $b>1$) $\log_{\sqrt{c}} a$ ($\sqrt{c}>1$, $a<1$) $\log_b c^2$ ($b>1$, $c^2>1$)

$\frac{1}{2}n$; $2m$; $\frac{2}{nm}$

$\frac{1}{2}n = 2m$ $\frac{1}{2m^2} = 2m$

$n = 4m$ $\frac{1}{2m^2}$; $2m$;

$\frac{2}{4m^2}$

$x \in (4; +\infty)$

$b>1$

$c>1$ ⊕ ⊕ ⊕

$a>1$

21102307 (U371385 M1302655)

③

Черновик

$a = \frac{x}{2} - 1$ $\quad \frac{2x-4}{4}$

$b = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ $\quad \frac{2x-1}{4}$

$c = x - \frac{11}{4}$ $\quad \frac{4x-11}{4}$ $(3a-b)$ $\quad 3(2x-4)$ $\quad 12$

$c = 3a - b$ $\quad 2(2x-1)$

$c + b = 3a$

$3a - b$ $\quad 9 \quad 3 \quad \log$

$a = b$

$\frac{6x-12}{4} - 2x + 1$ $\quad \log_a b = \frac{4}{\log_a 3a-b}$

$\frac{1}{2}\log_a b$; $2\log_{3a-b} a$; $\log_b 3a-b$ $\quad \log_a b \cdot \log_a 3a-b = 4$

$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{a}} \sqrt{a}b$; $\log_{3a-b} 3a^3 - a^2 b$; $\log_b 3ab - b^2$ $\quad 2\sqrt[3]{2}$ $\quad a = b$

$\log_{\sqrt{2}} \sqrt[3]{2}$ $\quad \log 3a \quad 3b$

$a(3-1)$ $\quad 2b$

$16 \cdot 2$

$\log_a b = 4\log_{3a-b} a$ $\quad 2$

b^3

2

$\frac{1}{2}$ $\quad 16 \quad 16$

$\log_4 2$ $\quad \log_{16} 8 = 4\log 8$

$2^{\log_4 4}$ $\quad \log 4$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 4\log \frac{1}{2}$

21102307 (U371385 M1302655)

4

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}($

Черновик.

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$;

log