Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102239**

ID профиля: **846951**

Вариант 19

Черновик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25\\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b,\ 25)\end{cases}$$

№1

Пусть $a_n = a_1 + d(n-1)$

$S = \frac{a_1+a_{14}}{2} \cdot 14 = [a_1 + a_1 + d(14$

Математика 11 класс

№1

~~Дано:~~

~~S_{14}~~

~~$a_9 a_{17} > S + 12$~~

~~$a_{11} a_5 < S + 47$~~

~~a_1 - ?~~

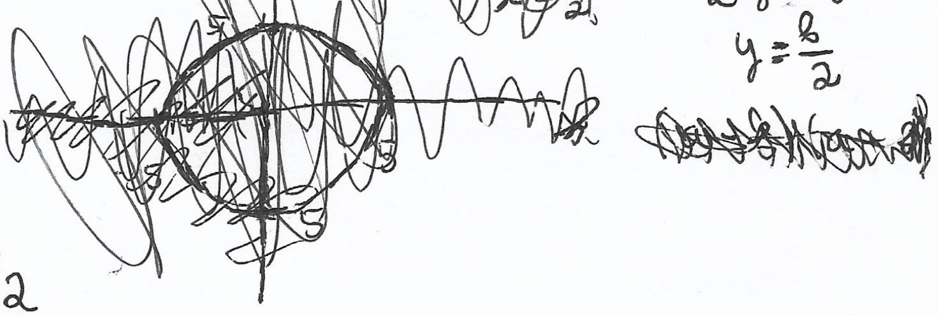
~~$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 \le 25$~~

~~$x^2 + y^2 - 25 \le a(2x + a) + b(2y - b)$~~

$2y - b = 0$

$2y = b$

$y = \frac{b}{2}$



№2

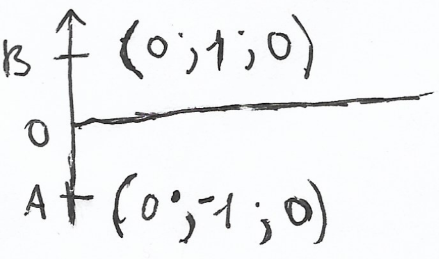
$AB = 2$

$AC = CB = 6$

$AD = DB = 7$

$C(l; 0; z_1)$

$D(l; 0; z_2)$



Чистовик   Математика 11 класс (1)

Задача №1

Пусть $a_n = a_1 + d(n-1)$, тогда

$$S = \frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot 14 = [a_1 + a_1 + d(14-1)]\,7 = (2a_1+13d)\,7 = 14a_1 + 91d$$

Запишем два нер-ва

$$\begin{cases}(a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1+91d+12\\(a_1+10d)(a_1+14d) < 14a+91d+47\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+24da_1+128d^2 > 14a_1+91d+12\\a_1^2+24da_1+140d^2 < 14a_1+91d+47\end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases}-a_1^2-24da_1-128d^2 < -14a_1-91d-12\\a_1^2+24da_1+140d^2 < 14a_1+91d+47\end{cases}$$

Сложим

$$12d^2 < 35$$

$$d^2 < \frac{35}{12} \quad (2)$$

Возрастающая, значит $d>0$ и из (2)

$$d < \sqrt{\frac{35}{12}} < \sqrt{\frac{36}{12}} \approx \sqrt{3} \approx 1{,}7 < 1{,}8$$

d – ~~[illegible]~~ целое и $d < 1{,}8 \Rightarrow d = 1$

Подставляем $d=1$

$$\begin{cases}a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+103\\a_1^2+24a_1+140 < 14a_1+138\end{cases}$$ или

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\a_1^2+10a_1+2<0\end{cases}$$

$$(a_1+5)^2>0 \longrightarrow a \neq -5$$

$$a_1^2+10a_1+2<0$$

$$(a_1)_{1,2} = -5 \pm \sqrt{23}$$

$$-10 < -5-\underset{<\sqrt{25}}{\sqrt{23}} < a_1 < -5+\underset{<\sqrt{25}}{\sqrt{23}} < 0$$

Отсюда

$a_1 = -9, \ldots -1$, но $a_1 \neq -5$

Значит, $a_1 = -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

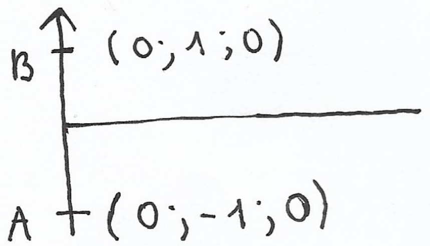
Проверю крайние:

$-9 > -5-\sqrt{23}$ | $-1 < -5+\sqrt{23}$
$9 < 5+\sqrt{23}$ | $4 < \sqrt{23}$
$4 < \sqrt{23}$ | $16 < 23$
$16 < 23$

Ответ: $a_1 = -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

Задача №2

Пусть радиус цилиндра R. Введем систему координат, начало которой лежит в середине AB, направление оси z совпадает с направлением оси цилиндра, а координаты вершин таковы:



$C(\ell; 0; z_1)$

$D(\ell; 0; z_2)$

Точки C и D лежат в плоскости, проходящей через середину AB перпендикулярно ему, в силу того, что $AC = CB$ и $AD = DB$

Тогда

$$AC^2 = \left(\sqrt{\ell^2+1^2+z_1^2}\right)^2 = 36 \quad (1)$$

$$AD^2 = \left(\sqrt{\ell^2+1^2+z_2^2}\right)^2 = 49 \quad (2)$$

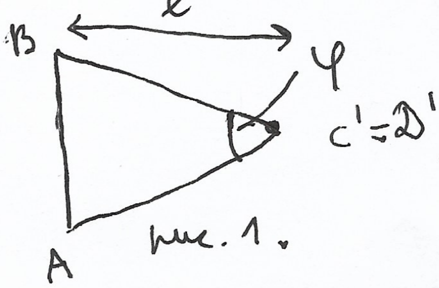


рис. 1.

Радиус цилиндра, когда минимальный оказывается радиус окружности, описанной вокруг треугольника на рис. 1.

Так как $\frac{AB}{\sin\varphi} = 2R$

то R - минимально при максимальном $\sin\varphi = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$

тогда

$$l = \frac{|AD|}{2}\cdot ctg\frac{\varphi}{2} = \frac{\overset{=2}{|AD|}}{2}\overset{=1}{ctg\frac{\pi}{4}} = 1$$

из (1)

$$\begin{cases} z_1^2 + 2 = 36 \\ z_2^2 + 2 = 49 \end{cases}$$, отсюда

$$(z_1)_{1,2} = \pm\sqrt{34},\quad (z_2)_{1,2} = \pm\sqrt{47}$$

Т.к $|CD| = |z_1 - z_2|$, то $|CD|$ может принимать значения $\sqrt{47} - \sqrt{34}$ и $\sqrt{47} + \sqrt{34}$

<u>Ответ:</u> $CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$ или $CD = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

Задача №3

Запишем второе нер-во системы в виде

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \le 25 \\ a^2 + b^2 \le -8a - 6b \end{cases}$$

Преобразуем второе

$$a^2 + 8a + b^2 + 6b \le 0$$

$$(a+4)^2 - 16 + (b+3)^2 - 9 \le 0$$

$$\begin{cases} (a+4)^2 + (b+3)^2 \le 5^2 \\ a^2 + b^2 \le 5^2 \end{cases}$$ - это пересеч. двух кругов с

радиусами 5 и с центрами $(-4;-3)$ и $(0;0)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102239**

ID профиля: **846951**

Вариант 19

Задача №5

ОДЗ: Для всех выражений

$x > \frac{11}{4}, \; x \neq \frac{15}{4}, \; x \neq 4$

Решим сначала уравнение

$$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

В ОДЗ:

$$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{\underbrace{|\frac{x}{2}-1|}_{>0}}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)}$$

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 \overset{ОДЗ}{=} 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left|x-\frac{11}{4}\right|^{0} = 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

тогда

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \overset{x>\frac{11}{4}}{>} \frac{11}{8}-\frac{2}{8} = \frac{9}{8} > 1$$

Оба логарифма слева возрастают, значит если решение есть то оно единственное. Решение надо подбирать. Оно есть ..... В других случаях скорее всего не будет.

Задача №4

Т.к НОД$(a,b,c) = 21$, то

$a = 21k, \; b = 21l, \; c = 21m$, где $k \in N$, НОД$(k,l,m) = 1$

НОК$(a;b;c) =$ НОК$(21k; 21l; 21m) = 3^{17}\cdot 7^{15}$. ~~Кl~~ Т.к НОК$(x;y)$ включает в себя каждую из чисел x и y в максимальной степени, то пусть

$a = 3^{\alpha_1}7^{\beta_1}$

$b = 3^{\alpha_2}7^{\beta_2}$

$c = 3^{\alpha_3}7^{\beta_3}$

Тогда выполняются ограничения

$$\begin{cases} \alpha_1 \geq 1, \; \alpha_2 \geq 1, \; \alpha_3 \geq 1, \; \beta_1 \geq 1, \; \beta_2 \geq 1, \; \beta_3 \geq 1 \\ \max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 17 \\ \max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 15 \\ \min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1 \\ \min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1 \end{cases}$$

Вариантов для α

α_1 α_2 α_3

Всего 17

аналогично для $\beta \sim 15$

Число комбинаций определяется, как
$15 \times 17 \times 36$,
т.к. $\exists$ 6 различных возможных комбинаций показателей α_i, β_i $(i = 1, 2, 3)$

Итого

$$15 \times 17 \times 36 = 90 \cdot 6 \times 17 = 540 \times 17 = 9180$$

$$\begin{array}{r} 540 \\ \times\ 17 \\ \hline 3780 \\ +\ 540 \\ \hline 9180 \end{array}$$

28
11

Ответ: 9180

Задача N 5 (продолжение)

Произведение этих чисел
y, $y+1$:
$y^2(y+1) = ?$

$$\frac{\log_a \frac{x}{2} - \frac{1}{4}}{\log_a (\frac{x}{2}-1)^2} \cdot \frac{\log_a \frac{x}{2} - 1}{\log_a \sqrt{x - \frac{11}{4}}} \cdot \frac{\log_a (x - \frac{11}{4})^2}{\log_a (\frac{x}{2} - \frac{1}{4})} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cancel{2}}} \cdot 2 = 2$$

$y^2(y+1) = 2$

$y^3 + y^2 - 2 = 0$

$y_1 = 1$, $y^2 + 2y + 2 = 0$

$y_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}$

$$\begin{array}{l|l} y^3 + y^2 - 2 & y - 1 \\ \hline y^3 - y^2 & y^2 + 2y + 2 \\ \hline 2y^2 + 0y & \\ 2y^2 - 2y & \\ \hline 2y - 2 & \end{array}$$

Пусть первое y

$\underline{y=1}$ $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2} \frac{x}{2}-\frac{1}{4}=1$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=(\frac{x}{2}-1)^2$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1$

$2x-1=x^2-4x+4$

$x^2-6x+5=0$

$x_1=1 \; x_2=5$

$x_1=1$ – по ОДЗ не подходит

$\underline{x=5}$

$y^2(y+1)=2$

$y^3+y^2-2=0$

$$\begin{array}{l|l} y^3+y^2-2 & y-1 \\ \hline y^3+y^2 & y^2+2y+2 \\ \hline 2y^2+0y & \\ 2y^2-2y & \\ \hline 2y-2 & \end{array}$$

$y^2+2y+2=0$

нет корней!

Подставляем 5 в другие числа

$\log \frac{(\frac{x}{2}-1)}{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\Big|_{x=5}=\log \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}}}=1$ – тоже 1.

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2\Big|_{x=5}=\log_{\frac{9}{4}}(\frac{9}{4})^2=2$, т.е

это число, которое на 1 больше. Ещё надо два варианта рассмотреть (второе = 1 и третье = 1), но $x=5$ – подходит

Ответ: $x=5$...

Черновик Математика 11 класс

~~Задача~~ N4

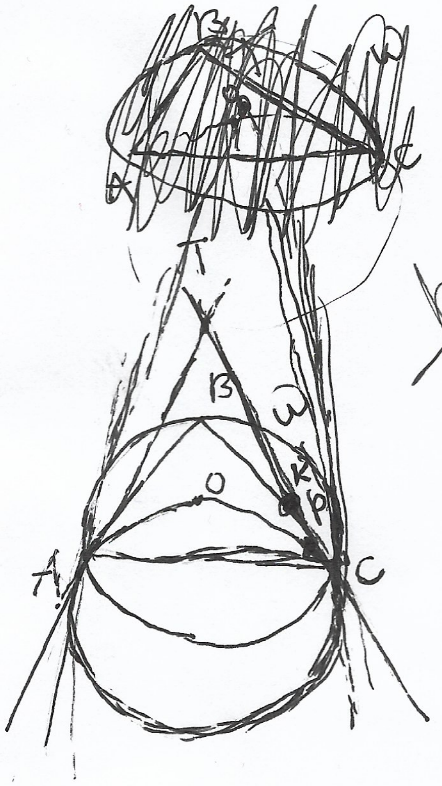
$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

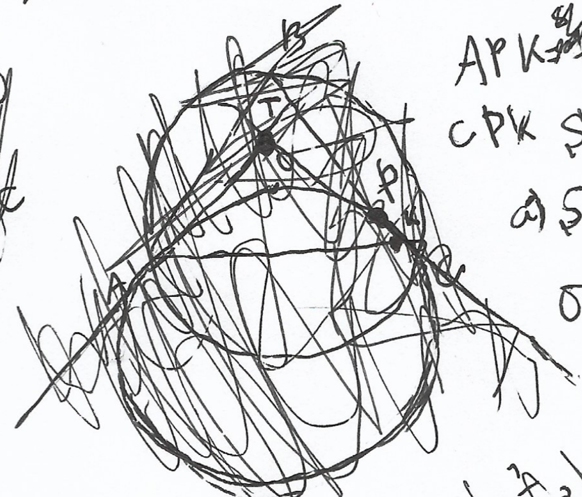
N5

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$ $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

N6





APK $S=10$

CPK $S=6$

а) $S_{ABC}=?$

б) $\angle ABC=\mathrm{arctg}$

$AC=?$