Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102058**

ID профиля: **139005**

Вариант 19

Задача 1. Отв: $\{-8, -7, -6, -5, -2, -3, 4\}$.

$a_1 =: a$, разн. $=: b$, $b > 0$.

Из усл. $\Rightarrow$ $a, b \in \mathbb{Z}$.

$S = a + a + b + \ldots + a + 13b = 14a + \frac{14 \cdot 13}{2} b = 14a + 91b$

$a_9 \cdot a_{17} = (a + 8b)(a + 16b) =$

$= a^2 + 24ab + 128b^2 > 14a + 91b + 12$ (1)

$a_{11} a_{15} = (a + 10b)(a + 14b) =$

$= a^2 + 24ab + 140b^2 < 14a + 91b + 47$ (2)

Домножим (1) на -1, поменяв знак н-ва:

$-a^2 - 24ab - 128b^2 < -14a - 91b - 12$ (1')

Сложим (1'), (2):

$12b^2 < 47 - 12$

$b^2 < \frac{35}{12} < 3$, т.к. $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$,

$b = 1$.

Н-ва (1), (2) превращаются в

$a^2 + 24a + 128 > 14a + 91 + 12$

$a^2 + 10a + 25 > 0$ — $(a+5)^2 > 0$ $\forall a \neq -5$

Н-во (2):

$91 + 12 = 103$

1

Задача 1, продолжение.

$$a^2+24a+140<14a+91+47$$

$$a^2+10a+2<0$$

$$10^2-4\cdot 2=92$$

$$a_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{92}}{2}=-5\pm\frac{\sqrt{92}}{2}=-5\pm\sqrt{13}$$

$$a\in\left(-5-\sqrt{13},\ -5+\sqrt{13}\right).$$

~~Т.к. $a\in\mathbb{Z}$, a м.б. только -5.~~

~~Но из (1) следует, что $a\neq-5$. Следовательно,~~

~~решений a не сущ.~~

$\sqrt{13}<4$

$a\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ подходящие знач.:

$-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2$

При этом -5 не подходит в (1).

Остаются только

$$\{-8,\ -7,\ -6,\ -4,\ -3,\ -2\}$$

Задача 1. Ответ: $\pi \cdot 10^2 = 100\pi$.

$$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$$

I: $-8a-6b \le 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2 \le -8a-6b$

$a^2+8a+b^2+6b \le 0$

$(a+4)^2-16+(b+3)^2-9 \le 0$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$

II: $-8a-6b \ge 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2 \le 25$

I на пл-ти $(a;b)$ – пересечение окр-ти с центром $(-4;-3)$ и радиусом 5 и верхней полупл-ти прямой

$8a+6b+25=0$.

II – пер. окр-ти с ц. $(0;0)$ и рад. 5 и нижней пол.-ти $8a+6b+25 \le 0$.

Заметим, что точки пересечения обеих окр-тей с прямой совп.

Задача 3, продолжение

Для этого найдём ординаты точек пер-я

I: $a = -\frac{25}{8} - \frac{6}{8}b$

$a^2 + b^2 = 25$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{64}(25+6b)^2 + b^2 = 25$

$(25+6b)^2 + 64b^2 = 25\cdot 64$

$625 + 300b + 36b^2 + 64b^2 = 25\cdot 64$

$100b^2 + 300b + 25(25-64) = 0$

$4b^2 + 12b - 39 = 0$

II: $(a+4)^2 + (b+3)^2 = 25 \Rightarrow$

$a = -\frac{25}{8} - \frac{6}{8}b$

$\Rightarrow \left(-\frac{25}{8} - \frac{6}{8}b + 4\right)^2 + (b+3)^2 = 25$

$(-6b+7)^2 + 64(b+3)^2 = 25\cdot 64$

$36b^2 - 84b + 49 + 64b^2 + 6\cdot 64b + 9\cdot 64 = 25\cdot 64$

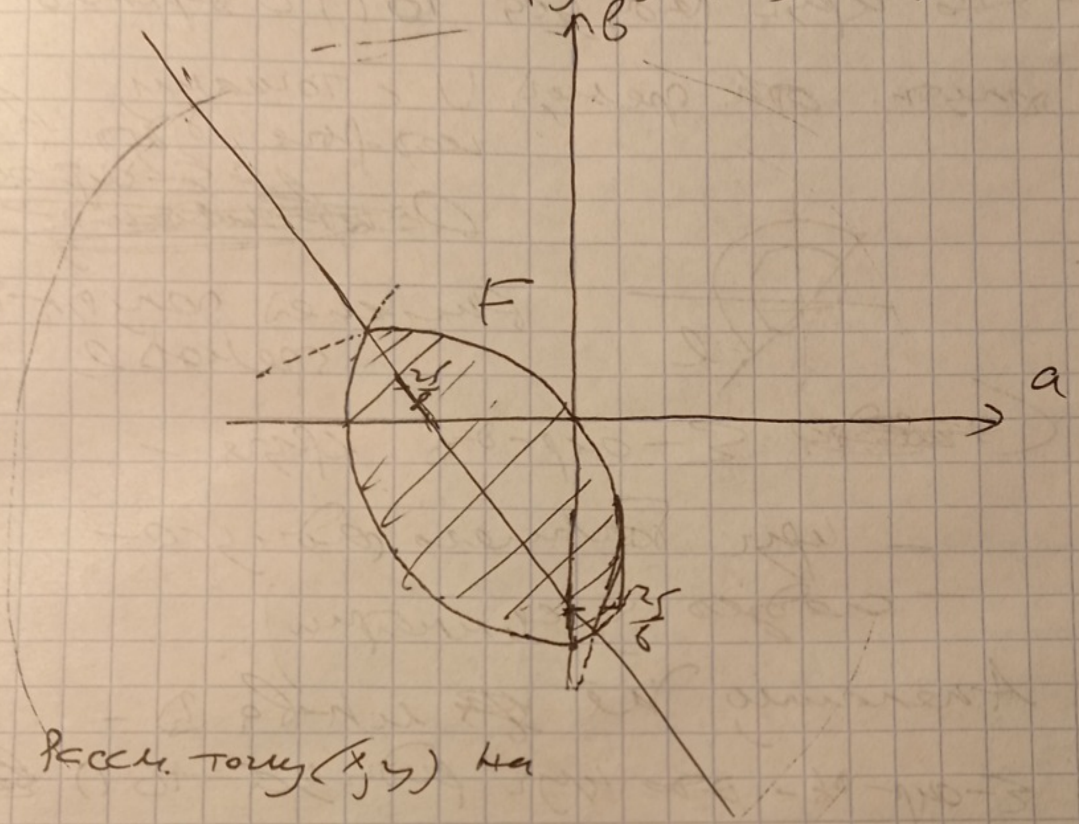
$100b^2 + 300b + \underbrace{49 + 9\cdot 64}_{625} - 25\cdot 64 = 0$

$4b^2 + 12b - 39 = 0.$

41

Задача 3 продолж.

Таким образом, фигура F будет



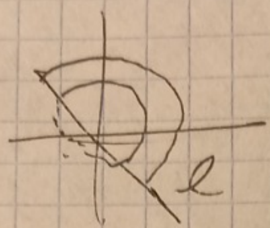
Рассм. точку (x,y) на коорд пл-ти.

Если найдутся a, b, чтобы вып. система, то это означает, что найдется $(a,b) \in F$, что расст. от (x,y) до $(a,b) \le 5$. Таким образом, M — мн-во точек, удаленных на расст. ≤ 5 от F.

3, продолж. $\varepsilon = 5$

Для мн-ва I —

— это круг радиуса 10 ∩ с верхней полупл. отн. прямой, ∪ с точками, кот-рые будут входить в ε-окр остальн. ~~[illegible]~~ D



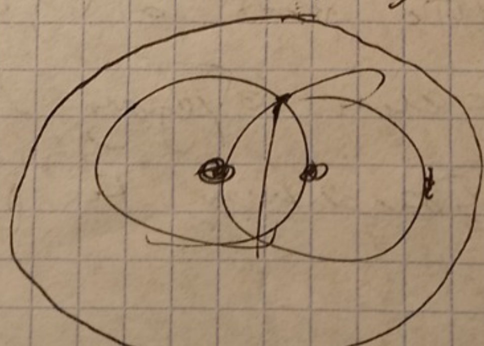
нижней полупл-ти отн. прямой l

(~~[illegible]~~ ε-окр-ть круга — — круг большего радиуса — — следует из симметрии)

Аналогично, для ~~[illegible]~~ мн-ва D —

— ε-окр-ть — это круг радиуса 10 ∩ ~~[illegible]~~ ниж. полупл-ти ∪ множество точек, уже указанными —

— точки ε-окр-ти I в нижней полупл-ти отн. отн. прямой l



из ~~[illegible]~~ того, что т. I лежит на окр-ти D и наоборот

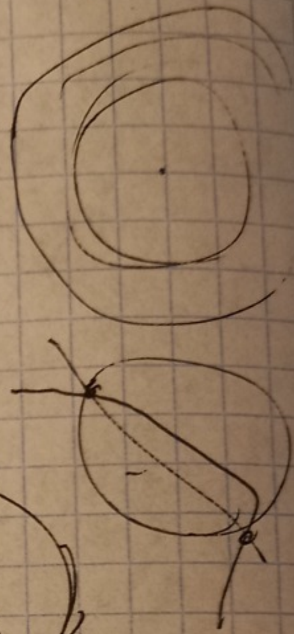
$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 25$

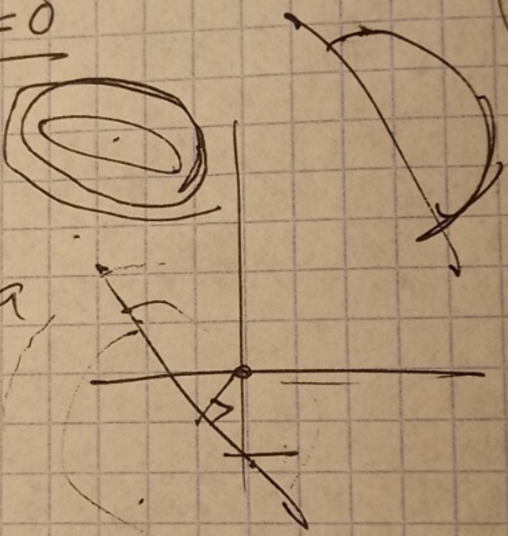
$a^2 + b^2 \le -8a - 6b$

$(a+4)^2 + (b+3)^2 = 16 - 9 \ldots$

$= (a+4)^2 + (b+3)^2 - 25$

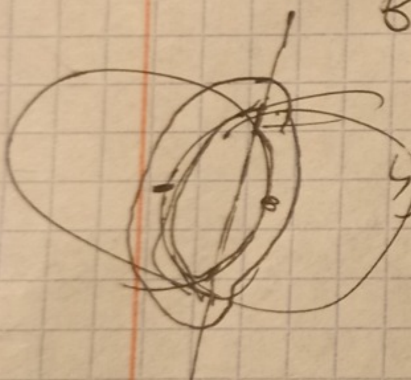
$8a + 6b + 25 = 0$





$b = -\frac{25}{6} - \frac{8a}{6}$

$4,\ 3$



$a = -\frac{25}{8} - \frac{6}{8} b$

$a^2 + b^2 = 25$

$\frac{1}{64}(25 + 6b)^2 + b^2 = 25$

$(25 + 6b)^2 + 64b^2 = 25 \cdot 64$

$625 + 300b + 36b^2 + 64b^2 = 25 \cdot 64$

$100b^2 + 300b + 25(25-64) = 0$

$4b^2 + 12b - 39 = 0$

$\frac{39}{4}$

$\cancel{(a-5)}$ $(a+4)^2 + (b+3)^2 = 25$

$\cancel{(a+4)}$

$\left(-\frac{25}{8} - \frac{6}{8}b + 4\right)^2 + (b+3)^2 = 25$

$(-25 - 6b + 32)^2 + 64(b+3)^2 = 25 \cdot 64$

$(-6b+7)^2 + 64(b+3)^2 = 25 \cdot 64$

$36b^2 - 84b + 49 + 64b^2 + 6 \cdot 64 b + 9 \cdot 64 = 25 \cdot 8$

$100b^2 + 300b + 9 \cdot 64 + 49 - 25 \cdot 8$

12, 7, 84

384, 84

64, 6, 384

64, 9, 576

576, 49, 625

25(

625

$$128b^2 + b(24a-91) + a^2 - 14a - 12 > 0$$

$$140b^2 + b(24a-91) + a^2 - 14a - 47 < 0$$

$$(24a-91)^2 - 4 \cdot 128 \cdot (a^2 - 14a - 12)$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ -128 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 \\ +12 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$12b^2 \; b - 35 < 0$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102058**

ID профиля: **139005**

Вариант 19

Задача 4. Ответ: 9180. чистовик

Рассм. разлож. на простые чисел a, b, c.

Если хоть в одно входит некоторое простое p, то оно будет входить в НОК.

Значит, в разложении на простые a, b, c присутствуют только $3, 7$.

$$a = 3^{\alpha_1}7^{\beta_1}$$
$$b = 3^{\alpha_2}7^{\beta_2}$$
$$c = 3^{\alpha_3}7^{\beta_3}$$

$$\text{НОД}(a,b,c) = 3^{\min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}7^{\min(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} = 3\cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \min(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 1.$$

$$\text{НОК}(a,b,c) = 3^{\max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}7^{\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3)} = 3^{17}\cdot 7^{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 17$$
$$\max(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 11$$

Итак, среди α_i ~~одно будет~~ какое-то будет 1, какое-то 17, а третье будет каким-то из $1, 2, \ldots, 17$. Найдем число способов выбрать эту тройку $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Посчитаем сначала способов, когда

из условия

1) В произведении числа не повторяются, т.е.

это третье число лежит строго между 1, 17.

Тогда $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 17, x)$, $x \in 2, \dots, 16$ —

— с точностью до перестановки. Числа различные ⇒ каждая тройка будет давать $3! = 6$

упор. троек. Всего будет $6 \cdot 16$.

Если ~~тройка~~ — числа могут повторяться.

То же тройки, с точностью до перестановки —

— 1, 1, 17 или 1, 17, 17. Каждая

дает три тройки —

— всего 6.

В сумме получится $6 \cdot 17$.

Аналогично считаем число способов

выбрать $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — $6 \cdot 14 + 6 = 6 \cdot 15$.

α, β можно выбирать независимо ⇒

⇒ всего различных троек α, β будет

$6 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 15 = 9180$

$\boxed{2}$

Задача 5 Ответ: 3; 5. чистовик

$a := \frac{x}{2} - 1$ ОДЗ:

$b := \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ $a, b, c > 0$

$c := \frac{x}{2} - \frac{11}{4}$ $a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1$

$a>0$

$\log_{a^2} b = \frac{1}{2}\log_a b$ $A := \log_a b$

$\log_{\sqrt{c}} a = 2\log_c a$ $B = \log_c a$

$c>0$

$\log_{\sqrt{b}} c = 2\log_b c$ $C := \log_b c$

$b \neq 1$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$a \neq 1$

$\log_a b \cdot \log_b c = \frac{\log_b c}{\log_b a} \cdot \log_c a = \frac{1}{\log_c a} \Rightarrow$

$\Rightarrow ABC = 1.$

Таким образом, выполняется одна из трех систем:

1) $\begin{cases} ABC = 1 \\ \frac{1}{2}A = 2B \\ 2B + 1 = 2C \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ABC = 1 \\ 2B = 2C \\ 2B + 1 = \frac{1}{2}A \end{cases}$

3) $\begin{cases} ABC = 1 \\ 2C = \frac{1}{2}A \\ 2C + 1 = 2B \end{cases}$ причем 1), 3) отличаются заменой B на C и C на B.

смоовик

5 продолж.

1) $A = 4B,\ C = B + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow B \cdot 4B \cdot (B + \frac{1}{2}) = 1$

$4B^3 + 2B^2 - 1 = 0$

$B = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{l|l} 4B^3 + 2B^2 - 1 & B - \frac{1}{2} \\ \hline -\ 4B^3 - 2B^2 & 4B^2 + 4B + 2 \\ \quad 4B^2 & \\ -\ 4B^2 - 2B & \\ \quad 2B - 1 & \end{array}$$

$4B^2 + 4B + 2 = 2(2B^2 + 2B + 1)$

$D = 2^2 - 4 \cdot 2 < 0$

Единств. реш. $B = \frac{1}{2}$.

$\log_{x - \frac{11}{4}} \left(\frac{x}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$

$\left(x - \frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{2} - 1$

$x - \frac{11}{4} = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

$4x - 11 = (x-2)^2$

$x^2 - 4x + 4 - 4x + 11 = 0$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-5)(x-3) = 0$

$x = 5$ 5: $\frac{x}{2} - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$ — подходит

$x = 3$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{10-1}{4} = \frac{9}{4}$

$x - \frac{11}{4} = 5 - \frac{11}{4} = \frac{20-11}{4} = \frac{9}{4}$

$\boxed{9}$

5 продолж.

ЧИЛ

3: $3/2 - 1 = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} - \frac{1}{4} > 0, \neq 1$ подходит.

$3 - \frac{11}{4} > 0, \neq 1$

2) $\cancel{A = 2B}$ $A = 4C$ $\cancel{B = C + \frac{1}{2}}$ $B = C$

$A = 4C + 2$

$C^2(4C+2) = 1$

$4C^3 + 2C^2 - 1 = 0$

Аналогично $\cancel{B}$ зреем. $f()$ отн. B.

$C = \frac{1}{2}$ (и только $\frac{1}{2}$)

$\log_{\frac{x}{2} - \frac{1}{4}} \left(x - \frac{11}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{x}{2}$

$\Downarrow$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2$ $\quad \frac{x}{2} - \frac{1}{4} < x - \frac{11}{4}$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x^2 + \frac{121}{16}x - \frac{11}{2}$ $\quad \frac{x}{2} > \frac{10}{4}$

$8x - 4 = 16x^2 + 121x - 8 \cdot 11$

$16x^2 + 113x - 84 = 0$

$\cancel{113^2}$ $D = 113^2 + 4 \cdot 16 \cdot 84$

$x_{1,2} = \frac{-113 \pm \sqrt{113^2 + 4 \cdot 16 \cdot 84}}{2 \cdot 16}$

по ОДЗ $\Rightarrow x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2$ не подх.

$\boxed{5}$

5 случай

2): $B = C$

$A = 4C + 2 = 4B + 2$

$1 = ABC = B^2 \cdot (4B + 2) =$

$= 4B^3 + 2B^2$ (⇒)

$\Leftrightarrow \underline{4B^3 + 2B^2 - 1 = 0}$

— аналогично 1): $B = \frac{1}{2}$.

3) $C = \frac{1}{2}$, $\cancel{A} = 2$, $B = 1$

$A = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{x}{2} - 1}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2$

$\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$(x - 2)^2 = 2x - 1$

$x^2 + 4 - 4x - 2x + 1 = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$(x - 5)(x - 1) = 0$

$x = 1$ не подх.: $x - \frac{4}{5} = 1 - \frac{11}{5} < 0$

$\underline{x = 5}$ уже обнаружено.

Таким образом, ответ:

(3; 5)

6

Задача 1. Отв: а) $\frac{128}{3}$, б) не готово

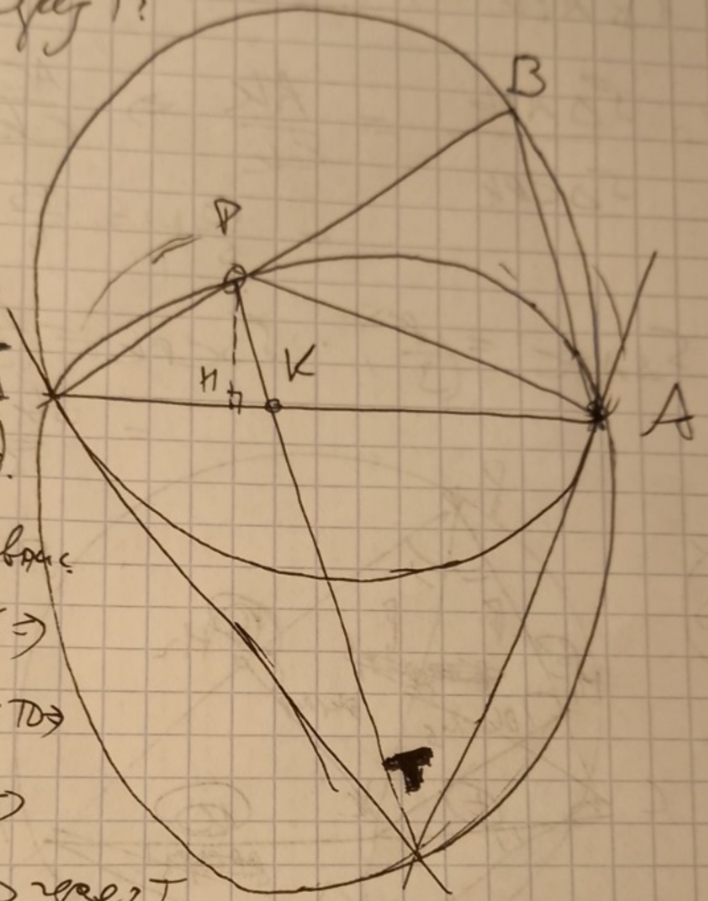
$\angle ABC =: \beta$
$\angle BAC =: \alpha$
$\angle BCA =: \gamma$

окр-ть (ΔAOC) обозначим за Ω.

1) Ω проходит через T:

$\angle KCT = \angle CAT = \beta$, как угол между кас. и хордой $\Rightarrow$ угол $\angle CTA = \pi - 2\beta$ ($\Sigma \angle \Delta ATC$).

$\angle COA = 2\beta$, как впис. опир. на дугу AC $\Rightarrow$ $\angle CPA + \angle CTA = \pi \Rightarrow$ $APCT$ впис. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \Omega$ проходит через T.



2) $\angle CPK = \angle CAT$ как впис. опир. на одну дугу $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle CPK = \beta \Rightarrow$, $\Delta CPK \sim \Delta CBA$ по двум углам $\Rightarrow$ отнош. площ. = квадрату коэф. подобия $= \left(\frac{CK}{CA}\right)^2$.

H – осн. высоты ΔCPK опущ. из P. $S_{\Delta CPK} =$

1 пропорц.

исследов.

1 пропорц

$= \frac{1}{2} PH \cdot CK = 6$ $\Rightarrow$

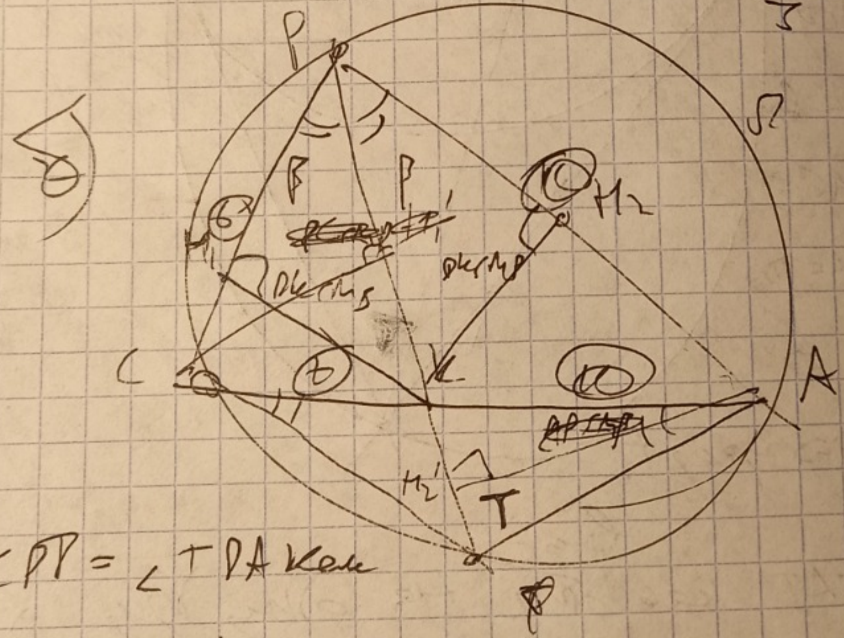
$S_{\triangle APK} = \frac{1}{2} PH \cdot AK = 10.$

$\Rightarrow \frac{10}{6} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{AK}{CK} \Rightarrow \frac{AC}{CK} = \frac{AK+CK}{CK} =$

$= \frac{10}{6} + 1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$

$S_{\triangle ABC} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 6 =$

$= \frac{64 \cdot 2}{3} = \frac{128}{3}.$



$\angle CPT = \angle TPA$ как

вписанные, опирающиеся

на одну дугу, $\angle TPA = \angle TCA$. Поэтому $\angle KPC =$

$= \angle KPA = \beta$. (где $\beta = \angle$)

Стороны PC и AP относятся, как отрезки,

3) продолж.

отрезки

на которые бисс. PK делит AC.

$$\frac{PC}{AP} = \frac{6}{10}$$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$

$a=\frac{x}{2}-1$

$b=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$c=x-\frac{11}{4}$

$a, b, c>0$

$a, b, c \neq 1$

$\log_{a^2} b, \log_{c^{\frac{1}{2}}} a, \log_b c^2$

$\boxed{\frac{1}{2}A, 2B, 2C}$

$\frac{1}{2}\log_a b \quad 2\log_c a, \quad 2\log_b c$

$\log_c a = \frac{1}{\log_a c}$

$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

$ABC=1$

$\frac{1}{2}A=2B$

$A=4B$

$2C=2B+1=$

$C=\frac{1}{A^2}$

$x-\frac{11}{4}=$

$x-\frac{1}{2}$

$\frac{x}{2}-1<\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{11}{4}-\frac{1}{2}=\frac{4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>1$

$B\cdot 4B\cdot(2B+1)=1$

$8B^3+4B^2-1=0$

B

$\frac{x}{2}-1>1$

$\frac{11}{4}$

$x > \frac{11}{4}$

$x - \frac{11}{4} > 0$

$x > \frac{5}{2}$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 0$

$x \quad 5$

$\frac{1}{2} \quad \frac{10}{4}$

$\frac{x}{2} - 1 > 1 \qquad x > 4$

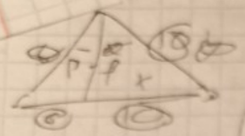
$x - \frac{11}{4} \qquad \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

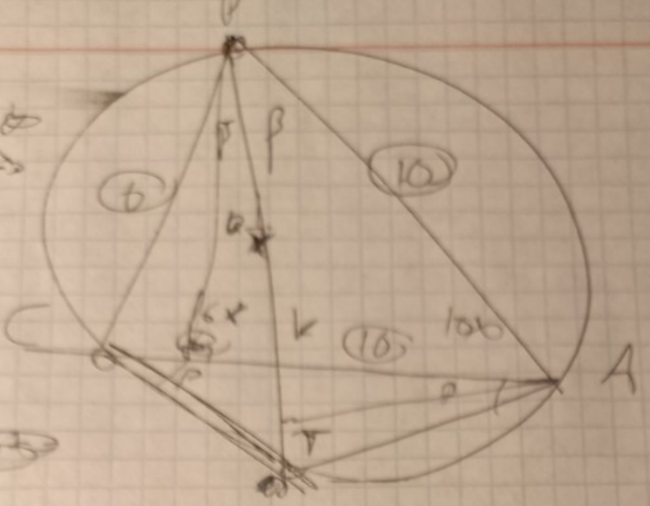
$\frac{x}{2} - 1$

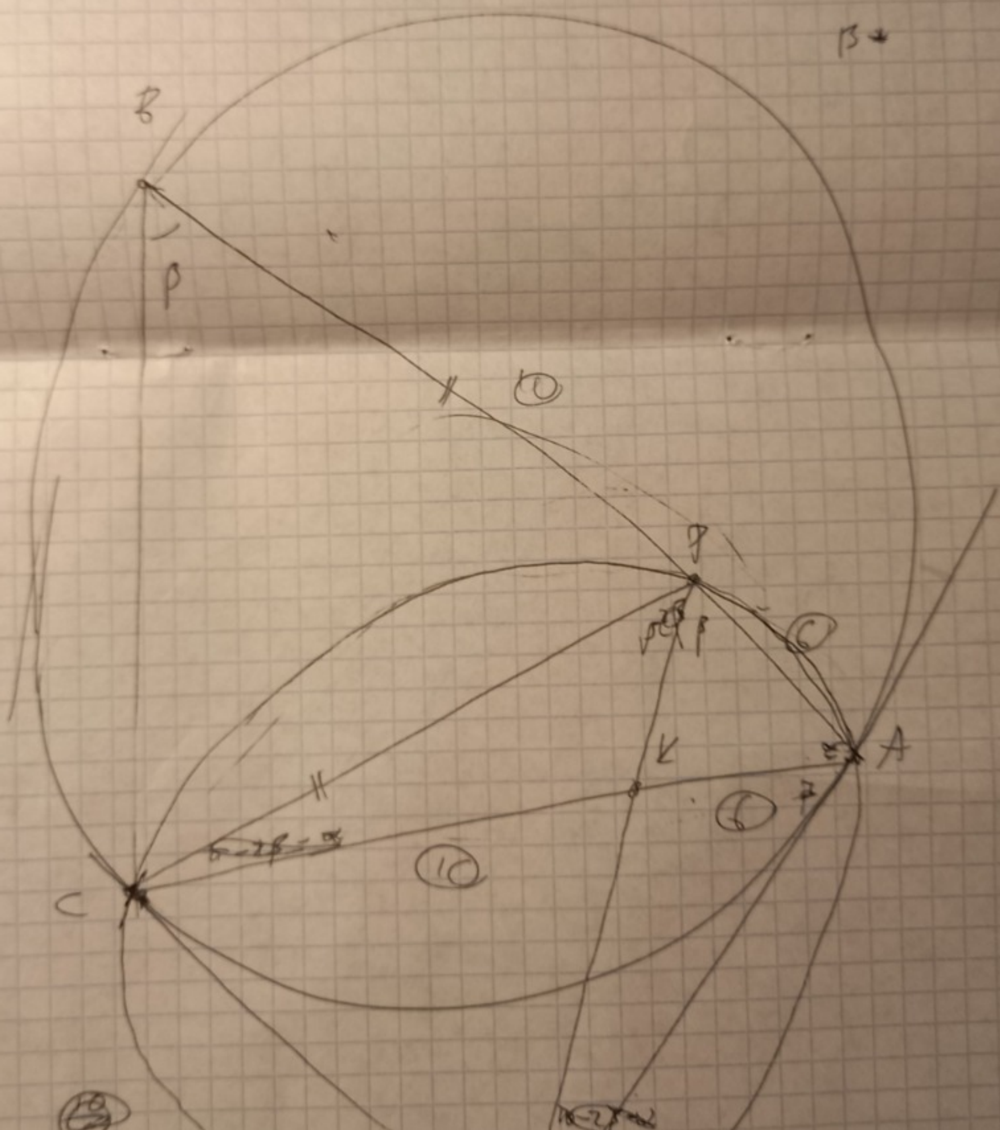
$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 1$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$x - \frac{11}{4}$







$$\left(\frac{16}{6}\right)^2 \cdot 6 = \frac{16^2}{6} = \frac{256}{6} = \frac{128}{3}$$

$8x - 4 = 16x^2 +$

$16x^2 + 117x$

$x_{1,2}$