Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102026**

ID профиля: **858072**

Вариант 19

Вариант 19 Чистовик. Лист 1/~~8~~6

№1

$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ - возрастающая арифметическая прогрессия.

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$

d - разность прогрессии

$S_{14} = (2a_1 + 13d) \cdot 7 = 14a_1 + 91.$

$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S + 12. \ (2) \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 47 \ (3) \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > S + 12 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < S + 47. \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 - S - 12 > 0. \\ -(a_1^2 + 24a_1d + 140d^2) + S + 47 > 0. \end{cases}$

$\begin{cases} -12d^2 + 35 > 0. \ (1) \\ a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 - S - 12 > 0 \end{cases}$

(1) $12d^2 < 35$; $d^2 < \frac{35}{12}$. $d \in \left(-\sqrt{\frac{35}{12}}; \sqrt{\frac{35}{12}}\right)$

$a_1, a_2 \ldots a_n$ - целые $\Rightarrow d$ - целое.

a_1, a_2, a_3 - возрастающая прогрессия $\Rightarrow d > 0.$

$d \in \left(0; \sqrt{\frac{35}{12}}\right), d \in \mathbb{Z}.$ $\sqrt{\frac{35}{12}} = \sqrt{2\frac{11}{12}} \approx 1,7.$

$d \in (0; 1,7), d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1.$

Подставим полученное d в (2) и (3)

(2) $a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12.$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5.$

(3) $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47.$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$a_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 8}}{2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -5 \pm \sqrt{13}.$

$a \in \left(-5 - \sqrt{13}; -5 + \sqrt{13}\right)$

21102026 (U858072 M1304520)

$3 < \sqrt{13} < 4$

$-9 < -5-\sqrt{13} < -8$

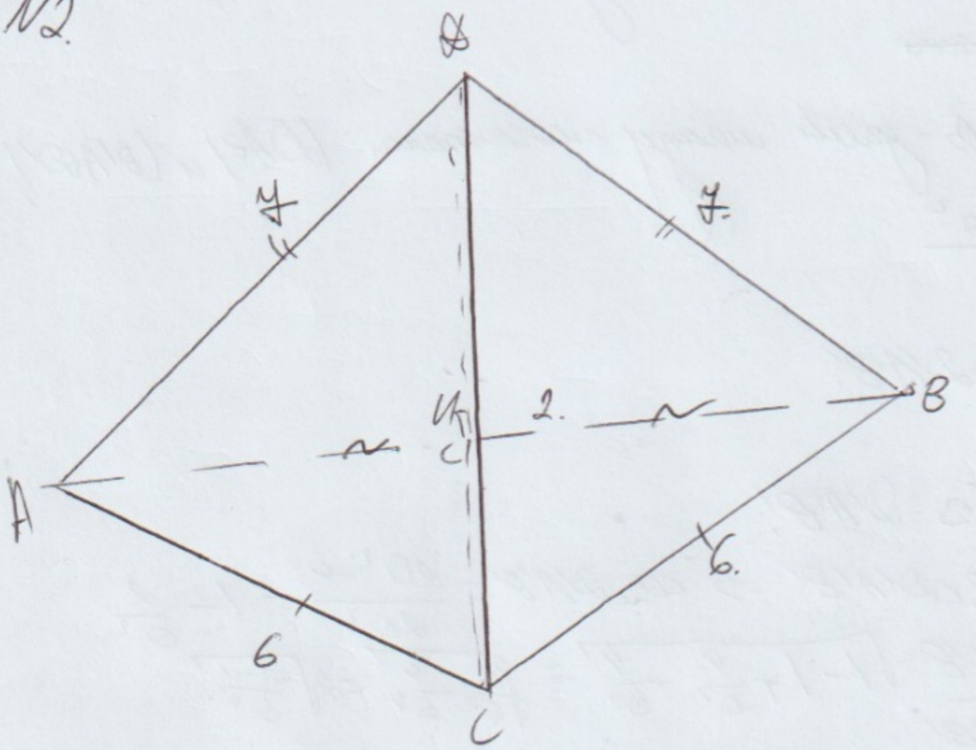
$-2 < -5+\sqrt{13} < -1$

$a_1 \in Z,\ a_1 \in (-5-\sqrt{13}; -5+\sqrt{13}) \Rightarrow a_1 = \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$

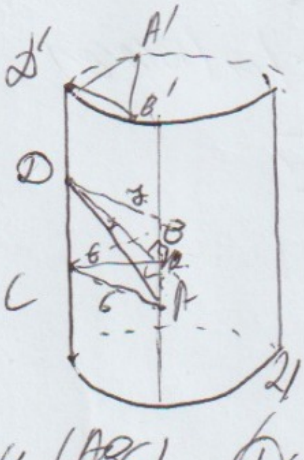
$\begin{cases} a_1 = \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\} \\ a_1 \neq -5 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \{-8; -7; -6; \cancel{-5}; -4; -3; -2\}$

Ответ: $a_1 = \{-8; -7; -6; -4; -3; -2\}$

№2.



CD — неизвестная сторона.



1) Значение углов ∠~~Ak~~ в △ADB и △ABC постоянны, поэтому ~~рао~~ изменение радиуса зависит только от стороны $\boxed{CD}$

~~Радиус цилиндра будем искать~~

2) Пусть α — угол между плоскостью (ADB) и (ABC). $DH \perp (AB)$, $CH_1 \perp (AB)$. △ABC и △ADB р/б ⇒ H совпадает с H_1. ⇒ $\angle((ADB);(ABC)) = \angle DHC$.

3) По Th Пифагора в △ACH: $CH = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$.
По Th Пифагора в △ADH: $DH = \sqrt{49-1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

4). △ADB и △ACB проецируются на плоскость верхнего основания цилиндра в один $\triangle A'D'B'$, при чём $A'B' = 2$.

5) Тогда действуя из Th синусов в $\triangle A'D'B'$.

$\frac{A'B'}{\sin\angle A'D'B'} = 2R$. $\frac{2}{\sin\angle A'D'B'} = 2R \Rightarrow R = \frac{1}{\sin\angle A'D'B'}$

Чистовик лист 4/6

$\Rightarrow R$ принимает min значение, когда $\sin\angle B'D'B'$ максимален.

~~$\Rightarrow \angle A'D'B'$, - максимальн~~

6) $S_{DAB} = \dfrac{S_{D'A'B'}}{\cos\beta}$, β - угол между плоскостями (DAB) и $(B'A'D')$

$\frac{1}{2} 4\sqrt{3} \cdot 2 = \dfrac{\frac{1}{2}\sin\angle D'A'B' \cdot a^2}{\cos\beta}$

$8\sqrt{3}\cos\beta = a^2 \sin\angle D'A'B'$

7) По Тh косинусов в $\triangle D'A'B'$:

$4 = 2a^2 - 2a^2\cos\angle D'A'B' \Rightarrow \cos\angle D'A'B' = \dfrac{2a^2-4}{2a^2} = 1 - \dfrac{2}{a^2}$

~~$\sin\angle D'A'$~~ $\sin\angle D'A'B' = \sqrt{1 - 1 + \frac{4}{a^2} - \frac{4}{a^4}} = \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{4}{a^4}} = 2\sqrt{\frac{a^2-1}{a^4}}$

~~$a^2 = \dfrac{2}{1-\cos\angle D'A'B'}$~~

8) из (6) и (7) $\Rightarrow 8\sqrt{3}\cos\beta = \sqrt{4a^2-4} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{\sqrt{4a^2-4}}{8\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{4\sqrt{3}}$

9) $S_{ABC} = \dfrac{S_{D'A'B'}}{\cos\gamma}$, γ - угол между плоскостями (ABC) и $(D'A'B')$

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{35}\cdot 2 = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4a^2-4}}{\cos\gamma} \Rightarrow \cos\gamma = \dfrac{\sqrt{4a^2-4}}{2\sqrt{35}} = \dfrac{\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{35}}$

10) $\sin\angle D'A'B'$ - max $\Rightarrow \dfrac{a^2-1}{a^4}$ - max, $\le \frac{1}{4}$

~~$a^2 - 1 - a^4 \le 0$, $a^4 - a^2 + 1 \ge 0$~~

~~$a^2 = t$, $t \ge 0$. $t^2 - t + 1 \ge 0$ $t_0 = \frac{1}{2}$ $y_0 = \frac{3}{4}$ $t \in R$.~~

$4a^2 - 4 \le a^4$ $\quad a^4 - 4a^2 + 4 \ge 0$ $\quad (a^2-2)^2 \ge 0$ $\quad a \in R$

sin max $\Rightarrow a = \sqrt{2}$.

11) $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2-1}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{4\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{2-1}}{\sqrt{35}} = \dfrac{1}{\sqrt{35}}$.

12) $CD = DH \cdot \sin\beta - CH \cdot \sin\gamma = 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{47}{48}} - \sqrt{\frac{34}{35}}\cdot\sqrt{35} =$

$= \sqrt{47} - \sqrt{34}$

или $CD = DH \sin\beta + CH \sin\gamma = \sqrt{47} + \sqrt{34}$.

Ответ: $\sqrt{47} \pm \sqrt{34}$

21102026 (U858072 M1304520)

Чистовик лист $\frac{5}{36}$

№3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b; 25) \end{cases}$

~~(1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$ – окружность с центром $(a;b)$ и радиусом 5.~~

~~(2) $a^2+b^2 \le 25$ –~~

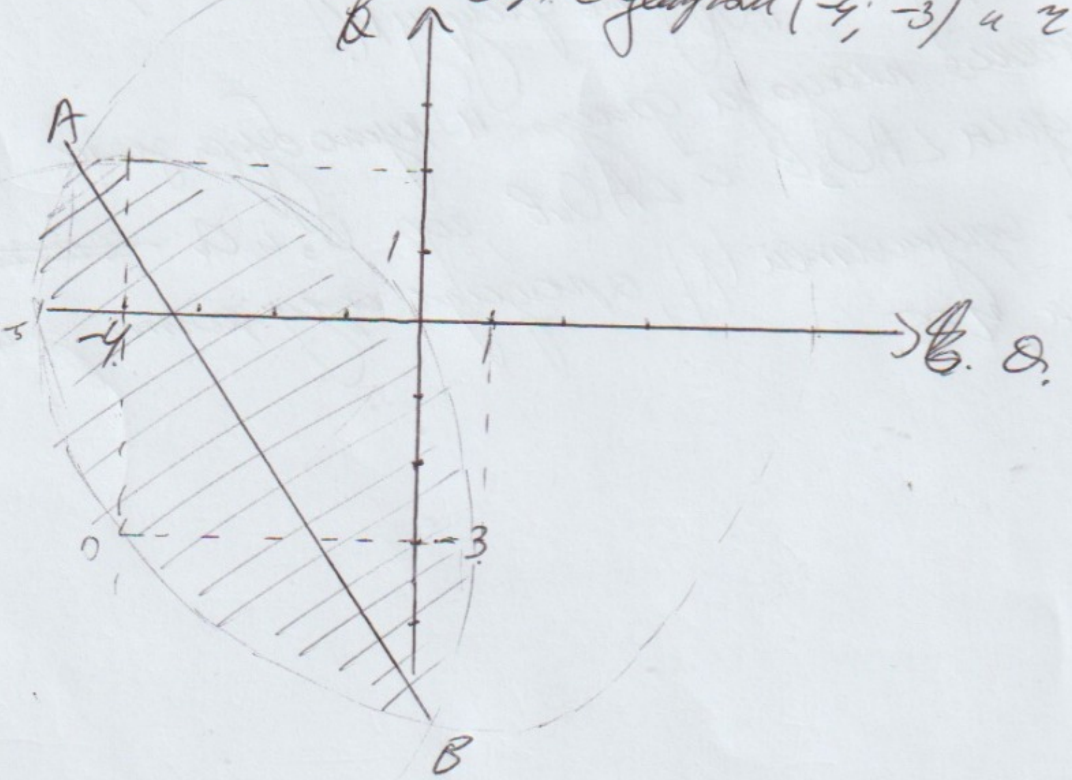
(1) $(a-x)^2+(b-y)^2 \le 25$ – окружность с центром $(a=x; b=y)$ и радиусом 5.

(2) $a^2+b^2 \le 25$ – окружность с центром $(0;0)$ и радиусом 5.

(3) $a^2+b^2 \le -8a-6b$.

$(a^2+8a+16)+(b^2+6b+9) \le 25$.

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$ – окр. с центром $(-4;-3)$ и $r=5$.



21102026 (U858072 M1304520)

Найдём т.П. окружностей.

$a^2+b^2 = a^2+8a+16+b^2+6b+9$

$8a+6b = -25$

$a^2 = 25-b^2$

$a = \pm\sqrt{25-b^2}$

$25-b^2+8\sqrt{25-b^2}+16+b^2+6b+9 = 25$

$8\sqrt{25-b^2} = -b^2-6b-25$

$(x;y)$ – т., центры окружности (1), такие что окружность 1. будет иметь хотя бы одну общую точку с заштрихованной областью на графике.

Полученные точки $(x;y)$ будут составлять две окружности (от двух окружностей (*)), то есть фигуру М.

Для получения площади фигуры М нужно будет знать только углы $\angle AO_3B$ и $\angle AO_4B$, где O_3 и O_4 – ~~[illegible]~~ центры окружностей (*), а радиус окружностей уже известен, $r=5$.

19 бр

Черновик

$$\begin{array}{r} 13 \\ +\ 7 \\ \hline 91 \end{array}$$

1. $a_1, a_2 \ldots a_{14}$.

$a_9 \cdot a_{17} > S + 12$.

$a_{11} \cdot a_{15} < S + 47$.

$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

$\frac{a_1 + a_1 + d \cdot (n-1)}{2} \cdot n$.

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > S + 12$.

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) \cancel{>} < S + 47$.

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > S + 12 \\ a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < S + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1^2 - 24a_1d - 140d^2 + S + 47 > 0 \\ a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 - S - 12 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -120d^2 + S + 47 > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 - S - 12 > 0 \end{cases}$$

(1) $120d^2 < S + 47$. $d^2 < \frac{S + 47}{120}$ $d \in \left(-\sqrt{\frac{S+47}{120}}; \sqrt{\frac{S+47}{120}}\right)$

$S = \cancel{2a_1 + 13d} \cdot \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = \cancel{2a} \; 14a_1 + 91d$.

$\cancel{d \in}\; d^2 < \frac{14a_1 + 91d + 47}{120}$.

$$\begin{cases} -12d^2 + 35 > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 - S - 12 > 0 \end{cases}$$

(1) $d^2 < \frac{35}{12}$. $d \in \left(-\sqrt{\frac{35}{12}}; \sqrt{\frac{35}{12}}\right)$

a - целые $\Rightarrow d$ - целое. $\sqrt{\frac{35}{12}} = \sqrt{2\frac{11}{12}} \approx 1,6$

d - целое $\Rightarrow d = 1$.

$S = (2a_1 + 13) \cdot 7 = 14a_1 + 91$.

$(a_1 + 8)(a_1 + 16) > 14a_1 + 91$.

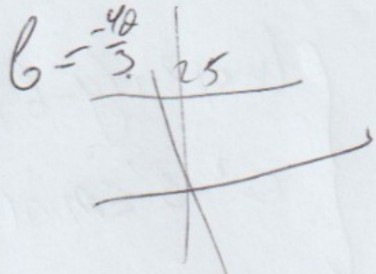
$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91$.

$a_1^2 + 10a_1 + 37 > 0$

$a_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 148}}{2}$ $D < 0 \Rightarrow a \in R$.

21102026 (U858072 M1304520)

② Черновик

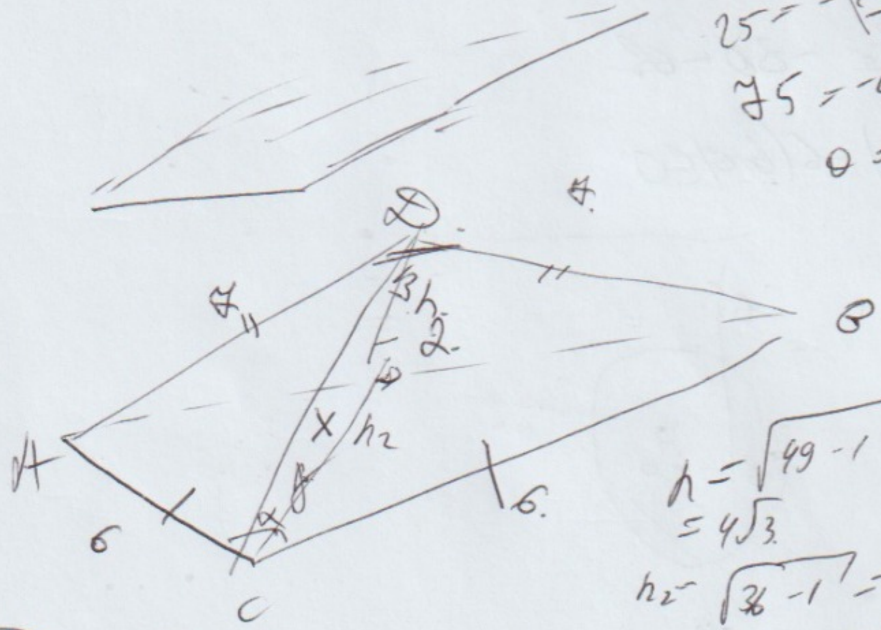


$25 = -\frac{4a}{3}$

$75 = -4a$

$a = -\frac{75}{4}$

$b = \frac{25-80}{6}$



$h = \sqrt{49-1} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

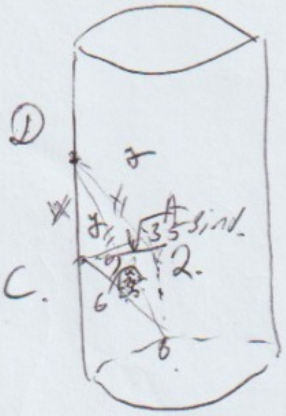
$h_2 = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$

~~$tg\,\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$~~

Т.к. cos:

$x^2 = 48 + 35 - 8\sqrt{105}\cdot\cos\gamma$

$\cos\gamma = \frac{83 - x^2}{8\sqrt{105}}$



Т.к. cos.

$4 = 72 - 72\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{68}{72} = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}$

$\cos\beta = \frac{94}{98} = \frac{47}{49}$

~~$\sqrt{35}\sin\alpha$~~ $\sqrt{35\sin^2\alpha + 1}$

$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{35}\sin\alpha\cdot 2}{\frac{1}{2}\left(2\sqrt{35\sin^2\alpha+1}+2\right)}$

$R = \frac{abc}{4S}$

$R = \frac{1}{\sin\beta}$

$\frac{2}{\sin\beta} = 2R \quad \sin\beta$

$S_{DBA} = \frac{1}{2}4\sqrt{3}\cdot 2 = 4\sqrt{3}$

$S_\alpha = \frac{S_{пр}}{\cos\varphi}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102026**

ID профиля: **858072**

Вариант 19

№4 чистовик лист 4/5

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=21 & (1) \\ НОК(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

(1). $a, b, c \ \vdots\ 21.$

Пусть: $a=21\cdot n,\ n\in N.$
$b=21\cdot m,\ m\in N.$
$c=21\cdot p,\ p\in N$

Так как 21 - НОД $\Rightarrow$ НОД$(m,n,p)=1$

(2) НОК$(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15}=21\cdot 3^{16}\cdot 7^{14}$

НОК$(n,m,p)=3^{16}\cdot 7^{14}=21^{14}\cdot 9$

№5. $\underbrace{\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}_{a};\ \underbrace{\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)}_{b};\ \underbrace{\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)}_{c}$

1. $x>\frac{11}{4}$; $x\neq\frac{15}{4}$; ~~$x\neq 2$~~; $x\neq 4$; $x>2$; $x\neq\frac{5}{2}$; $x>\frac{1}{2}$

2. $a=\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $b=2\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)$; $c=\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

3. ~~П $a=c$~~ $m=\frac{x}{2}-1$; $n=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$; $k=x-\frac{11}{4}$

$a=\frac{1}{2}\log_m n$; $b=2\log_k m$; $c=\log_n k$

$a=\frac{1}{2}\log_m n=\log_{m^2} n.$

$b=\log_k m^2$

Пусть $m^2=l$

~~$\log_l n = \log_k$~~ $=\log_k$

21102026 (U858072 M1304521)

чистовик лист 5/5

log $a = \log_{m^2} n = \frac{\log_k n}{\log_k m^2} = \cancel{\log} \frac{1}{\log_n k \cdot \log_k m^2} = \frac{1}{bc}$

аналогично: $b = \frac{1}{ac}$; $c = \frac{1}{ab}$

$$\mathrm{I}\begin{cases} \frac{1}{bc} = \frac{1}{ac} \\ \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} = 1 \end{cases}$$

$\frac{c-b}{a^2bc} = 1$, $c - b = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2bc} = 1 \Rightarrow a^2bc = 1$

аналогично: $\mathrm{II}\ ab^2c = 1$, $\mathrm{III}\ abc^2 = 1$

Черновик

№1. $\begin{cases} НОД(a,b,c)=21 \\ НОК(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$

НОД $a,b,c=21 \Rightarrow$ $a=21\cdot n,\ n\in N$

$b=21\cdot m,\ m\in N$

$c=21\cdot p,\ p\in N$

НОК $a,b,c=3^{17}\cdot 7^{15}=21\cdot(3^{16}\cdot 7^{14})$

~~21.~~ $l=3^{16}\cdot 7^{14}$

$$\overset{a}{\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)},\ \overset{b}{\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)},\ \overset{c}{\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2}$$

№2.

1. $a=c$, $b=a+1$

$$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

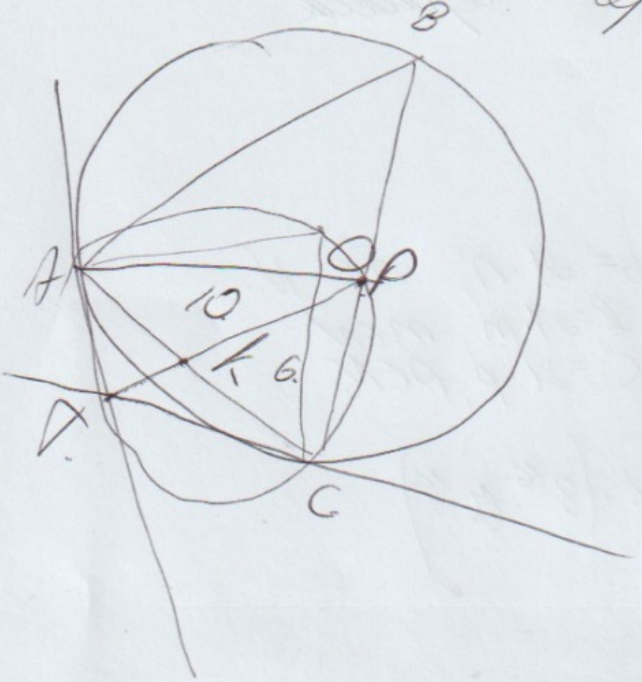
$\frac{x}{2}>\frac{1}{4}$ $\quad x>\frac{1}{2}$ $\quad x\neq 2$, $\quad x\neq\frac{5}{2}$

$$2\log_{|\frac{x}{2}-1|}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left|x-\frac{11}{4}\right|$$

$$\frac{}{\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left|\frac{x}{2}-1\right|}=\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left|x-\frac{11}{4}\right|$$

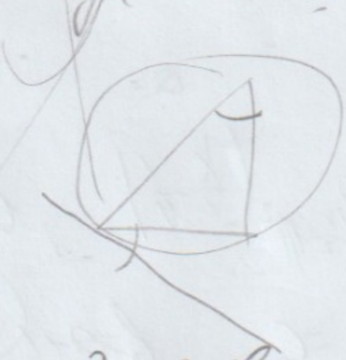
21102026 (U858072 M1304521)

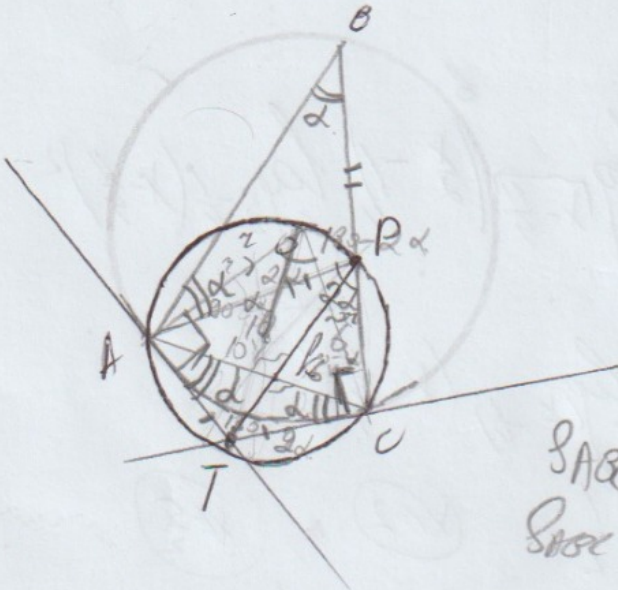
Черновик



S_{ABC}

$\angle ABC = \operatorname{arctg} 3/2$ $AC=1$





$CT^2 = CP \cdot CB$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin\alpha \, AB \cdot BC$

$S_{ABC} = pr$

$\angle BCA + \alpha = \angle PCT.$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$ $\frac{96}{5}$

$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos} = 32$ 3

$\cos$ $\frac{160}{3} \cdot \frac{9}{25}$ 5

$\cos = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2}}$

$160 \times 5 = 800$ $96 \times 3 = 288$

$\sin = \sqrt{1 - \frac{1}{1+tg^2}} = \frac{tg}{\sqrt{1+tg^2}}$

192×3: 576, $+1088$, 1664

21102026 (U858072 M1304521)

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{1+tg^2\alpha} - 1 = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$ Черновик

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

~~$\sin 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$~~

НОД (a, b, c

$3^{16} \cdot 7^{14}$.

$m = \frac{x}{2} - 1$

$n = \frac{x}{2} - \frac{1}{9}$

~~$a = \frac{1}{2}$~~ $k = x - \frac{11}{9}$

$\frac{1}{2}\log_m n$; $2\log_k m$; $\log_n k$

$\log_n n = 4\log_k m$

~~$\log \frac{1}{\log_n m} = 4\log_k m$~~

~~$\log_a b =$~~

~~НОК $= \frac{21^{15} \cdot 9}{21^{15}}$~~

НОД $= 21$

21

21

~~$21 \cdot 9$~~

21.

$\log_a b = c$

$a^c = b$.

m

$\log_k l = \frac{\log_l l}{\log_l k}$

$\frac{1}{\log_n m} = 2\log_n k$

$\log_l n = \frac{\log_k n}{\log_k l} = \log_k l$

$\log_k^2 l = \log_k n$.

$1 - 2\log_n k \cdot \log_n m = 0$

$\log_n k \cdot \log_n m = \frac{1}{2}$

$\frac{\log_c a}{\log_c a}$

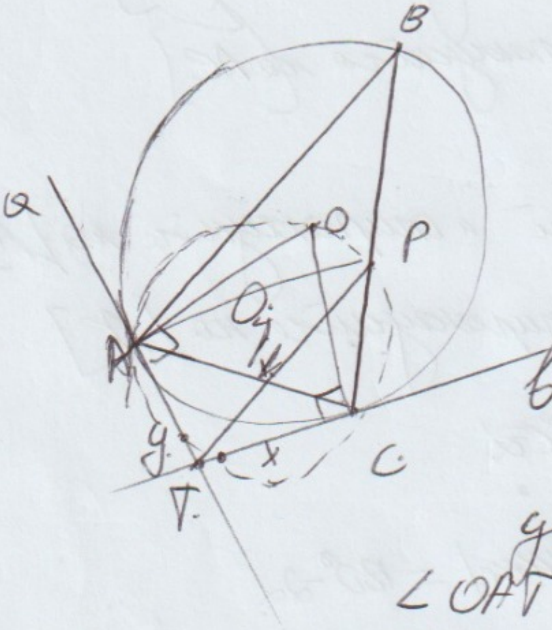
$\log_{m^2} n = \log_k m^2$

$\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_a b = \log_c a$

21102026 (U858072 M1304521)

№6. а) $S_{\triangle ABC}$ - ?; б) $\angle ABC = 8ctg2$. AC - ?



1) Пусть прямая a – кас к ω из т. A, прямая b – кас к ω из т. C.

2) Пусть вторая окр – ω_2

3) $\omega_2 \cap a = y$

4) $\omega_2 \cap b = x$

5) $\angle OCT = 90°$ (т.к. b-кас к ω, O-центр ~~ω~~ ω).
$\angle OAT = 90°$ (т.к. a-кас к ω, O-центр ω)

6) $\angle OCX$ вписан в ω_2 и $\angle OCX = 90° \Rightarrow [OX]$ – диаметр, (OX) проходит через O_2 (центр ω_2)

7) $\angle OAY$ вписан в ω_2 и $\angle OAY = 90° \Rightarrow [OY]$ – диаметр, (OY) проходит через O_2

8) из (6) и (7) $\Rightarrow$ ~~OO~~ (OY) и (OX) проходят через $O_2 \Rightarrow$ (OY) и (OX) ~~пр~~ содержат $(OO_2) \Rightarrow (OY)$ совпадает с $(OX) \Rightarrow$ $X = Y = T$ (совпадение двух точек по $\cap$-ям прямых возможно только в т пересечения) $\Rightarrow T \in \omega_2$

9) По свойству отрезков касательных $\Rightarrow AT = TC$

10) $\angle APT$ вписан в ω_2 и $\angle TPC$ вписан в ω_2 ~~⇒~~; $\angle APT$ опирается на AT; $\angle TPC$ опирается на TC; $AT = TC \Rightarrow \angle APT = \angle TPC \Rightarrow$ PT – биссектриса $\angle APC$.

11). $S\ APK = 10$; $S\ CPK = 6$.
$\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту из вершины $P \Rightarrow$
$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle KPC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{10}{6}$.

11) По свойству биссектрис в $\triangle APC$: $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{10}{6}$

21102026 (U858072 M1304521)

чистовик лист 2/6

12). $\angle AOC$ - вписанный в ω_2 и опирающийся на $[AC]$
$\angle APC$ - вписанный в ω_2 и опирающийся на $[AC]$
$\Rightarrow \angle AOC = \angle APC = 2\alpha$.

13) в ω $\angle AOC$ - центральный и опирающийся на $[AC]$
$\angle ABC$ - вписанный в ω и опирающийся на $[AC]$
$\Rightarrow \angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = \alpha$

14) $\angle APB = 180° - \angle APC$ (как смежные) $= 180° - 2\alpha$.

15). По сумме углов в $\triangle APB$: $\angle BAP = 180° - \alpha - 180° + 2\alpha = \alpha = \angle ABC \Rightarrow \triangle ABP$ - р/б $\Rightarrow BP = AP$

16) из (12) и (15) $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PC} = \frac{10}{6} \Rightarrow BP = \frac{10}{6}PC = \frac{5}{3}PC$

17) $\triangle BAC$ и $\triangle PAC$ имеют общую высоту из вершины $A \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle PAC}} = \frac{BC}{PC} = \frac{BP+PC}{PC} = \frac{\frac{5}{3}PC+PC}{PC} = \frac{8}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{\triangle BAC} = \cancel{8}\,\frac{8}{3}S_{\triangle PAC} = \frac{8}{3}(S_{\triangle APK} + S_{\triangle CPK}) = \frac{8}{3}\cdot 16 = \frac{128}{3}$$

б). 1) $\angle APB = 180° - 2\angle ABC = 180° - 2\operatorname{arctg} 2$ (по сумме углов в $\triangle ABP$)

2). $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BAC} - S_{\triangle APC} = \frac{128}{3} - 16 = \frac{80}{3}$

3). $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}\cdot BP\cdot AP\cdot \sin\angle APB$. т.к. $BP = AP \Rightarrow$
$$\Rightarrow S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}\cdot AP^2\cdot \sin(180° - 2\operatorname{arctg} 2)$$
$$AP^2 = \frac{2\cdot S_{\triangle ABP}}{\sin(2\operatorname{arctg} 2)} = \frac{160}{3\sin(2\operatorname{arctg} 2)} \Rightarrow AP = \sqrt{\frac{160}{3\sin(2\operatorname{arctg} 2)}} = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3\sin(2\operatorname{arctg} 2)}}$$

4). из (12) $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{10}{6} \Rightarrow PC = \frac{6AP}{10} = \frac{3AP}{5} = \frac{12\sqrt{10}}{5\sqrt{3\sin(2\operatorname{arctg} 2)}}$

5). $\angle APC = 180° - \angle APB$ (как смежные) $= 2\operatorname{arctg} 2$.

6). по Тh косинусов в $\triangle APC$:
$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP\cdot PC\cdot \cos\angle APC = \frac{160}{3\sin(2\operatorname{arctg} 2)} + \frac{96}{5\sin(2\operatorname{arctg} 2)} - 2AP\cdot PC\cdot \cos\angle APC$$

21102026 (U858072 M1304521)

$$AC^2=\frac{160\cdot5+96\cdot3}{15\sin(2\operatorname{arctg}2)}-2\cdot\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3\sin(2\operatorname{arctg}2)}}\cdot\frac{12\sqrt{10}}{5\sqrt{3\sin(2\operatorname{arctg}2)}}\cos(2\operatorname{arctg}2)=$$

$$=\frac{800+288}{15\sin(2\operatorname{arctg}2)}-\frac{960}{15\sin(2\operatorname{arctg}2)}\cdot\cos(2\operatorname{arctg}2)=$$

$$=\frac{1088-960\cos(2\operatorname{arctg}2)}{15\sin(2\operatorname{arctg}2)}$$

7) $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{2}{1+tg^2\alpha}-1=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}=2\sqrt{\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

8) $$AC^2=\frac{1088-960\cdot\frac{1-tg^2(\operatorname{arctg}2)}{1+tg^2(\operatorname{arctg}2)}}{15\cdot\frac{2tg(\operatorname{arctg}2)}{1+tg^2(\operatorname{arctg}2)}}=\frac{1088-960\cdot\frac{1-4}{1+4}}{15\cdot\frac{4}{1+4}}=$$

$$=\frac{1088+192\cdot3}{12}=\frac{1088+576}{12}=\frac{1664}{12}=\frac{832}{6}=\frac{416}{3}$$

$$AC=\sqrt{\frac{416}{3}}=\frac{2\sqrt{104}}{3}=\frac{4\sqrt{26}}{3}$$

Ответ: а) $\frac{128}{3}$; б) $\frac{4\sqrt{26}}{3}$

21102026 (U858072 M1304521)

чистовик лист 2/$\cancel{6}$ 5

12). $\angle AOC$ - вписанный в ω_2 и опирающийся на $[AC]$
$\angle APC$ - вписанный в ω_2 и опирающийся на $[AC]$
$\Rightarrow \angle AOC = \angle APC = 2\alpha$.

13) в ω $\angle AOC$ - центральный и опирающийся на $[AC]$
, $\angle ABC$ - вписанный в ω и опирающийся на $[AC]$

$\Rightarrow \angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = \alpha$

14) $\angle APB = 180^\circ - \angle APC$ (как смежные) $= 180^\circ - 2\alpha$.

15). по сумме углов в $\triangle APB$: $\angle BAP = 180^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha = \alpha =$
$= \angle ABC \Rightarrow \triangle ABP$ - р/б $\Rightarrow BP = AP$

16) из (12) и (15) $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PC} = \frac{10}{6} \Rightarrow BP = \frac{10}{6}PC = \frac{5}{3}PC$

17) $\triangle BAC$ и $\triangle PAC$ имеют общую высоту из вершины $A \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle PAC}} = \frac{BC}{PC} = \frac{BP+PC}{PC} = \frac{\frac{5}{3}PC + PC}{PC} = \frac{8}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle BAC} = \cancel{8}\ \frac{8}{3} S_{\triangle PAC} = \frac{8}{3}(S_{\triangle APK} + S_{\triangle CPK}) = \frac{8}{3} \cdot 16 = \frac{128}{3}$

б). 1) $\angle APB = 180^\circ - 2\angle ABC = 180^\circ - 2\operatorname{arctg} 2$ (по сумме углов в $\triangle ABP$)

2). $S_{\triangle ABP} = S_{\triangle BAC} - S_{\triangle APC} = \frac{128}{3} - 16 = \frac{80}{3}$

3). $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot AP \cdot \sin\angle APB$. т.к. $BP = AP \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot AP^2 \cdot \sin(180^\circ - 2\operatorname{arctg} 2)$
$AP^2 = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABP}}{\sin(2\operatorname{arctg} 2)} = \frac{160}{3\sin(2\operatorname{arctg} 2)} \Rightarrow AP = \sqrt{\frac{160}{3\sin(2\operatorname{arctg}2)}} = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3\sin(2\operatorname{arctg}2)}}$

4). из (12) $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{10}{6} \Rightarrow PC = \frac{6AP}{10} = \frac{3AP}{5} = \frac{12\sqrt{10}}{5\sqrt{3\sin(2\operatorname{arctg}2)}}$

5). $\angle APC = 180^\circ - \angle APB$ (как смежные) $= 2\operatorname{arctg} 2$.

6). по Тh косинусов в $\triangle APC$:
$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos\angle APC = \frac{160}{3\sin(2\operatorname{arctg}2)} + \frac{96}{5\sin(2\operatorname{arctg}2)} - 2AP \cdot PC \cdot \cos\angle APC$

21102026 (U858072 M1304521)