Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102001**

ID профиля: **352099**

Вариант 19

Вариант 19 Чистовик Лист 1

Часть 1.

Задача № 1.

Так как арифметическая прогрессия состоит из целых чисел и возрастающая, то разность ~~ар~~ ~~арифмети~~ прогрессии $d \in N$ $(d > 0;\ d = 1, 2, 3$

$$S = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 14a_1 + 91d$$

$$a_{11} \cdot a_{15} = (a_9 + 2d)(a_{17} - 2d) = a_9 \cdot a_{17} + 2d(a_{17} - a_9) - 4d^2 =$$
$$= a_9 \cdot a_{17} + 16d^2 - 4d^2 = a_9 \cdot a_{17} + 12d^2$$

Тогда $S + 12 + 12d^2 < a_{11} \cdot a_{15} < S + 47$

т.е. $S + 12 + 12d^2 < S + 47$

$12d^2 < 35$

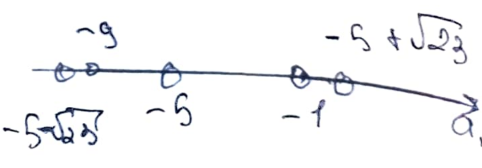
т.к. $d \in N$, то нам подходит только $d = 1$

$$\begin{cases} (a_1+8)(a_1+16) > 14a_1 + 103 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 138 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 138 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 + 5 + \sqrt{23})(a_1 + 5 - \sqrt{23}) < 0 \end{cases}$$



Продолжение на листе 2

Чистовик Лист 2

Продолжение задачи №1.

$a_1^2+10a_1+2=0$

$\frac{D}{4}=25-2=23$

$a_{1,2}=-5\pm\sqrt{23}$

$a_1 \in \left([-9;-1]\setminus\{-5\}\right)\cap \mathbb{Z}$

Ответ: $a_1 = -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$

Чистовик Лист № 3

Задача № 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$$

$C(a,b)$; $R=5$

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le -8a-6b \\ -8a-6b \le 25 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ -8a-6b \ge 25 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \\ 8a+6b+25 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ 8a+6b+25 \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\omega_1: (a+4)^2+(b+3)^2=25$ $\qquad$ $\omega_2: a^2+b^2=25$

$O_1(-4;-3)$ $\quad$ $l: 8a+6b+25=0$ $\qquad$ $O_2(0;0)$

$R_1=5$ $\qquad$ $R_2=5$.

$$\rho(O_1;l) = \rho(O_2;l) = \frac{|8\cdot 0+6\cdot 0+25|}{\sqrt{6^2+8^2}} = 2{,}5.$$

$$\rho(O_1;l) = \frac{|8(-4)+6(-3)+25|}{\sqrt{6^2+8^2}} = 2{,}5$$

$\overline{O_1O_2} \neq (4;3)$

$\bar{c} = \left(\frac{1}{8}; -\frac{1}{6}\right)$ – направляющий вектор l

$(\bar{c}\cdot\overline{O_1O_2}) = 0 \Rightarrow l \perp \overline{O_1O_2}$

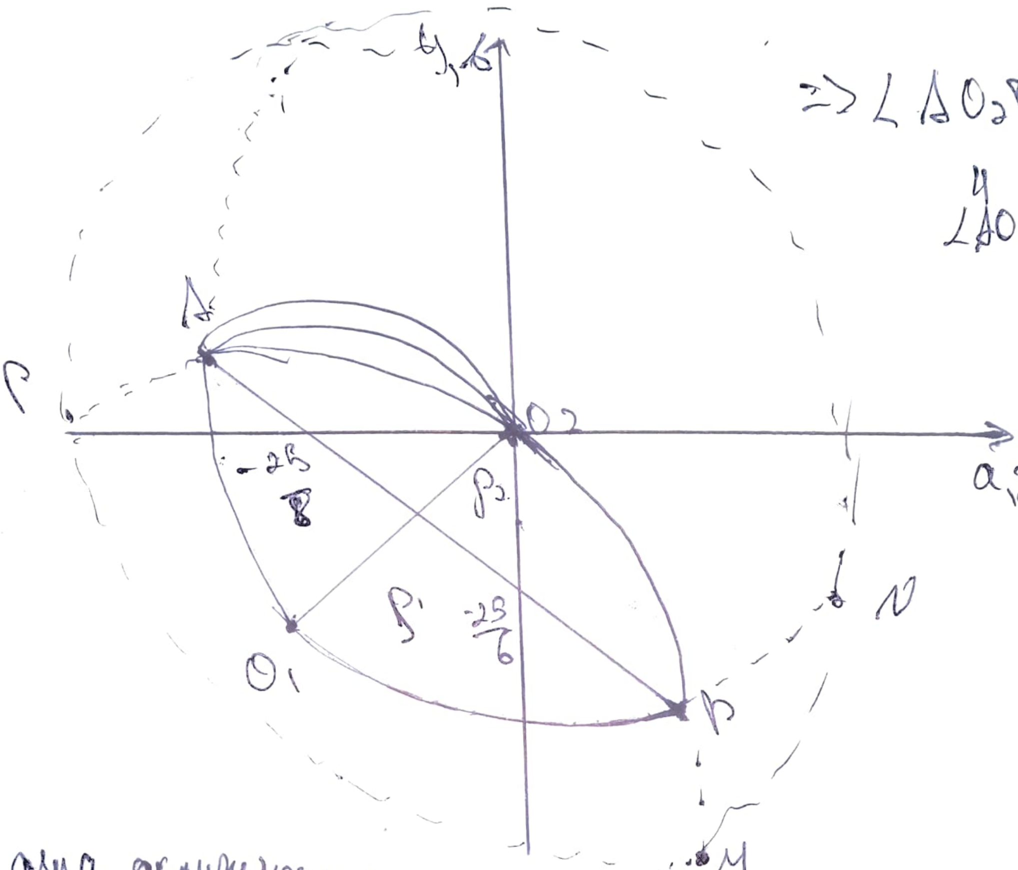
$$\begin{cases} R_1=R_2 \\ \rho_1=\rho_2 \\ l \perp O_1O_2 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 \text{ и } \omega_2 \text{ симметричны относительно } l.$$

[продолжение на листе 4

Чистовик   Лист 4

Продолжение задачи №3.

$\triangle_2$ $\angle AO_2O_1 = 60^\circ$, т.к. $\cos\angle AO_2O_1 = \frac{1}{2}$.



$\Rightarrow \angle AO_2B = 120$

$\Downarrow$

$\angle AO_1B$

PM – дуга окружности радиуса 60

MN – дуга окр $r=5$

остальные части не симметрична

$\angle MBN = 60$

— координата (a, b)

- - - - в координатах $(x; y)$

фигура = внутренность - - -

Продолжение на листе 5.

Чистовик Лист 5

сектор

$S = \frac{\alpha R^2}{2}$

$S_{ABMP} = S_{O_2PM} - S_{O_2AB}$

$S_{O_2PM} = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{3}$

$S_{BMN} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 5^2 = \frac{25\pi}{6}$

$S_{O_2AB} = \frac{1}{2} 5^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABMP} = \frac{100\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{4}$

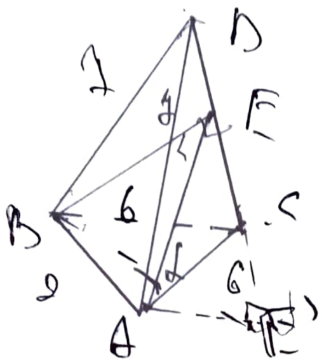
$S = 2(S_{BMN} + S_{ABMP}) = 2\left(\frac{25\pi}{6} + \frac{100\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{4}\right) =$

$= \frac{225\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{225\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$.

Чистовик.   Лист 6

Задача №2



AE – высота $\triangle ADC$

(возможно 2 случая)

Т.к. радиус цилиндра должен быть ~~все~~ минимально возможным, а $AB \perp$ оси цилиндра ($BD = DA$, $BC = CA$)

То AB – диаметр цилиндра $\Rightarrow$ радиус цилиндра равен 1 ($AB = 2$)

Рассмотрим $\triangle ADC$: Пусть $DC = x$; $AE = \sqrt{2}$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}\sqrt{2}x = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 6\sin\alpha$$

$$x = 21\sqrt{2}\sin\alpha.$$

I вариант $CD = ED + EC = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

II вариант $CD = DE - CE = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

Черновик

$S_{14} = \frac{a_1+a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(a_1+a_{14}) = 7(a_1+a_1+13d) = 7(2a_1+13d)$

$a_9 = a_1+8d$
$a_{17} = a_1+16d$
$a_{14} = a_1+13d$
$a_{11} = a_1+10d$
$a_{15} = a_1+14d$

$144-128=16$

$12+7\cdot(2a_1+13d) < 2a_1+24d$

$12+14a+91d < 2a_1+21d$

$12a+12+7ad<0$

$7\cdot(2a_1+13d)+47 > (a_1+10d)\cdot(a_1+14d)$

$14a_1+91d+47 > a_1^2+14a_1d+10a_1d+140d^2$

$14a_1+91d+47 > a_1^2+24a_1d+140d^2$

$a_1^2+24a_1d+140d^2-14a_1-91d-47<0$

$a_1^2-14a_1+49$

$(a_1-7)^2$

$64 \cdot$
$4\cdot 8\cdot 2$
56

$4\cdot 2\cdot 8$
$64d$
$37d+14a_1+12$

$(a_1+8d)(a_1+16d) > 7(2a_1+13d)+12$

$a_1^2+16a_1d+8da_1+128d^2 > 14a_1+91d+12$

$a_1^2+24a_1d+128d^2 > 14a_1+91d+12$

$(a_1+12d)^2-16d^2 > 14a_1+91d+12$

$(a_1+12d)^2 > (4d)^2+91d+14a_1+12$

$4d+$

$S_{14} \cdot a_{11}\cdot a_{15} = (a_9+2d)(a_{17}-2d) = a_9\cdot a_{17}+2d($

$(a_{17}-a_9)-4d^2 = a_9\cdot a_{17}+16d^2-4d^2 = a_9\cdot a_{17}+12d^2$

$16d-8d=8d\cdot 2d$

$S+12+12d^2 = a_{11}\cdot a_{15} < S+47$

$\cancel{S}+12+12d^2 < \cancel{S}+47$

$12d^2<35$

$d=1$

$$\begin{cases}(a_1+8)(a_1+16) > 14a_1+103 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1+138\end{cases}$$ черновик

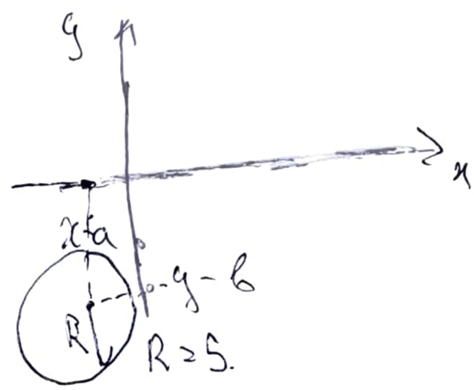
$$\begin{cases}(a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1^2+10a_1+2 < 0\end{cases}$$

~~$D = 100 - 4 \cdot 2 = 92 = 2\sqrt{} \; 46 \; 9\cdot\sqrt{23}$~~

~~$a_{1,2} =$~~

№ 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6\cdot b, 25)\end{cases}$$



$(a+4)^2 = a^2+8a+16$

$(b+3)^2 = b^2+6b+9$

$25+ \quad a^2+b^2 \le -8a-6b+5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102001**

ID профиля: **352099**

Вариант 19

Вариант 19 Чистовик Лист 1

Часть 2

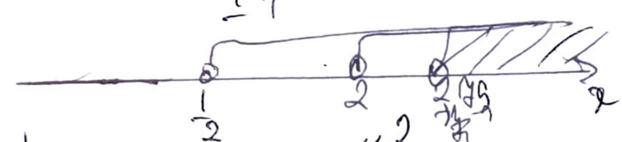
Задача №2

$$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right);\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right);\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

ОДЗ: $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$ $\qquad x-\frac{11}{4}>0$ $\qquad \frac{x}{2}-1>0$

$\ne 1$ $\qquad \ne 1$ $\qquad \ne \pm 1$

$x > 2{,}75$



$$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)=$$

$=2$

$\| 1$; т.к. ~~log~~ $\log_\alpha\beta\cdot\log_\beta\gamma=\log_\alpha\gamma$

$\begin{cases} a\cdot b\cdot c=2\\ a=b\\ c=a+1\end{cases}$ $\Leftrightarrow a^2(a+1)=2$ $\qquad a=1$

$\Leftrightarrow 1\cdot 2=2$

$\Leftrightarrow a^3+a^2-2=0$

$$\begin{array}{l|l} a^3+a^2-2 & a-1\\ \hline -(a^3-a^2) & a^2+2a+2\\ \quad 2a^2-2 & \\ -(2a^2-2a) & \\ \quad 2a-2 & \\ -(2a-2) & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$

$a^2+2a+2=0$

$D=4-4\cdot 2<0$

$\Rightarrow a=b=1 \qquad c=2$

продолжение на листе 2

Чистовик Лист 2

Продолжение задачи №2

1) $A = \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{x^2}{4}-x+1=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}+\frac{5}{4}=0 \quad |\cdot 4$

$x^2-6x+5=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \text{ — не подходит под О.Д.З.} \\ x=5 \end{array}\right.$

$x=5$

$B = \log_{\sqrt{5-\frac{11}{4}}}\left(\frac{5}{2}-1\right)=1$

$B = \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{9}{4}\right)^2=2$

Б: $B = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1$

$\sqrt{x-\frac{11}{4}}=\frac{x}{2}-1$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1$

$x^2-8x+15=0$

$(x-3)(x-5)=0$

$x=5$ — проверим.

Продолжение на листе 3

Чистовик лист 3.

Продолжение задачи №2.

$x = \cancel{\frac{7}{8}}\ 3$

$A = \log_{\frac{1}{4}} \frac{5}{4} \neq \left[\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$

б) $F = \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}} \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 = 1$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2$

$x^2 - 6x + \frac{125}{16} = 0$

$x = \cancel{\frac{7}{8}}\ 3 \pm \sqrt{9 - \frac{125}{16}} = 3 \pm \frac{\sqrt{19}}{4}$

$\sqrt{19} > 4$ $\qquad \frac{\sqrt{19}}{4} > 1$

$x = 3 - \frac{\sqrt{19}}{4} < 2$

не подходит под ОДЗ

т.к. $x > \frac{11}{4}$

$x = 3 + \frac{\sqrt{19}}{4}$.

$A = \log_{\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{8} - 1\right)^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{8} - \frac{1}{4}\right) = \log_{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{8}\right)^2} \left(\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{19}}{8}\right)$

$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{19}}{8}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{19}{64} + \frac{\sqrt{19}}{8} = \frac{35}{64} + \frac{\sqrt{19}}{8}$

$\Rightarrow A \neq 1$ или 2

Ответ: $\underline{x = 5}$

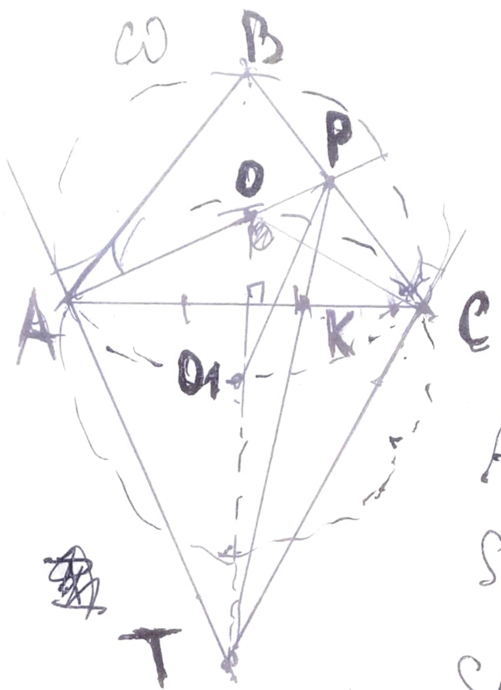
Чистовик

Лист 4

Задача № 6.

$S_{\triangle APK}=10$
$S_{\triangle CPK}=6$

1)



O – центр ω

O_1 – центр окружности, описанной $\triangle AOC$

$AT \parallel PC \Rightarrow APCT$ – трапеция

$S_{\triangle APK}=S_{\triangle TKC}=10$

$$\frac{S_{\triangle AKT}}{S_{\triangle KPC}}=\left(\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}}\right)^2=\left(\frac{AK}{KC}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$S_{\triangle AKT}=6\cdot\frac{25}{9}=\frac{50}{3}$; $S_{\triangle ATC}=S_{\triangle TKC}+S_{\triangle AKT}=10+\frac{50}{3}=$

$=\frac{80}{3}=S_{\triangle ABC}$ (TABC – параллелограмм)

Ответ: $\frac{80}{3}$

2) $\angle ABC=\operatorname{arctg}2$ AC – ?

Чистовик Лист 5

Задача 1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 21 \\ НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

Тогда $a = 3 \cdot 7 a_1$; $b = 3 \cdot 7 b_1$; $c = 3 \cdot 7 c_1$

$$\begin{cases} НОД(a_1; b_1; c_1) = 1 \\ НОК(a_1; b_1; c_1) = 3^{16} \cdot \cancel{3^7} 7^{14} \end{cases}$$

Если два из ~~степен~~ трёх $a_1; b_1; c_1$ равны 1, то кол-во способов 3

Если только 1 из $a_1; b_1; c_1$ равен 1, то

например

$$НОК(a_1; b_1) = 3^{16} \cdot 7^{14}$$

кол-во способов

$$C_3^2 \cdot 2! \cdot 2 \cdot 17 \cdot 15$$

Ответ: $3 + C_3^2 \, 2! \, 2 \cdot 17 \cdot 15$.

Черновик.

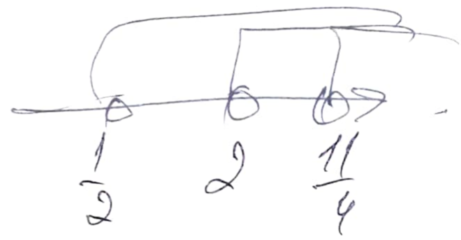
$\frac{x}{2} \geq \frac{1}{4}$

$x > \frac{2}{4} \Rightarrow x > \frac{1}{2}$

$x > \frac{11}{4}$

$\frac{x}{2} - 1 > 0$

$x > 2$



НОД $(a; b; c) = 21$

НОК $(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$.

$\frac{1}{2} \quad 2 \cdot 2 \quad \underbrace{\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \cdot \log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right) \cdot \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)}$

$\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \gamma = \log_{\alpha} \gamma \Rightarrow 1$

$= 2 \Rightarrow \begin{cases} a \cdot b \cdot c = 2 \\ a = b \\ c = a + 1. \end{cases}$

Чернетка

№1

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15}=21^{15}\cdot 9 \end{cases}$$

$\frac{x^{2}}{2}-\frac{1}{4}=\frac{2x-1}{4}=\frac{5}{4}$

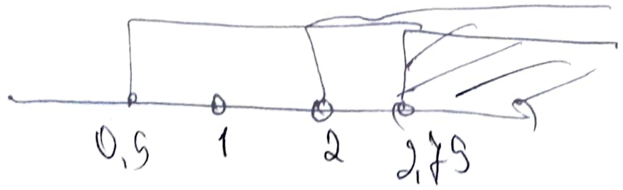
$a, b, c \;\cancel{> 3\cdot 7}$

$\frac{2x}{4}-\frac{1}{4}=\frac{6}{4}-\frac{1}{4}\approx 2$

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^{2}}\left(\frac{x^{2}}{2}-\frac{1}{4}\right);\quad \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right);\quad \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^{2}$$

О.Д.З
$$\begin{cases} \frac{x}{2}-1>0 \\ x\neq 2 \\ x-\frac{11}{4}>0 \\ \frac{x}{4}-\frac{1}{4}>0 \\ x\neq 1 \\ x\neq \frac{11}{4}\neq 2{,}75 \end{cases}\qquad \begin{cases} \cancel{x>2} \\ x\neq 2 \\ x>2{,}75 \\ x>1 \\ x\geq 0{,}5 \\ x>2 \\ \cancel{x>2} \end{cases}\qquad \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 1 \\ x\neq 2{,}75 \\ x>2{,}75 \\ x\geq 0{,}5 \\ x\geq 1 \end{cases}$$

$x>2{,}75$



Напр., $x=3$

$$\log_{\frac{1}{4}}\frac{5}{4};\quad \cancel{\log_{\sqrt{\frac{1}{4}}}}\ \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1;\quad \log_{\frac{5}{4}}\frac{1}{8}$$

$\cancel{\frac{x^{2}}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^{2}}$

$D=4+4\cdot 3=16$

$x_1=\frac{-2+4}{2}=1$ $(x-1)(x+3)$

$x_2=\frac{-2-4}{2}=-3$

$\frac{2x-1}{4}=\frac{x^{2}}{4}-x+1 \Rightarrow \frac{2x-1-x^{2}}{4}-x+1=0 \mid \cdot 4$

$x^{2}-2x+1+4x-4=0 \Rightarrow x^{2}+2x-3=0$

Черновик.

$\sqrt{x-\frac{11}{4}} = \frac{x}{2} - 1$

$x - \frac{11}{4} = \frac{x^2}{4} - x + 1$ | 4

$4x - 11 = x^2 - 4x + 1$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$D = 64 - 4 \cdot 12 = 4$

$x_1 = \frac{8+4}{2} = 6$

$x_2 = \frac{8-4}{2} = 2$ - не подходит

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x^2 - \frac{2x \cdot 11}{4 \cdot 2} + \frac{121}{16}$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x^2 - \frac{11x}{2} + \frac{121}{16}$ $\Big) \cdot 16$

$8x - 4 = 16x^2 - 88x + 121$

$16x^2 - 96x + 125 = 0$

$D = 9216 - 4 \cdot 125 \cdot 16 = 1216 = 2\sqrt{304}$ $8\sqrt{19}$

$x_1 = \frac{96 + 8\sqrt{19}}{32} = 3 + \frac{\sqrt{19}}{4}$

$64 \cdot 19 = 576 + 64 = 1216$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ 4 8 16 32 64

$x \geq 2.75$

$77 \cdot 8 = 616$

$77 \cdot 4 = 308$

$96 \cdot 96$: $576 + 864 = 9216$

$112 + 112 = 1232$

$36 \cdot 36 = 216 + 108 = 1296$

$35 \cdot 35 = 175 + 105 = 1225$

$34 \cdot 34 = 136 + 102 = 1156$

$36 \cdot 35 = 180 + 108 = 1260$

$1216 : 2 = 608$

$608 : 2 = 304$

$304 : 2 = 152$

$152 : 2 = 76$

$76 : 2 = 38$

$38 : 2 = 19$

$77 \cdot 4 = 308$