Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101800**

ID профиля: **321573**

Вариант 19

Чистовик

Задача № 1. Часть 1.

$S = 14a_1 + d + 2d + 3d + 4d + 5d + \ldots + 12d + 13d = 14a_1 + 6 \cdot 15d + d = 14a_1 + 91d$

$a_9 = a_1 + 8d$
$a_{17} = a_1 + 16d$
$a_{11} = a_1 + 10d$
$a_{15} = a_1 + 14d$

$$\left.\begin{aligned} a_9 a_{17} > S+12 &: (a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_{11} a_{15} < S+47 &: (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1 + 91d + 47 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 8da_1 + 16da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ 14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 14da_1 + 10da_1 + 140d^2 \end{cases}$$

(+) сложу:

$$a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 + 14a_1 + 91d + 47 > 14a_1 + 91d + 12 + a_1^2 + 24da_1 + 140d^2$$

$$47 - 12 > 140d^2 - 128d^2; \quad 35 > 12d^2$$

Т.к. $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ – целые числа, то d – число целое.

Арифм. прогрессия: $d \neq 0$; $d > 0$ (возрастающая)

$$\begin{cases} 12d^2 < 35 \\ d \in \mathbb{Z} \\ d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{d = 1.}$$

Тогда: $\begin{cases} (a_1+8\cdot1)(a_1+16\cdot1) > 14a_1 \cdot 91 \cdot 1 + 12 \\ (a_1+10\cdot1)(a_1+14\cdot1) < 14a_1 + 91\cdot1 + 47 \end{cases}$;

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 138 \end{cases}; \quad \begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103 \\ 14a_1 + 138 > a_1^2 + 24a_1 + 140 \end{cases};$$

~~(+) сложу:~~ $\cancel{a_1^2 + 24a_1 + 128 + 14a_1 + 138 > 14a_1 + 103 + a_1^2 + 24a_1 + 140}$;

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}; \quad (a_1+5)^2 > 0 \text{ – всегда верно.}$$

Тогда $a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$, где $a_1 \in \mathbb{Z}$. $9 = \sqrt{81} < \sqrt{92} < \sqrt{100} = 10$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow a_{1_{1,2}} = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2}$; $a_{1\,\text{больш.}} = \frac{-10+\sqrt{92}}{2}$

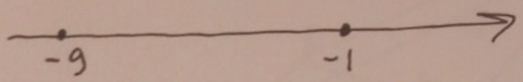
$a_{1\,\text{меньш}} = \frac{-10-\sqrt{92}}{2} > \frac{-10-10}{2} = -10.$ $a_{1\,\text{больш}} < \frac{-10+10}{2}$

Значит. $\underline{a_{1\,\text{меньш}} = -9.}$ $\underline{a_{1\,\text{больш}} = -1.}$

См. продолжение на следующем листе.

Чистовик.

Задача № 1. Часть 2. (Продолжение)



a_1 , $a_1 \in Z$ по условию.,

значит $a_1 = \{\underbrace{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1}\}$

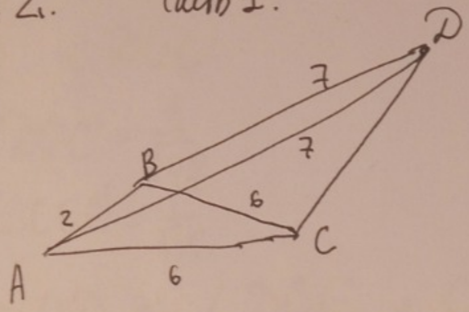
(a_1 может быть одним из этих чисел)

Ответ:

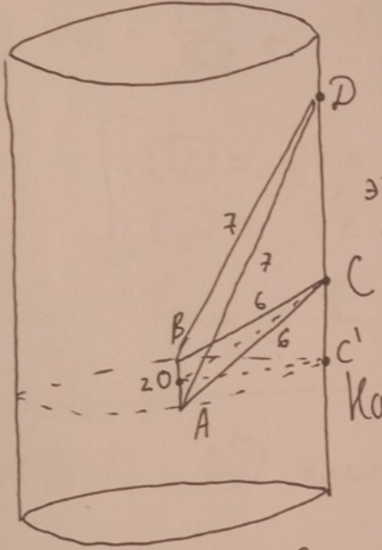
$$\left[\begin{array}{l} a_1 = -9 \\ a_1 = -8 \\ a_1 = -7 \\ a_1 = -6 \\ a_1 = -5 \\ a_1 = -4 \\ a_1 = -3 \\ a_1 = -2 \\ a_1 = -1 \end{array}\right.$$

Чистовик.

Задача № 2. Часть 1.



$\triangle ABC$ - равнобедренный.



В цилиндре точки A и B всегда лежат в плоскости одной окружности. AB = 2 по условию. Наибольший отрезок соед. точки на окружности это диаметр. Поэтому при минимальном радиусе тетраэдра его диаметр равен AB.

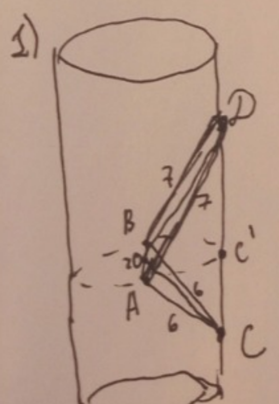
$AB = 2 = d \Rightarrow r = \frac{d}{2} = 1.$

Наименьший радиус цилиндра 1.

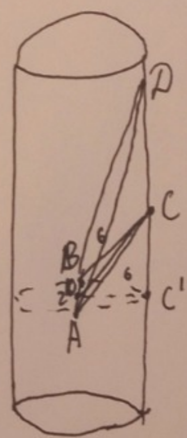
C' - проекция точки C на пл. окр-ти (AOB) - диаметр которой.

Возможны 2 случая расположения точки C при минимальном радиусе цилиндра.

1)



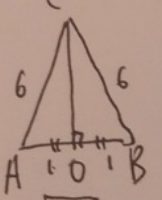
2)



Найду CD в 1 и 2 случаях.

2 случ:

$CO \perp AB$



$CO = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$

$C'O = R = 1.$

$\cos \angle C'OC = \frac{OC'}{OC} = \frac{1}{\sqrt{35}}$

$\triangle ABD$: $DO \perp AB$: $DO = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}.$

$\cos \angle C'OD = \frac{1}{\sqrt{48}}.$

$CD = DO \sin \angle DOC' - OC \sin \angle C'OC =$

$= \sqrt{48} \cdot \frac{\sqrt{47}}{\sqrt{48}} - \sqrt{35} \cdot \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{35}} = \sqrt{47} - \sqrt{34}.$

Чистовик

Задача №2. Часть 2.

1 случай: $\angle DOC$:

$\cos \angle DOC' = \frac{1}{\sqrt{48}}$.

$\cos \angle COC' = \frac{1}{\sqrt{35}}$.

$DC = OD \cdot \sin \angle DOC' + CO \cdot \sin \angle COC' =$

$= \sqrt{48} \cdot \frac{\sqrt{47}}{\sqrt{48}} + \sqrt{35} \cdot \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{35}} = \sqrt{47} + \sqrt{34}$.

Итак, $\left[\begin{array}{l} CD = \sqrt{47} - \sqrt{34} \\ CD = \sqrt{47} + \sqrt{34} \end{array}\right.$

$r_{min} = 1$.

Ответ: CD принимает значения.

21101800 (U321573 M1301071)

Чистовик.

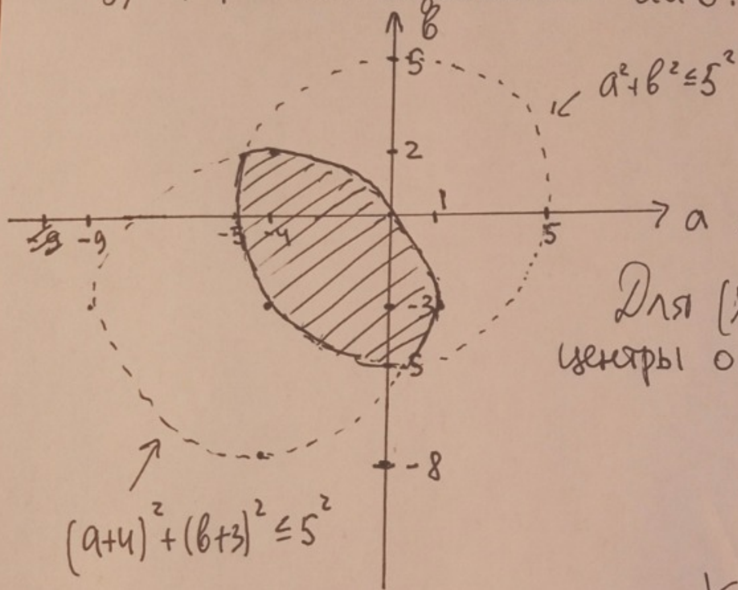
Задача № 3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25\\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b,\ 25)\end{cases}$$

То есть $\begin{cases}a^2+b^2 \le -8a-6b\\ a^2+b^2 \le 25\end{cases}$; всегда. (если меньше минимального, то меньше большего из $(-8a-6b, 25)$ точно.)

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 5^2\\ a^2+8a+b^2+6b \le 0\end{cases};\quad \begin{cases}a^2+b^2 \le 5^2\\ (a+4)^2-16+(b+3)^2-9 \le 0\end{cases};\quad \begin{cases}a^2+b^2 \le 5^2\\ (a+4)^2+(b+3)^2 \le 5^2\end{cases}$$

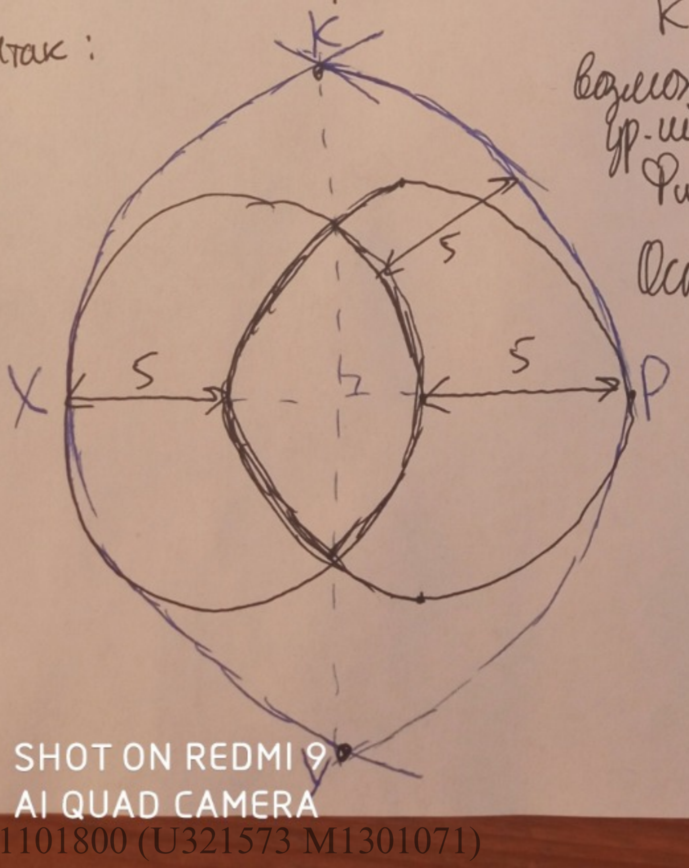
Найду графически возможные a и b. Это уравнения окружностей.



Заштрихованная область, включая „границы" — возможные a и b.

Для $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5^2$ числа a и b — центры окружностей радиуса 5.

Итак:



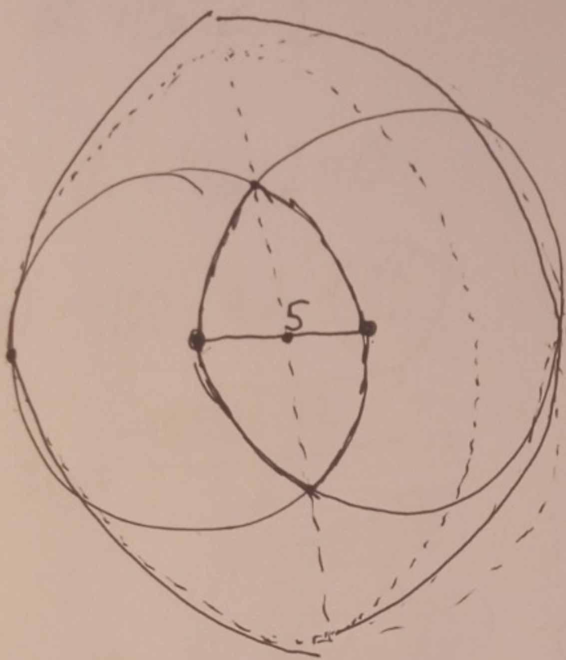
КРУХ — объединение всех возможных окр-ей исходной системы ур-ий.

Фигура М: КРУХ.

Осталось найти площадь КРУХ.

Черновик

3.)



Черновик:

$(a_1+5)^2 \geq 0.$ — всегда.

$a_1^2+10a < -2$

$a_1^2+10a_1+2=0.$

$x_1 x_2 = -2$

$x_1+x_2=-10.$

$D = 100-4\cdot 2 = 92.$

$\sqrt{92}.$

$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100-4\cdot 2}}{2} =$

$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2}$; $\frac{-10 \pm}{2}$

$\sqrt{81} < \sqrt{92} < \sqrt{100}$

$9 < \sqrt{92} < 10.$

$x_{1max} = \left[\frac{-10+\sqrt{92}}{2}\right] = \left[\frac{-10+9}{2}\right] = \cancel{0}$

> -1

$> -\frac{1}{2}$

-1

$<$ $>$ $\frac{-20}{2}$

$x_{min} = \frac{-10-\sqrt{92}}{2}$ $> -10.$

-9

$\frac{9{,}34\ldots}{2}$

$9\cdot 13 < -14+91+47$ $-5-$

$< 33+91=124$ $-9.$

$-10.$

$100-100.$

-8 $64-80.$

-9 $81-90.$

-6 $36-$

-7 $49-70$

$25-50$

-5.

-3 $9-30.$

-2 $4-20.$

-1.

$\begin{array}{r} +90 \\ 27 \\ \hline 117 \end{array}$

$140 \cancel{<} 91+47$

138 $-9.$

$1-10<-2$ — верно.

$81-90<-2$ — верно

-10: $100-100<-2$. неверно.

SHOT ON REDMI 9
AI QUAD CAMERA

21101800 (U321573 M1301071)

Черновик

1) $S = a_1 \cdot 14 + 2d + 3d + 4d + d + 5d + 6d + 7d + 8d + 9d +$
$+ 10d + 11d + 12d + 13d =$

$d > 0.$

$= 14a_1 + 15d \cdot 6 + d = 14a_1 + 91d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 8 \\ \hline 128 \end{array}$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47$

$a_1^2 + 16da_1 + 8da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

$a_1^2 + 16da_1 + 8da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12.$

$- \begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 14da_1 + 10da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$

$\cancel{a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 - a_1^2 - a_1d \cdot 24 - 128d^2}$

$\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$; $14a_1 + 91d + 12 < a_1^2 + 24da_1 + 128d^2$

(+) $\cancel{a_1^2} + \cancel{24da_1} + 140d^2 + \cancel{14a_1} + \cancel{91d} + 12 < \cancel{a_1^2} + \cancel{24da_1} + 128d^2 + \cancel{14a_1} + \cancel{91d} + 47$

$\begin{array}{r} 140 \\ -128 \\ \hline 12 \end{array}$

d - целое
$d \neq 0.$ $d > 0$

$12d^2 < 47 - 12$

$12d^2 < 35$ (=)

$\begin{array}{r|l} 35 & 12 \\ 24 & 2 \\ \hline 11 & \end{array}$

(=) $d = 1$ - единств. верное.

$/d = 2: 12$

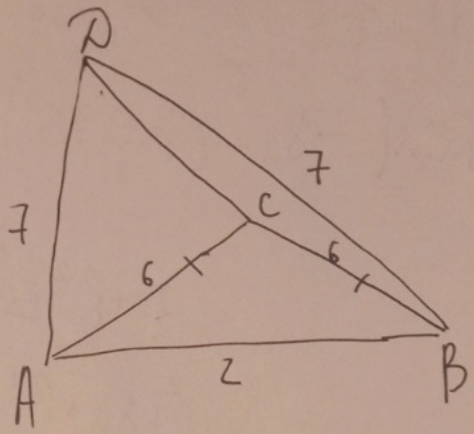
$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \end{array}$ $\cancel{35}$

$\begin{array}{r} 91 \\ +12 \\ \hline 103 \end{array}$ $\begin{array}{r} 91 \\ +47 \\ \hline 138 \end{array}$

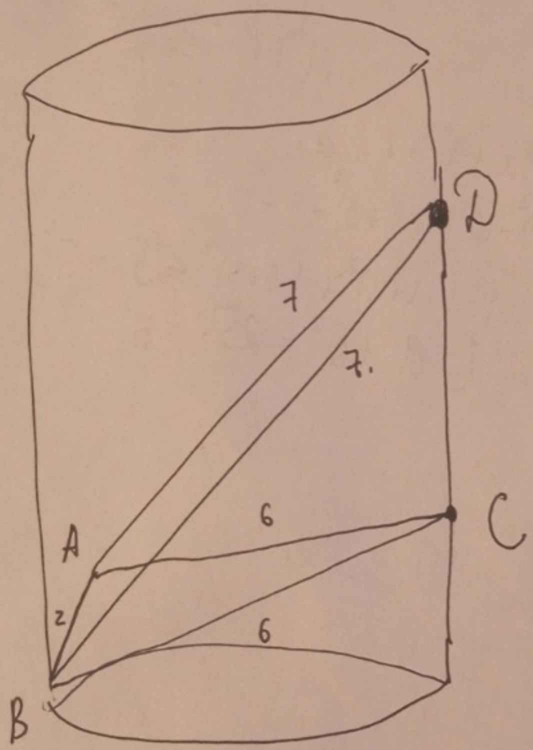
$a_1^2 + 10a_1 + 220$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 - 14a_1 - 138 < 0$

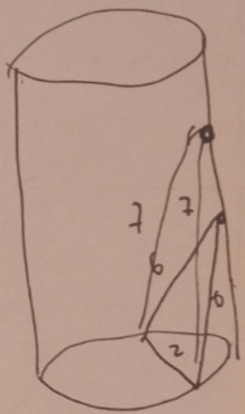
2) Черновик



CD || осн.



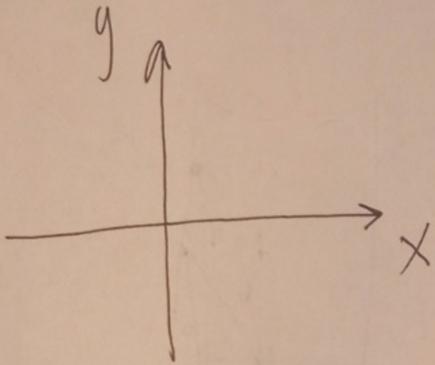
1



21101800 (U321573 M1301071)

Черновик.

3) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25 = 5^2 \\ a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$



$a^2+b^2 \leq -8a-6b$

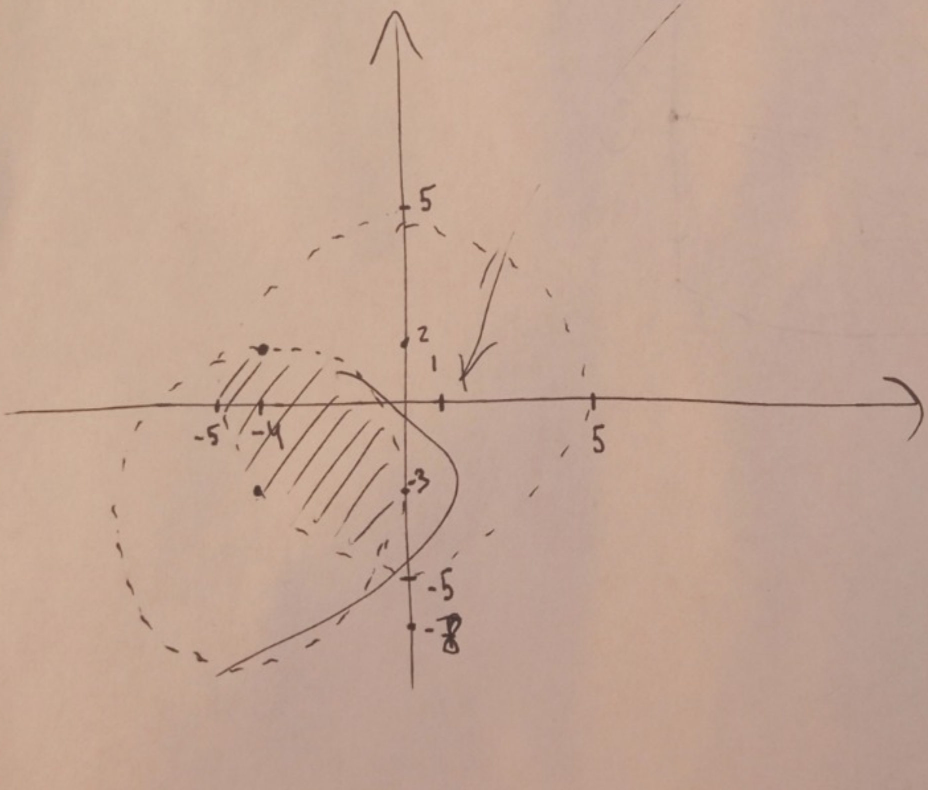
$a^2+8a+b^2+6b \leq 0.$

$a^2+b^2 \leq 25$

$a^2+8a+b^2+6b \leq 0.$

$(a+4)^2-16+(b+3)^2-9 \leq 0.$

$\begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25 = 5^2 \\ a^2+b^2 \leq 25. = 5^2 \end{cases}$



SHOT ON REDMI 9
AI QUAD CAMERA

21101800 (U321573 M1301071)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101800**

ID профиля: **321573**

Вариант 19

Задача № 4. ~~Часть 1~~. Чистовик. Вариант 19.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 21 \\ НОК(a;b;c) = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

т.к. $НОК(a;b;c) = 3^{17}\cdot 7^{15}$ числа 17 и 15 являются максимальными коэф. в разложении $(a;b;c)$ на простые множители. других чисел нет, иначе бы НОК не делился на какое то число из чисел $(a;b;c)$

Пусть
$a = 7^{\alpha_1}\cdot 3^{\beta_1}$
$b = 7^{\alpha_2}\cdot 3^{\beta_2}$
$c = 7^{\alpha_3}\cdot 3^{\beta_3}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in N$.

В НОК „берутся" максимальные коэф. в разложении, поэтому

$15 = \max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$
$17 = \max(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$

В НОД „берутся" минимальные коэф. разложения $(a;b;c)$ на простые множители.

$21 = 3^1\cdot 7^1$, поэтому

$1 = \min(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$

$1 = \min(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$

Посчитаю сколько неупорядоченных пар (a,b,c) есть.

$\alpha_{max} = 15$; $\alpha_{min} = 1$ значит оставшийся коэффиц. α может быть числом или цифрами! 1, 2, 3, 4, 5, 6 ..., 9, 10, 11, ... 13, 14, 15.

(min всё также будет 1, max будет 15.)

Всего может быть у оставшегося коэф. α 15 различных значений.

Аналогичные рассуждения провожу к коэф. β.

$\beta_{max} = 17$; $\beta_{min} = 1$. β оставшийся может принимать 17 различных значений.

Способов расставить коэффиц. α в неупор. парах (a,b,c)

α_1: 1 (min) (Пусть при α_1 будет min, потом посчитаю перестановки (a,b,c), отдельно)

α_2: 1 (max)

α_3: 15

Теперь $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ можно „перемешать" между числами a,b,c: $15\cdot 3! = 15\cdot 6 = \underline{90}$

Каждой упорядоченной паре $\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3$ (их 90) можно расставить коэфф. β_i $(1\leq i\leq 3)$

Всего $90\cdot 17\cdot 3! = 90\cdot 6\cdot 17 = 9180$ способов. Ответ: 9180 способов.

SHOT ON REDMI 9
AI QUAD CAMERA

Задача № 5. Чистовик Вариант 19.

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$ $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)$ $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2$

$\cancel{\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}(\frac{x}{2}-}$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$ $2\cdot\log_{(x-\frac{11}{4})}(\frac{x}{2}-1)$ $2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}(x-\frac{11}{4})$

Пусть $a=x-\frac{11}{4}$; $b=\frac{x}{2}-1$; $c=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\log_b c$; $2\log_a b$; $2\log_c a$

Всего возможно 3 случая! (C_3^2)

1) $2\log_a b = 2\log_c a$; $\log_a b = \log_c a$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_a b\cdot\log_c a = \log_c b \Rightarrow \cancel{\log_c^2 a = \log_c b}$

$\Rightarrow \log_a^2 b = \log_c b$

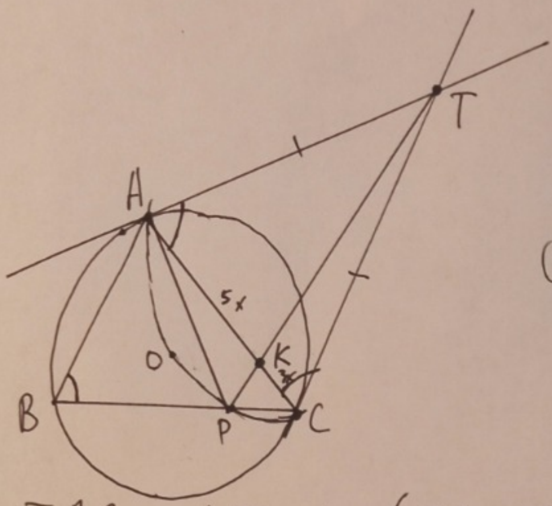
$>$ ...

$2\log_c a - 1 = \frac{1}{2}\log_b c$

2) $\begin{cases} 2\log_a b = \frac{1}{2}\log_b c \\ \frac{1}{2}\log_b c - 1 = 2\log_c a \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2\log_c a = \frac{1}{2}\log_b c \\ 2\log_c a - 1 = 2\log_a b \end{cases}$

Чистовик Задача № 6. Вариант 19.



$$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

(т.к. общая прямая – основание)
и общ. вершина.

$\angle TAC = \angle TCA$ $(TA = TC)$ как отр. касательн.

$\angle TAC = \angle ABC$ (угол между хордой и касат равен „впис. углу на хорде")
(ХордаAC)

$\angle TCA = \angle ABC$

~~$S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$~~

21101800 (U321573 M1301072)

Черновик НОК - наим. общ. кратное НОД (наиб. общ. дел.)

Упорядоченные тройки. порядок важен. (1;1;2) и (2;1;1) - разные

4. $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 21 \\ НОК(a,b,c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$

$a = 7^{\alpha_1} \cdot 3^{\beta_1}$

$b = 7^{\alpha_2} \cdot 3^{\beta_2}$

$c = 7^{\alpha_3} \cdot 3^{\beta_3}$

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$

$\min(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = 1$

$\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 15$

$\max(\beta_1; \beta_2; \beta_3) = 17.$

$НОД(\cancel{НОД(ab)}, c) = \cancel{21}$

$\cancel{НОК}(НОК(a,b), c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$

$7^1 \cdot 3^1$ 21

$7^{15} \cdot 3^{17}$

$\cancel{49 \cdot 3}$

$7^{5} \cdot 3^{17}$

21·21

$21^{15} \cdot 3^2$

$\cancel{7^3 \cdot 3^{17}}$

abc:

abc
bca
cba

abc
acb
bac
bca
cab
cba

6· 3! · 15 · 17

15 17

7^2 3^{17} $21 \cdot 7 \cdot 3^{16}$

7^1 3^{10} $21 \cdot 3^9$

7^{15} 3^1 $21 \cdot 7^{14}$

21

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$
$\alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_2$
$\alpha_2\ \alpha_1\ \alpha_3$
$\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1$
$\alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1$
$\alpha_3\ \alpha_1\ \alpha_2$

$90 \times 6 = 540$

540×17:
3780
5400
9180

$17 \times 6 =$
$= 42 + 60 = 102$

$\cancel{17 \times 6 = 42}$

$102 \times 90 = 9180$

4. Черновик.

НОД $(a,b,c) = 21$

НОК $(a,b,c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$

$\cancel{a \cdot b \cdot c =}$ $21 = 3 \cdot 7.$

/НОД $(10, 12, 22) =$
$= 2$

НОК $(10, 12, 22) =$
$=$

НОД $(6, 8, 9) = 1.$

$3 \cdot 2 \cdot \quad 2^3 \cdot 3^0 \quad 3^2$

НОК $(2^3 \cdot 3^2) =$
$= 8 \cdot 9 = 72$

$$\begin{array}{r} \times 60 \\ 22 \\ \hline 122 \\ 120 \\ \hline 1222 \end{array}$$

5. $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \log_{(\frac{x}{2}-1)} \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$= 2 \log_{x-\frac{11}{4}} \left(\frac{x}{2}-1\right)$

$= 2 \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}} \left(x - \frac{11}{4}\right)$

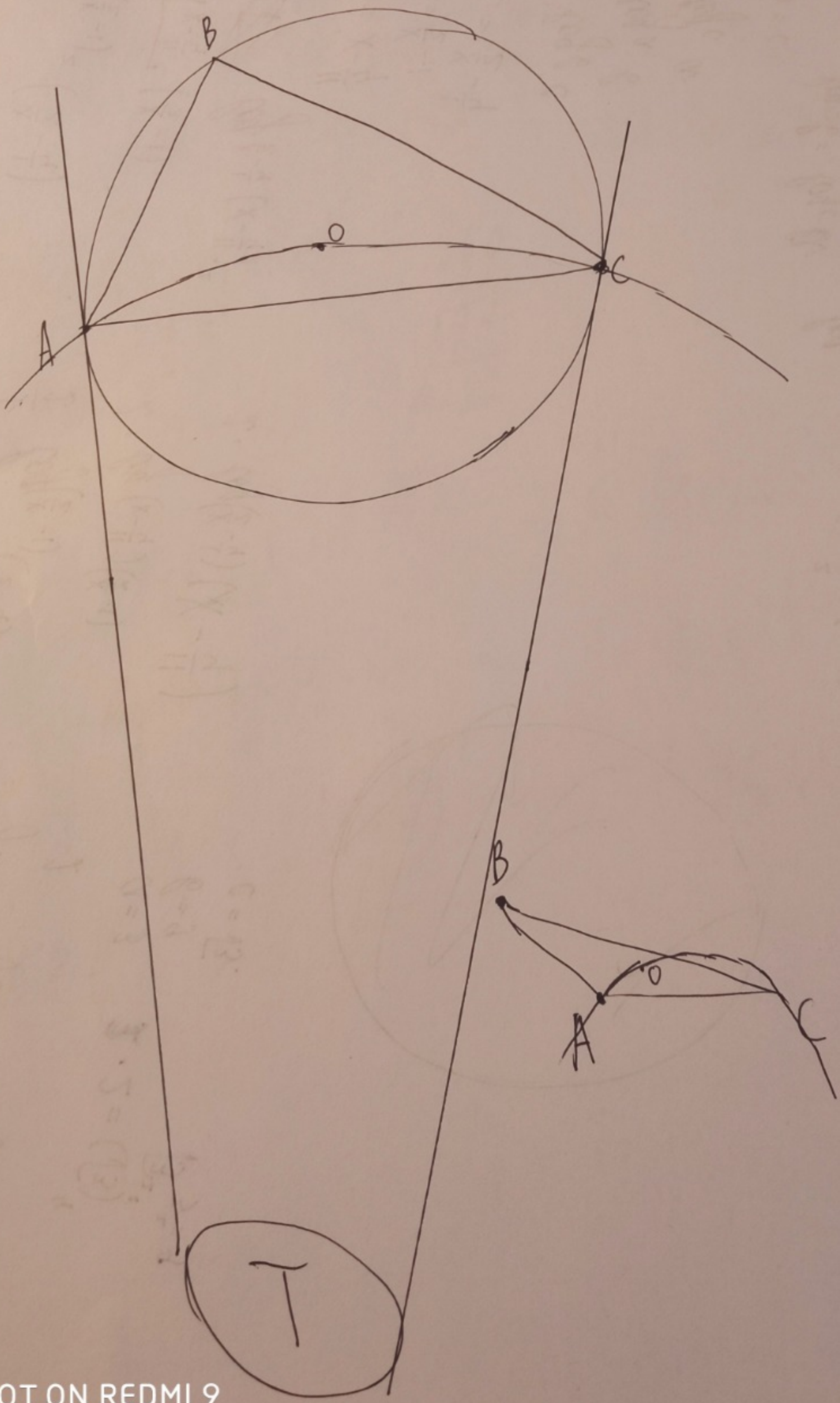
$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}} \left(\frac{x}{2} - 1\right)$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}} \left(x - \frac{11}{4}\right)^2$

$x > \frac{11}{4}$

21101800 (U321573 M1301072)

Черновик.



$a^4 = b$

$a^{t^2} = c^t$

$t^2 = 5$

$a^t = b.$

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\cancel{\log} \quad \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$a = x-\frac{11}{4}$

$b = \frac{x}{2}-1$

$c = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

а) $\frac{1}{2}\log_b c$

б) $2\log_a b$

с) $2\log_c a$

~~а)~~ 1) $б = с$:

$\log_a b = \log_c \cancel{a}$ $\quad\log$

$\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$2\cdot\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$2\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(\cancel{x}-\frac{11}{4}\right)$

$\cancel{2}\log_a b^2 = \log_c b.$

$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b.$

2

$a = 3$

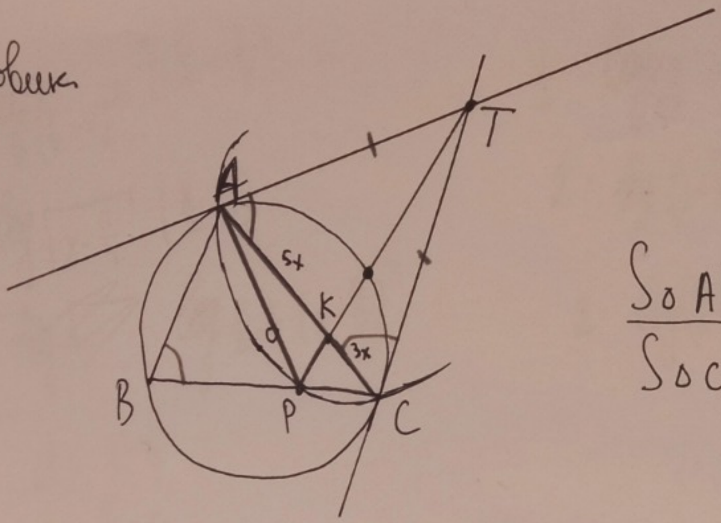
$b = 9$

$c = \sqrt{3}.$

$\cancel{2}\cdot 2 = (\sqrt{3})^4$

$\sqrt{3}^{2^2}\ 3^2 = 9.$

Черновик

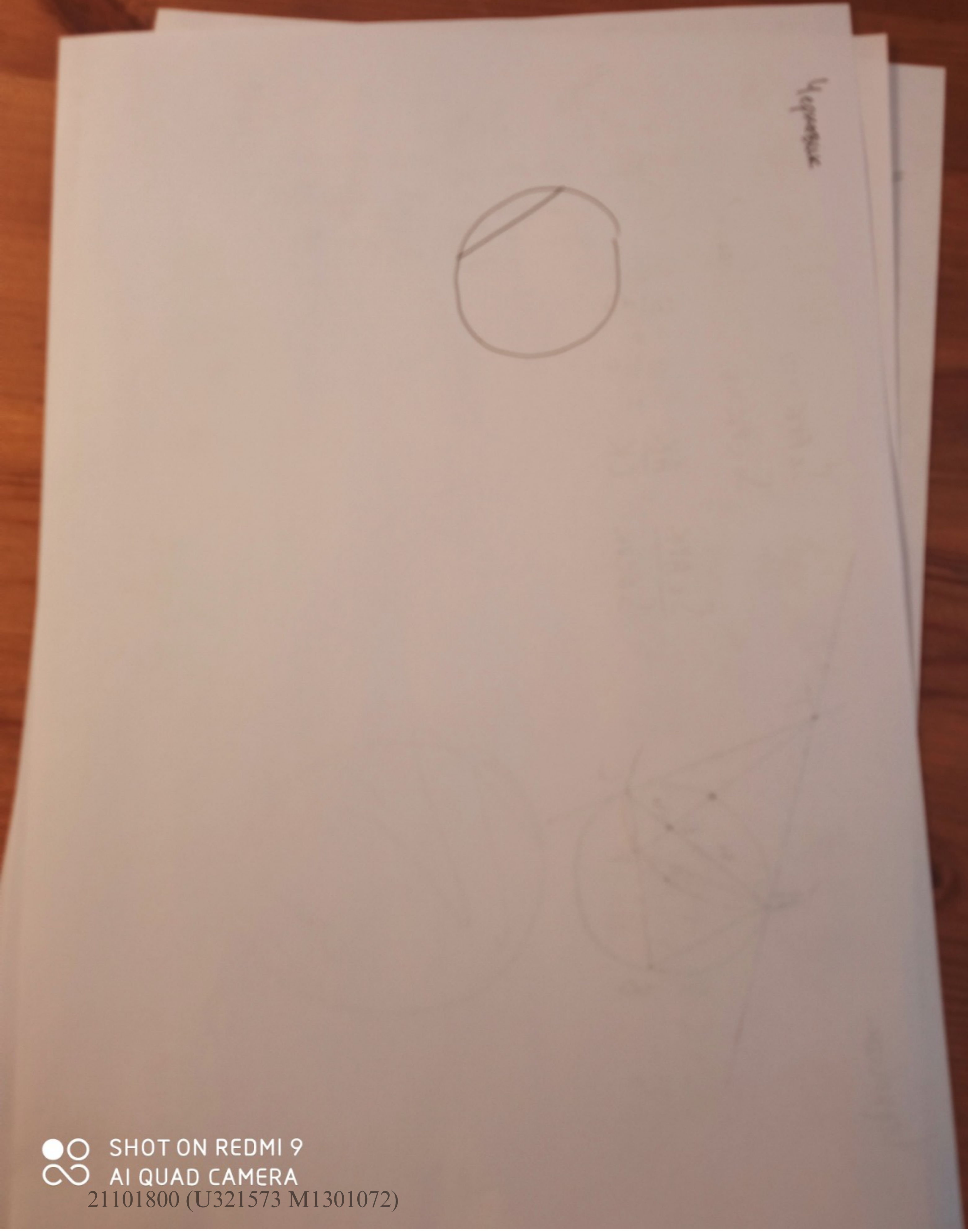


$S_{\triangle APK} = 10$

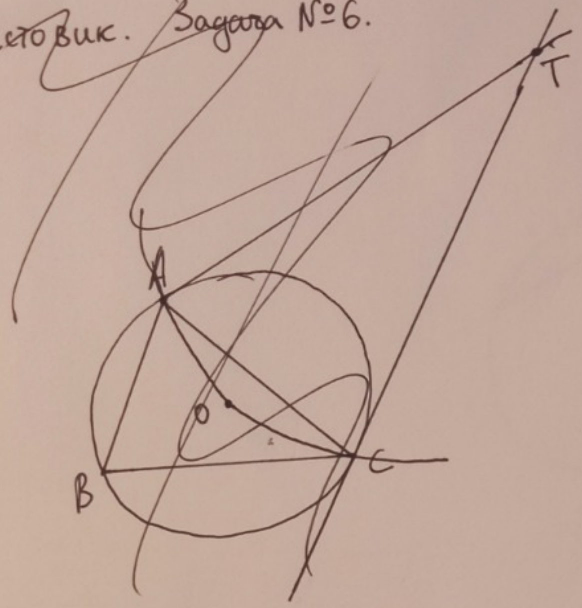
$S_{\triangle CPK} = 6$

$S_{ABC} - ?$

$$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$


Черновик

Чистовик. Задача №6.



21101800 (U321573 M1301072)