Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101783**

ID профиля: **830780**

Вариант 19

① $a_9 \cdot a_{17} > S_{14} + 12$

$a_{11} \cdot a_{15} < S_{14} + 47$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$S_{14} = \frac{1}{2}(a_1 + a_{14}) \cdot 14 = \frac{1}{2}(a_1 + 13d) \cdot 14$

$$\begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 7(a_1 + 13d) + 12 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 7(a_1 + 13d) + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 7a_1 + 91 + 12 \\ a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < 7a_1 + 91 + 47 \end{cases}$$

~~вычтем из второго первое~~

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 7a_1 + 91 + 12 \quad (1) \\ -a_1^2 - 24a_1d - 140d^2 > -7a_1 - 91 - 47 \quad (2) \end{cases}$$

сложим два уравнения

$$-12d^2 > -35$$

$$d^2 < \frac{35}{12}$$

$$d^2 < 2\frac{11}{12}$$

$$|d| < \sqrt{2\frac{11}{12}}$$

по условию арифм. прогрессия возрастающая $\Rightarrow$ $\Rightarrow d > 0$, а также сказано, что прогрессия состоит из целых чисел $\Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{1} < \sqrt{2\frac{11}{12}} < \sqrt{4}$$

$$1 < \sqrt{2\frac{11}{12}} < 2$$

получается, что подходит только $d = 1$, тогда:

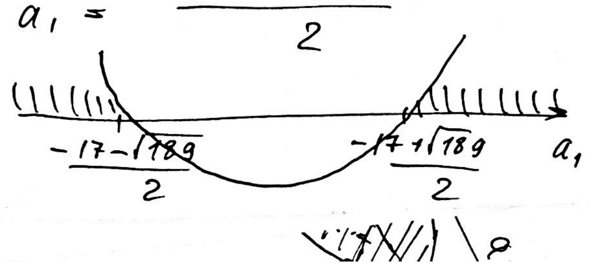
(1) $a_1^2 + 24a_1 \cdot 1 + 128 \cdot 1^2 > 7a_1 + 103$

$a_1^2 + 17a_1 + 25 > 0$

$D = 17^2 - 4 \cdot 25 = 289 - 100 = 189$

$a_1 = \frac{-17 \pm \sqrt{189}}{2}$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ +\;17 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$



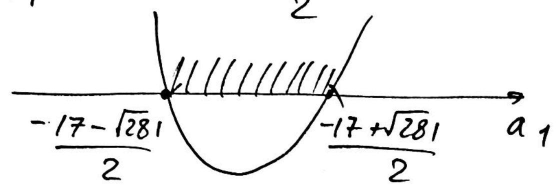
$a \in \left(-\infty; \frac{-17-\sqrt{189}}{2}\right) \cup \left(-\frac{17+\sqrt{189}}{2}; +\infty\right)$

(2) $a_1^2 + 24a_1 \cdot 1 + 140 \cdot 1^2 < 7a_1 + 138$

$a_1^2 + 17a_1 + 2 < 0$

$D = 17^2 - 4 \cdot 2 = 289 - 8 = 281$

$a_1 = \frac{-17 \pm \sqrt{281}}{2}$



$a \in \left(\frac{-17-\sqrt{281}}{2}; \frac{-17+\sqrt{281}}{2}\right)$

оценка:

$\sqrt{169} < \sqrt{189} < \sqrt{196}$

$13 < \sqrt{189} < 14$

$-14 < -\sqrt{189} < -13$

$-31 < -17-\sqrt{189} < -30$

$-15{,}5 < \frac{-17-\sqrt{189}}{2} < -15$

$-4 < -17+\sqrt{189} < -3$

$-2 < \frac{-17+\sqrt{189}}{2} < -1{,}5$

$\sqrt{256} < \sqrt{281} < \sqrt{289}$

$16 < \sqrt{281} < 17$

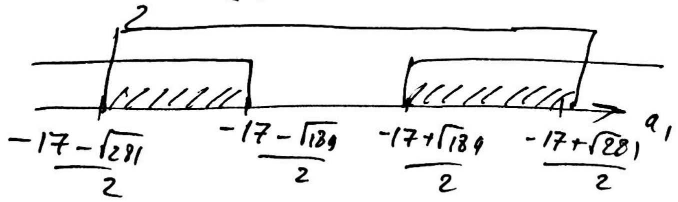
$-1 < -17+\sqrt{281} < 0$

$-0{,}5 < \frac{-17+\sqrt{281}}{2} < 0$

$-17 < -\sqrt{281} < -16$

$-34 < -17-\sqrt{281} < -33$

$-17 < \frac{-17-\sqrt{281}}{2} < -16{,}5$



$a_1 \in \left(-\frac{17-\sqrt{281}}{2}; -\frac{17-\sqrt{189}}{2}\right) \cup \left(\frac{-17+\sqrt{189}}{2}; -\frac{17+\sqrt{281}}{2}\right)$

$a_1 \in (-16{,}7; -15{,}2) \cup (-1{,}7; -0{,}7)$

цифру десятых можно выбрать любую, которая удовлетворяет неравенствам оценки, т.к. нам нужно выбрать целые a_1

$a_1 \in \{-16; -1\}$

Ответ: $-16; -1$.

③ $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 25 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) & (2) \end{cases}$

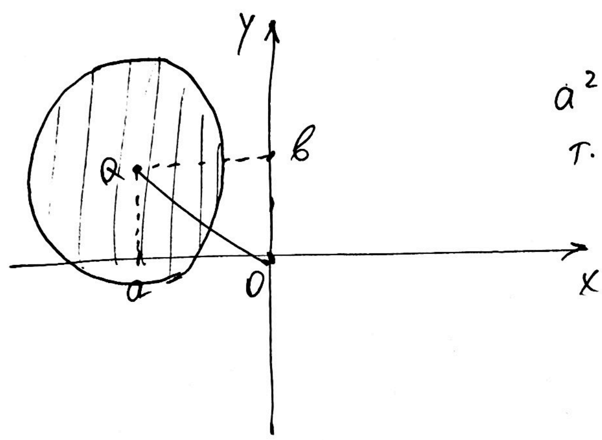
~~$a^2+b^2 \ge 0 \Leftrightarrow \min(-8a-6b, 25) \ge 0 \Leftrightarrow -8a-6b \ge 0$, иначе система не имела бы решений~~

~~$8a \le -6b$~~

~~$a \le -\frac{3}{4}b$~~

(1) - круг с центром $(a; b)$ и радиусом 5

~~(2)~~



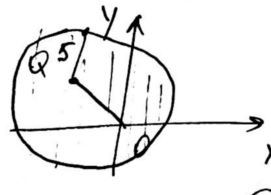
$a^2+b^2 = OQ^2$
т.е. равно квадрату расстояния от $(a;b)$ до начала координат

I) если $25 \le -8a-6b$; $8a+25 \le -6b$
$8a \le -6b-25$
$a \le -\frac{3}{4}b - 3\frac{1}{8}$

$a^2+b^2 \le 25$

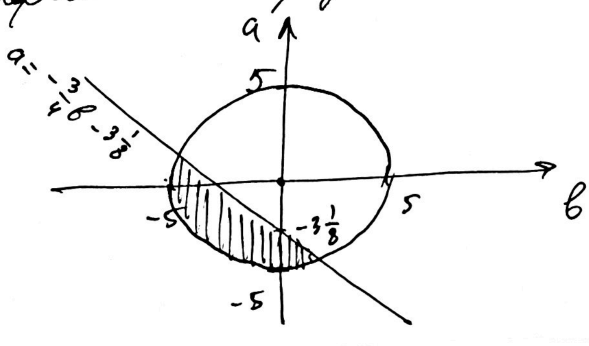
$OQ^2 \le 25$

$OQ \le 5$, т.е рисунок такой:



все такие отрезки OQ сами составляют круг ~~окружность~~ с центром в начале координат и радиусом 5

график в координатах $a(b)$:



A4

Чистовик лист 4 из 9

II) если $-8a-6b \le 25$

$8a \ge -6b-25$

$a \ge -\frac{3}{4}b-3\frac{1}{8}$;

$a^2+b^2 \le -8a-6b$ (*)

$\cancel{-\frac{3}{4}b-3\frac{1}{8} \le a \le -\frac{3}{4}b}$

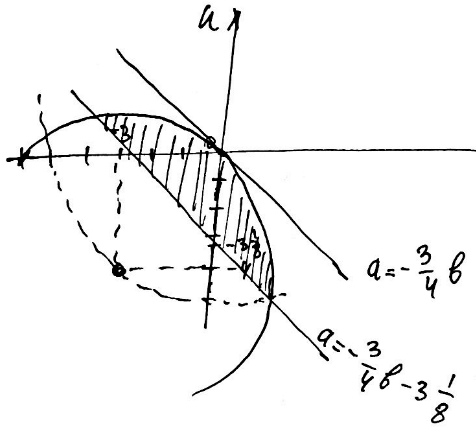
$\cancel{-3\frac{1}{8} \le a+\frac{3}{4}b \le 0 \quad |\cdot 8}$

$\cancel{-25 \le 8a+6b \le 0}$

(*) $(a^2+8a+4^2)+(b^2+6b+3^2) \le 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 5^2$

в ~~Е~~ a(b) — окружность с центром $(-3;-4)$, радиусом 5:



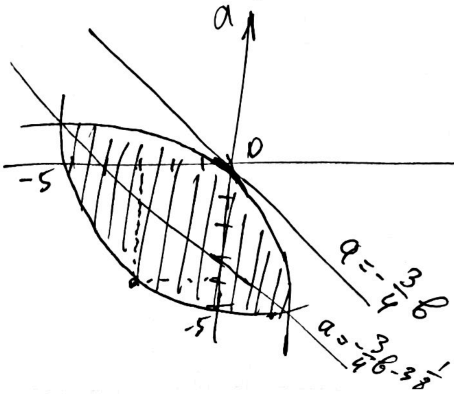
проверим точки пересечения $\begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2=5^2\\ \text{и } a^2+b^2=5^2\end{cases}$

$\cancel{a^2}+8a+16+\cancel{b^2}+6b+9=\cancel{a^2}+\cancel{b^2}$

$8a+6b=-25$

$a=-\frac{3}{4}b-3\frac{1}{8}$, т.е.

эти окружности пересекаются ~~где~~ как раз по прямой $a=-\frac{3}{4}b-3\frac{1}{8}$. Объединим два рисунка:



для всех пар a; b, принадлежащих данной фигуре система имеет решение

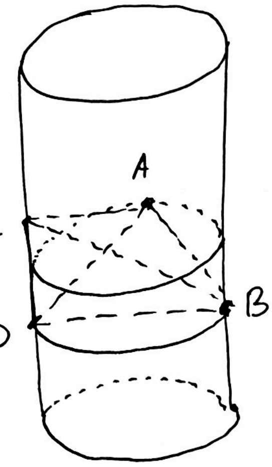
по данному рисунку видно, что сумма a^2+b^2 может принимать любые значения от 0 до 5^2, значит и OQ^2 на графике $y(x)$ тоже, значит фигура M – круг с радиусом $OQ_{max}+5=10$, а значит её площадь $S=\pi R^2=100\pi$.

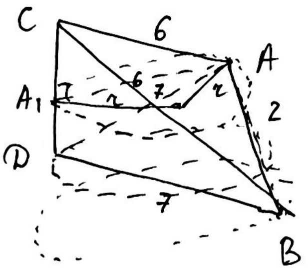
Ответ: $S_M=100\pi$.

(2)

ЧИСТОВИК ЛИСТ 6 из 9

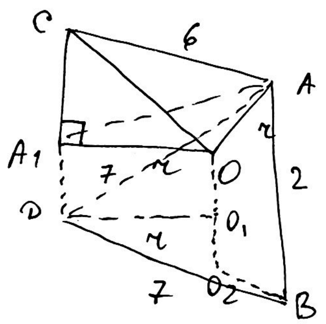
$AC = CB = 6,\ AB = 2,\ AD = DB = 7$





если A, B, D лежат в плоскости, параллельной основаниям цилиндра, то

$$r_ц = r_{впис (ABD)} = \frac{S(ABD)}{p(ABD)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{7^2-1^2}\cdot 2}{7+1} = \frac{\sqrt{48}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

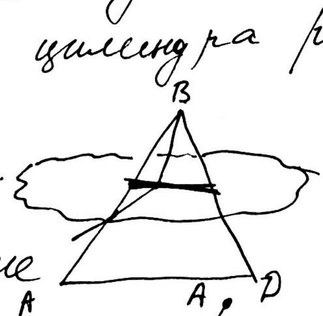


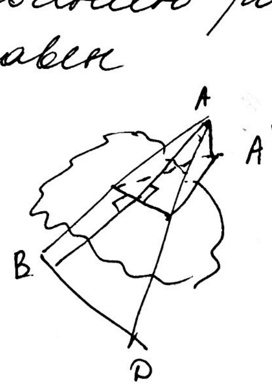
$DD' \perp AB \quad DD' = \sqrt{7^2-1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$CD' \perp AB \quad CD' = \sqrt{6^2-1^2} = \sqrt{35}$

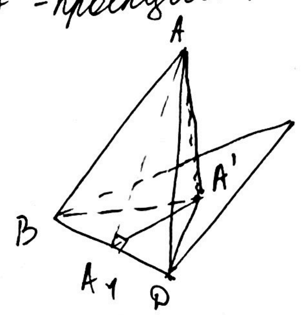
если ~~∠(ABD)~~, угол между (ABD) и основанием цилиндра равен α, то площадь проекции $\triangle ABD$ на плоскость, параллельную основанию равна $S(ABD)\cdot\cos\alpha$, а радиус цилиндра равен

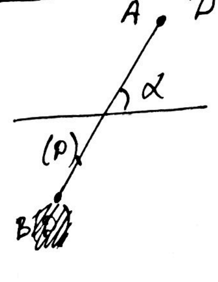
$$r_ц = \frac{S(ABD)\cdot\cos\alpha}{p\ проекции}$$



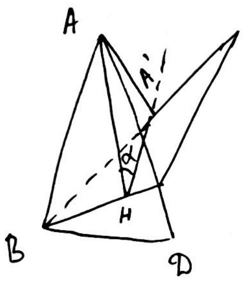


A' - проекция A на основание





Черновик лист 7 из 9



Черновик лист 8 из 9

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{3}{2}(a_1 + a_3)$$

III) найдем крайние значения а и в: черновик

лист 9 из 9

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{4}в - 3\frac{1}{8} \\ a^2 + в^2 = 25 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{3}{4}в - 3\frac{1}{8}\right)^2 + в^2 = 25 \quad |\cdot 64$$

$$(6в + 25)^2 + 64в^2 = 64 \cdot 25$$

$$36в^2 + 300в + 25 \cdot 25 + 64в^2 = 64 \cdot 25$$

$$100в^2 + 300в - 1975 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times\, 25 \\ 39 \\ \hline + \; 225 \\ 175 \; \\ \hline 1975 \end{array}$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101783**

ID профиля: **830780**

Вариант 19

① $a_9 \cdot a_{17} > S_{14} + 12$

$a_{11} \cdot a_{15} < S_{14} + 47$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$S_{14} = \frac{1}{2}(a_1 + a_{14}) \cdot 14 = \frac{1}{2}(a_1 + 13d) \cdot 14$

$$\begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 7(a_1 + 13d) + 12 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 7(a_1 + 13d) + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > 7a_1 + 91 + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 7a_1 + 91 + 47 \end{cases}$$

~~вычтем из второго первое~~

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > 7a_1 + 91 + 12 \quad (1) \\ -a_1^2 - 24a_1 d - 140d^2 > -7a_1 - 91 - 47 \quad (2) \end{cases}$$

сложим два уравнения

$$-12d^2 > -35$$

$$d^2 < \frac{35}{12}$$

$$d^2 < 2\frac{11}{12}$$

$$|d| < \sqrt{2\frac{11}{12}}$$

по условию арифм. прогрессия возрастающая $\Rightarrow$ $\Rightarrow d > 0$, а также сказано, что прогрессия состоит из целых чисел $\Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{1} < \sqrt{2\frac{11}{12}} < \sqrt{4}$$

$$1 < \sqrt{2\frac{11}{12}} < 2$$

получается, что подходит только $d = 1$, тогда:

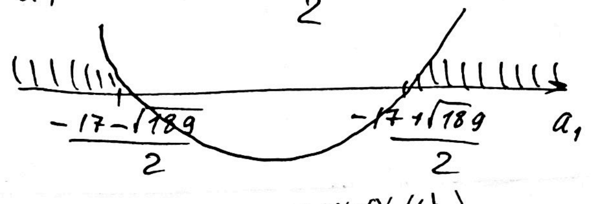
(1) $a_1^2 + 24a_1 \cdot 1 + 128 \cdot 1^2 > 7a_1 + 103$

$a_1^2 + 17a_1 + 25 > 0$

$D = 17^2 - 4 \cdot 25 = 289 - 100 = 189$

$a_1 = \dfrac{-17 \pm \sqrt{189}}{2}$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$



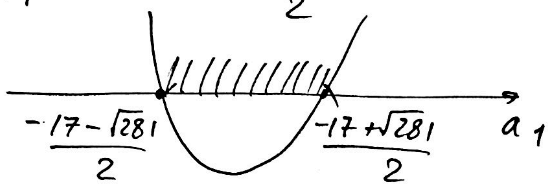
$a \in \left(-\infty; \frac{-17-\sqrt{189}}{2}\right) \cup \left(-\frac{17+\sqrt{189}}{2}; +\infty\right)$

(2) $a_1^2 + 24a_1 \cdot 1 + 140 \cdot 1^2 < 7a_1 + 138$

$a_1^2 + 17a_1 + 2 < 0$

$D = 17^2 - 4 \cdot 2 = 289 - 8 = 281$

$a_1 = \frac{-17 \pm \sqrt{281}}{2}$



$a \in \left(\frac{-17-\sqrt{281}}{2}; \frac{-17+\sqrt{281}}{2}\right)$

оценка:

$\sqrt{169} < \sqrt{189} < \sqrt{196}$

$13 < \sqrt{189} < 14$

$-14 < -\sqrt{189} < -13$

$-31 < -17-\sqrt{189} < -30$

$-15{,}5 < \frac{-17-\sqrt{189}}{2} < -15$

$-4 < -17+\sqrt{189} < -3$

$-2 < \frac{-17+\sqrt{189}}{2} < -1{,}5$

$\sqrt{256} < \sqrt{281} < \sqrt{289}$

$16 < \sqrt{281} < 17$

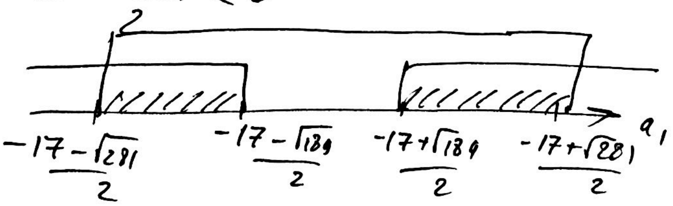
$-1 < -17+\sqrt{281} < 0$

$-0{,}5 < \frac{-17+\sqrt{281}}{2} < 0$

$-17 < -\sqrt{281} < -16$

$-34 < -17-\sqrt{281} < -33$

$-17 < \frac{-17-\sqrt{281}}{2} < -16{,}5$



$a_1 \in \left(-\frac{17-\sqrt{281}}{2}; -\frac{17-\sqrt{189}}{2}\right) \cup \left(\frac{-17+\sqrt{189}}{2}; -\frac{17+\sqrt{281}}{2}\right)$

$a_1 \in (-16{,}7; -15{,}2) \cup (-1{,}7; -0{,}7)$

цифру десятых можно выбрать любую, которая удовлетворяет неравенствам оценки, т.к. нам нужно выбрать целые a_1

$a_1 \in \{-16; -1\}$

Ответ: $-16; -1$.

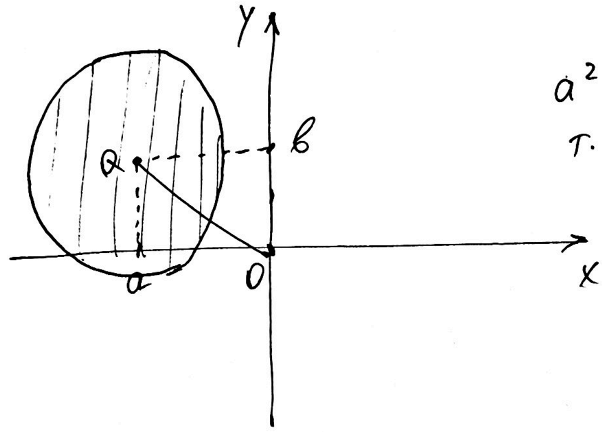
③ $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \quad (2) \end{cases}$

~~$a^2+b^2 \ge 0 \Leftrightarrow \min(-8a-6b, 25) \ge 0 \Leftrightarrow -8a-6b \ge 0$, иначе система не имела бы решений~~

~~$8a \le -6b$~~

~~$a \le -\frac{3}{4}b$~~

(1) - круг с центром $(a; b)$ и радиусом 5



$a^2+b^2 = OQ^2$

т.е. равно квадрату расстояния от $(a; b)$ до начала координат

I) если $25 \le -8a-6b$; $8a+25 \le -6b$

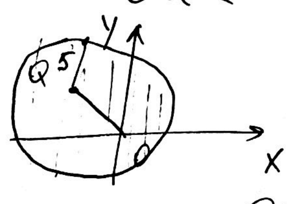
$8a \le -6b-25$

$a \le -\frac{3}{4}b - 3\frac{1}{8}$

$a^2+b^2 \le 25$

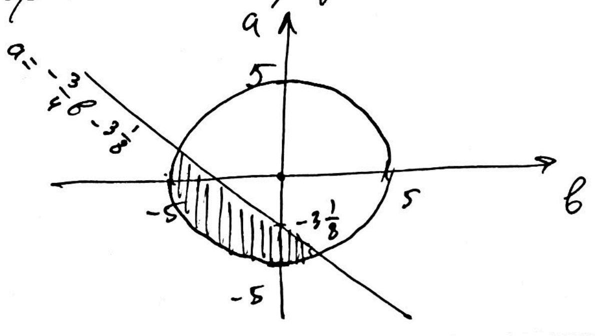
$OQ^2 \le 25$

$OQ \le 5$, т.е рисунок такой:



все такие отрезки OQ сами составляют круг ~~окружность~~ с центром в начале координат и радиусом 5

график в координатах $a(b)$:



A4 D

чистовик лист 4 из 9

II) если $-8a-6b \le 25$

$8a \ge -6b-25$

$a \ge -\frac{3}{4}b-3\frac{1}{8}$;

$a^2+b^2 \le -8a-6b$ (*)

$\cancel{-\frac{3}{4}b-3\frac{1}{8} \le a \le -\frac{3}{4}b}$

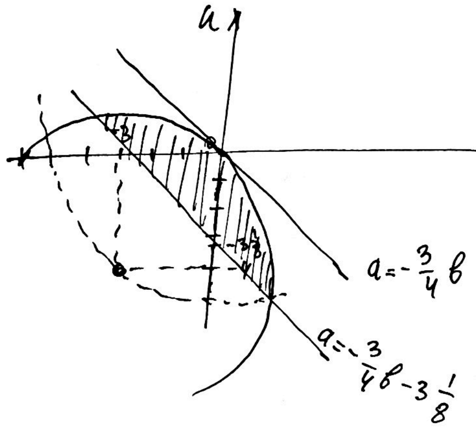
$\cancel{-3\frac{1}{8} \le a+\frac{3}{4}b \le 0 \quad |\cdot 8}$

$\cancel{-25 \le 8a+6b \le 0}$

(*) $(a^2+8a+4^2)+(b^2+6b+3^2) \le 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 5^2$

в $b\cdot a(b)$ — окружность с центром $(-3;-4)$, радиусом 5:



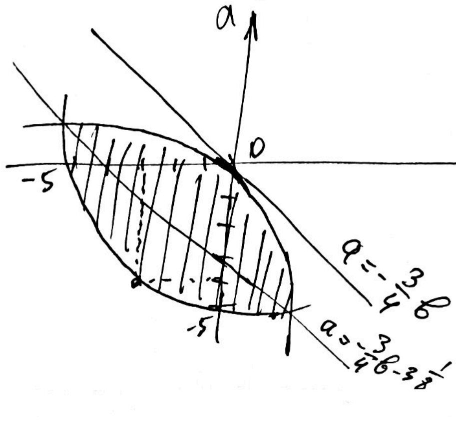
проверим точки пересечения $\begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2=5^2\\ a^2+b^2=5^2\end{cases}$ и

$\cancel{a^2}+8a+16+\cancel{b^2}+6b+9=\cancel{a^2}+\cancel{b^2}$

$8a+6b=-25$

$a=-\frac{3}{4}b-3\frac{1}{8}$, т.е.

эти окружности пересекаются как раз по прямой $a=-\frac{3}{4}b-3\frac{1}{8}$. Объединим два рисунка:



для всех пар $a;b$, принадлежащих данной фигуре система имеет решение

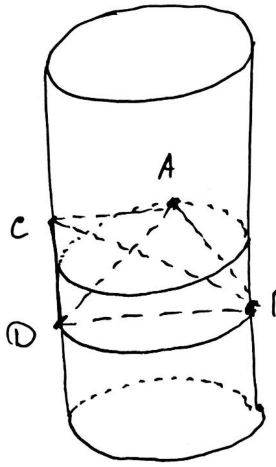
по данному рисунку видно, что сумма a^2+b^2 может принимать любые значения от 0 до 5^2, значит и OQ^2 на графике $y(x)$ тоже, значит фигура M – круг с радиусом $OQ_{max}+5=10$, а значит её площадь $S=\pi R^2=100\pi$.

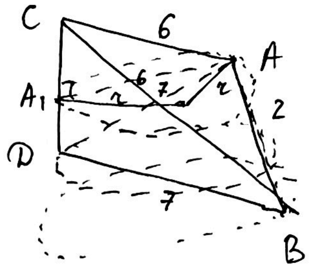
Ответ: $S_M=100\pi$.

(2)

ЧИСТОВИК ЛИСТ 6 ИЗ 9

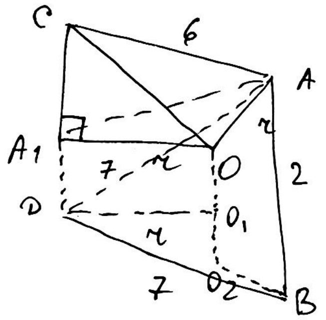
$AC = CB = 6,\ AB = 2,\ AD = DB = 7$





если A, B, D лежат в плоскости, параллельной основаниям цилиндра, то

$$r_ц = r_{впис(ABD)} = \frac{S(ABD)}{p(ABD)} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{7^2-1^2}\cdot 2}{7+1} = \frac{\sqrt{48}}{8} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

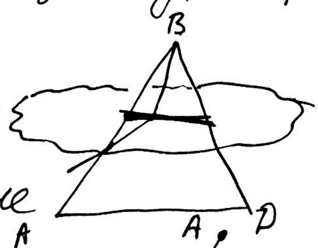


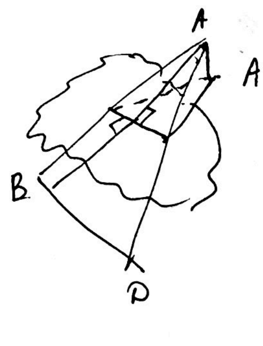
$DD' \perp AB \quad DD' = \sqrt{7^2-1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$CD' \perp AB \quad CD' = \sqrt{6^2-1^2} = \sqrt{35}$

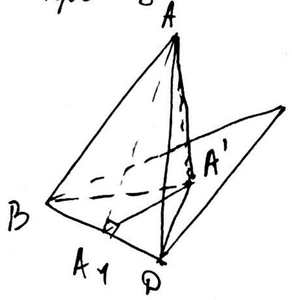
если ~~∠(ABD)~~, угол между (ABD) и основанием цилиндра равен α, то площадь проекции $\triangle ABD$ на плоскость, параллельную основанию равна $S(ABD)\cdot\cos\alpha$, а радиус цилиндра равен

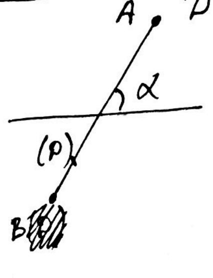
$$r_ц = \frac{S(ABD)\cdot\cos\alpha}{p\ проекции}$$



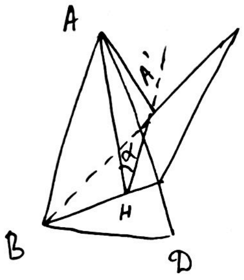


A' - проекция A на основание





Черновик лист 7 из 9



Черновик лист 8 из 9

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_3 + \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{3}{2}(a_1 + a_3)$$

~~III) найдем крайние значения a и в:~~ Черновик

лист 9 из 9

$$\begin{cases} a = -\frac{3}{4}в - 3\frac{1}{8} \\ a^2 + в^2 = 25 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{3}{4}в - 3\frac{1}{8}\right)^2 + в^2 = 25 \quad |\cdot 64$$

$$(6в + 25)^2 + 64в^2 = 64 \cdot 25$$

$$36в^2 + 300в + 25 \cdot 25 + 64в^2 = 64 \cdot 25$$

$$100в^2 + 300в - 1975 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times\; 25 \\ 39 \\ \hline +\; 225 \\ 175 \\ \hline 1975 \end{array}$$

чистовик лист 1 из 7

④ $\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$

$a=3^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$

$b=3^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$

$c=3^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

$НОД(a;b;c)=3^1\cdot 7^1 \Rightarrow \min(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=1$
$\min(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=1$

$НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \Rightarrow \max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=17$
$\max(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=15$

мы знаем максимум и минимум, а между ними показатель могут принимать в случае α 17 значений, в случае β 15 значений

тогда количество различных троек $(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$:

$C_{17}^{1}\cdot C_3^2 - C_3^2$ C_3^2 - max/min могут быть з любые два из трех в тройке

аналогично β:

$C_{15}^{1}\cdot C_3^2 - C_3^2$

~~нужно вычесть~~

C_3^2 нужно вычесть, т.к. иначе два раза учитываются случаи, когда два максимума или минимума, т.к в 17 возможных значений α и max и min входят

ИТОГО: $(C_{17}^{1}-1)C_3^2\cdot(C_{15}^{1}-1)C_3^2=$

$=(17-1)\cdot 3\cdot(15-1)\cdot 3=16\cdot 9\cdot 14=2016$

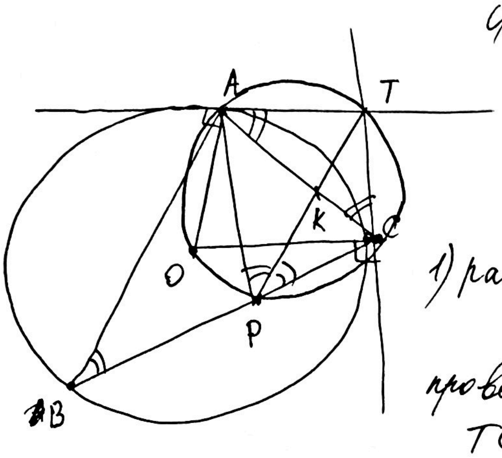
Ответ: 2016.

⑥

Чистовик лист 2 из ~~6~~ 7

$S(APK)=10,\ S(CPK)=6$

а) $S(ABC)=?$



1) рассмотрим 4-х угольник $OATC$:

$\angle OAT=\angle OCT=90^\circ$ (OA и OC - радиусы, проведенные к касательным TA и TC соответственно) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $OATC$ - вписанный $\Rightarrow$ T лежит на окружности, проходящей через A, C, O.

2) $AT=TC$ (отрезки касательных из одной точки) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle TAC$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle TAC=\angle TCA$, обозначим φ

3) $\angle APT=\angle TCA=\varphi$
$\angle TPC=\angle TAC=\varphi$ } вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу

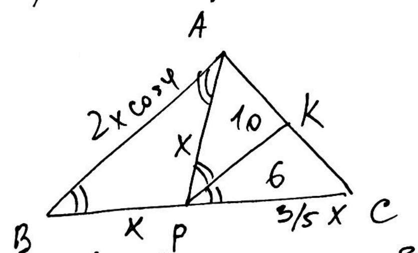
$\angle APC=\angle APT+\angle TPC=2\varphi$

$\angle APC=\angle AOC=2\varphi$ (вписанные)

$\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=\varphi$ (вписанный угол опирается на ту же дугу $\smile AC$ окружности ω, что и центральный)

4) $\angle ABC=\angle KPC=\varphi$
$\angle KCP$ - общий $\Big\}\Rightarrow \triangle ABC\sim\triangle KPC\Rightarrow\angle BAC=\angle PKC\Rightarrow$
$\Rightarrow AB\parallel PK$ (соответственные углы равны)

рассмотрим $\triangle ABC$:



$AB\parallel PK\Rightarrow\angle BAP=\angle APK=\varphi$ внутр. н/л

$\frac{S(APK)}{S(PKC)}=\frac{AP\cdot \cancel{PK}}{\cancel{PK}\cdot PC}=\frac{AP}{PC}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

пусть $AP=x$, $PC=\frac{3}{5}x$

$\angle ABP=\angle PAB=\varphi\Rightarrow\triangle ABP$ - равнобедренный $\Rightarrow AP=BP=x$

$S(APC)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{3}{5}x\cdot\sin 2\varphi=16\Rightarrow x^2\cdot\sin 2\varphi=\frac{16\cdot 10}{3}$

Чистовик лист 3 из 7

$\cancel{5a)}$ $AB = 2x\cos\varphi$

$S(ABC) = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2x\cos\varphi\cdot(x+\frac{3}{5}x)\cdot\sin\varphi =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}x^2\cdot\sin 2\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{16\cdot 10}{3} = \frac{128}{3}$

б) $\angle ABC = \varphi = arctg\, 2 \Rightarrow tg\,\varphi = 2$

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{\sqrt5}{5}$

$\sin\varphi = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5} = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\varphi = 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi = 2\cdot\frac{2\sqrt5}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{5} = \frac{4}{5}$

$x^2\cdot\sin 2\varphi = \frac{16\cdot 10}{3}$

$x^2 = \frac{16\cdot 10}{3\cdot\sin 2\varphi} = \frac{16\cdot 10\cdot 5}{3\cdot 4} = \frac{200}{3} = \frac{400}{6}$

$x = \sqrt{\frac{400}{6}} = 20\frac{\sqrt6}{6} = \frac{10\sqrt6}{3}$

$BC = \frac{8}{5}x = \frac{8}{5}\cdot\frac{10\sqrt6}{3} = \cancel{80} \frac{16\sqrt6}{3}$

$AB = 2x\cos\varphi = 2\cdot\frac{10\sqrt6}{3}\cdot\frac{\sqrt5}{5} = \frac{4\sqrt{30}}{3}$

по th косинусов в $\triangle ABC$:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\varphi = \left(\frac{4\sqrt{30}}{3}\right)^2 + \left(\frac{16\sqrt6}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{4\sqrt{30}}{3}\cdot\frac{16\sqrt6}{3}\cdot\frac{\sqrt5}{5} =$

$= \frac{16\cdot 30}{9} + \frac{256\cdot 6}{9} - 2\cdot\frac{64\cdot 30\cdot 6}{9\cdot 5} = \frac{160+512-2\cdot 64\cdot 2}{3} =$

$= \frac{160+512-256}{3} = \frac{160+256}{3} = \frac{416}{3}$

$AC = \sqrt{\frac{416}{3}} = \sqrt{\frac{2^5\cdot 13}{3}} = 4\sqrt{\frac{26}{3}} =$

$= \frac{4\sqrt{78}}{3}$

$$\begin{array}{r} 256 \\ +160 \\ \hline 416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 416 & 2 \\ 208 & 2 \\ 104 & 2 \\ 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Ответ: а) $S_{ABC} = \frac{128}{3}$

б) $AC = \frac{4\sqrt{78}}{3}$.

Черновик лист 4 из 7

$(2r)^2 \cancel{x} = R^2 + TC^2$

$\underline{TC \cdot AC}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} x \cdot x \cdot \sin 2\varphi = 16$

$(x + \frac{3}{5}x) \cdot 2x\cos\alpha \cdot \sin\alpha = ?$

$x^2 \cdot \sin 2\varphi = \frac{16 \cdot 10}{3}$

$\frac{8}{5} x^2 \cdot \sin 2\varphi = \frac{8}{\cancel{5}_1} \cdot \frac{16 \cdot \cancel{10}^2}{3} = \frac{16 \cdot 16}{3} = \boxed{\frac{256}{3}}$

max 17 min | max min 16 | ~~max~~ 16 max min | min max 16

16 min max | min 16 max

max max min

min

$\frac{3!}{2!\,1!} = 6$

$\frac{3!}{2!\,1!}$

$16 \times 9 = 144$ $\quad 4^2 \cdot 3^2$

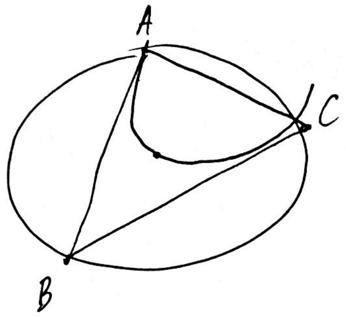
$144 \times 14 = 2016$ $\quad 12^2$

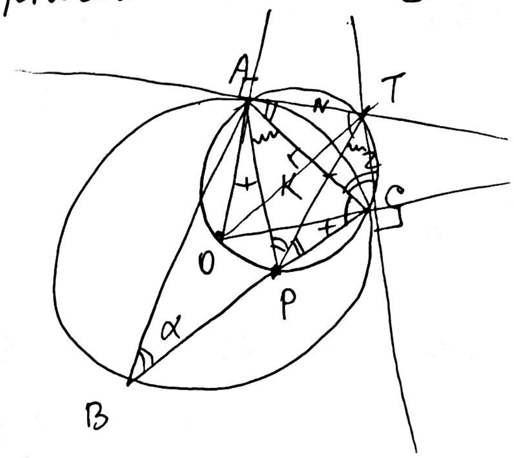
576

144

2016

Черновик лист 5 из 7





$S(APK) = 10$

$S(CPK) = 6$

$S(ABC) = ?$

$\begin{cases} \angle ABC = \operatorname{arcctg} 2 ? \\ AC = ? \end{cases}$

в $AOCT$: $\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow T \in$ окружности OT – диаметр

$\angle ABC = \alpha$

$\angle AOC = 2\alpha$

$AT = TC$

пусть $\angle TAC = \varphi$ $\quad \angle ATC = 180^\circ - 2\varphi$

$\Leftarrow$ ~~AT~~ $\angle ACT = \varphi$ $\quad \angle AOC = 2\varphi$

$\angle ABC = \varphi$

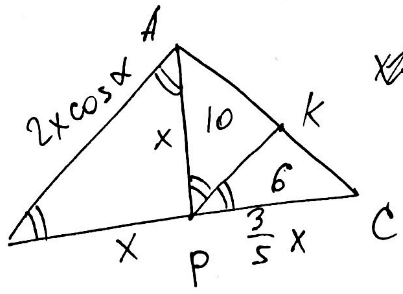
$\angle ACP = 90^\circ - \varphi$ $\qquad AC \cdot CP \cdot \sin(90^\circ - \varphi) = 16$

$\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по двум углам $\Rightarrow PK \parallel AB$

$\frac{S(APK)}{S(CPK)} = \cancel{AP \cdot BPK \cdot \sin\varphi} \; \frac{AP \cdot PK}{PK \cdot PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

пусть $AP = x$, $PC = \frac{3}{5}x$

$\frac{AP \cdot PC}{R \cdot R} = \cancel{8}$



~~x.PK.~~

$2R = \frac{AC}{\sin\varphi}$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$ Черновик лист 6 из 7

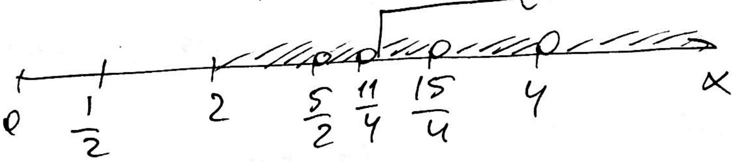
$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{2x-1}{4}\right) = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}($

пусть $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=t$, тогда $\cancel{x-\frac{1}{2}=2t}$

$\cancel{x-\frac{2}{4}=2t}$

$\cancel{x-\frac{11}{4}=2t}$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{2}>1, & x\neq\frac{11}{4} \\ \frac{x}{2}\neq 2, & \frac{x}{2}>\frac{1}{4} \\ \frac{x}{2}\neq 0, & x\neq\frac{15}{4} \\ \frac{x}{2}\neq\frac{5}{4}, & x>\frac{11}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x>2, & x\neq\frac{11}{4} \\ x\neq 4, & x>\frac{1}{2} \\ x\neq 0, & x\neq\frac{15}{4} \\ x\neq\frac{5}{2} \end{cases}$



$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^{2a} = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{a^2} = \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\left|\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right|^{a} = \left|x-\frac{11}{4}\right|$

Черновик лист 7 из 7

(4)

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

$a = 3^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1}$

$b = 3^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2}$

$c = 3^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3}$

$$\begin{cases} НОД = 3^1 7^1 \\ НОК = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

$\max(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=17$ $\quad \min(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)=1$

$\max(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=15$ $\quad \min(\beta_1;\beta_2;\beta_3)=1$

Без ограничения общности положим $\cancel{\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3}$ $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3$, тогда $\alpha_3 = 17$, $\alpha_1 = 3$

α_2 – любое целое от 3 до 17, всего 15 штук

$(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ – тройка в которую

$\cancel{C^1_{15}\cdot 2 + C^1_{15}}$ $\quad C^1_{17}\cdot 2\cdot C^1_{15}\cdot 2 = 4\cdot\frac{17!}{16!\cdot 1!}\cdot\frac{15!}{14!\cdot 1!} =$

$= 4\cdot 17\cdot 15 = 17\cdot 60 = 102$

$17 \times 6 = 102$

(5)

$$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2\log_{|x-\frac{11}{4}|}\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-1>0 \\ \frac{x}{2}-1\ne\pm1 \\ x-\frac{11}{4}\ne 0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ x-\frac{11}{4}\ne 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ne 1 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-1\ne 0 \\ \frac{x}{2}-1\ne\pm1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \; * \\ x-\frac{11}{4}\ne 0 \\ x-\frac{11}{4}\ne 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \; * \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ne 1 \\ x-\frac{11}{4}\ne 0 \\ \frac{x}{2}-1>0 \end{cases}$$