Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101567**

ID профиля: **867806**

Вариант 19

Черновик

1.

$a_9 a_{17} > S+12$

$a_{11} a_{15} < S+47$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$a_{11} = a_1 + 10d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{15} = a_1 + 14d$

$S = a_1 +$

$$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > S+12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+47 \end{cases}$$

$a_1^2 + 8a_1d + 16a_1d + 128d^2 > S+12$

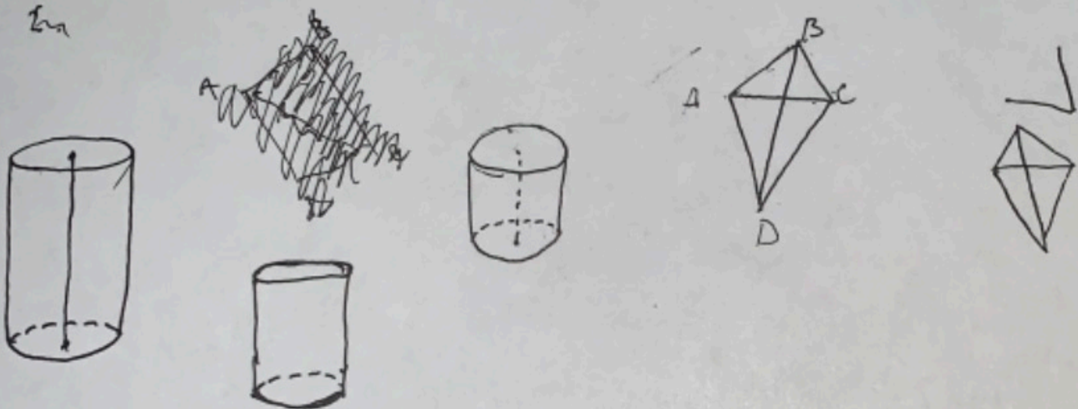
$a^2 + 24a_1d + 128d^2 > S+12$

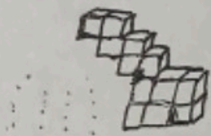
$a_1^2 + 10a_1d + 14a_1d + 140d^2 < S+47$

$a^2 + 24a_1d + 140d^2 < S+47$

1 3 5 7 9 11 13

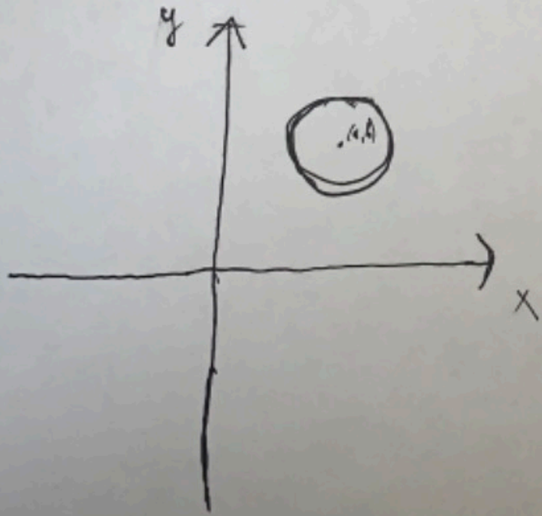
$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > S+12 \\ a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < S+47 \end{cases}$$





3. $$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 25 \quad (R=5^2) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$$

минимум из двух чисел.



21101567 (U867806 M1301331)

Чистовик 1

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \end{cases}$

Решим второе неравенство:

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$

1) Если $-8a-6b \geq 25$, $a^2+b^2 \le 25$

Это неравенство — круг с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 5

2) Если $-8a-6b < 25$

$a^2+b^2 \le -8a-6b$

$a^2+8a+16-16+b^2+6b+9-9 \le 0$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$

Это неравенство — так же круг с центром в точке $(-4;-3)$ и радиусом 5.

Т.к. необходимо учитывать условие $\min(-8a-6b, 25)$, то все решения второго неравенства исходной системы — это пересечение двух окружностей радиуса 5 и с центрами в $(0;0)$ и $(-4;-3)$.

Теперь решим первое неравенство исходной системы

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$ — это также круг с центром в точке $(a;b)$ и радиусом 5, но решая 2ое неравенство, мы уже получили геометрическое место точек — всех возможных значений (a, b). Если для каждой такой точки $(a;b)$ нарисовать окружность с центром в ней и радиусом 5, то в результате получится эллипс.

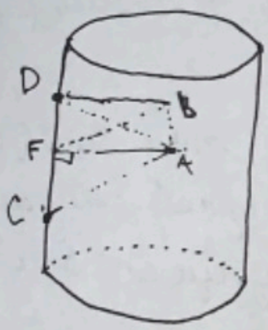
21101567 (U867806 M1301331)

Чистовик 2

Найдем его полуоси. Обозначим их за A и B.
Расстояние между центрами $(0;0)$ и $(-4;-3)$ равно $\sqrt{4^2+3^2}=5$. Для малой плоти имеем: $2B=5+2R=15$, где R - это радиус окружностей — решений первой системы (он тоже равен 5). Для большой полуоси: $2A=5\cdot\sqrt{3}+2R=5\cdot\sqrt{3}+2$ отсюда $A=\frac{5(\sqrt{3}+2)}{2}$, $B=\frac{15}{2}$.
Тогда площадь полученного эллипса равна: $\pi AB=$
$=\frac{75(\sqrt{3}+2)\cdot\pi}{4}$

Ответ: $\frac{75(\sqrt{3}+2)}{4}\pi$

2.



Дано: 1) ABCD - тетраэдр.
2) $AB=2$; $AC=CB=6$; $AD=DB=7$
3) CD параллельна оси цилиндра
4) R — минимальный

$CD-?$

Решение
1) $CD\perp$ плоскости основания цилиндра, точки A и B находятся на равном расстоянии от C и D.
Значит, AB параллельна основанию
2) $\triangle DAC=\triangle DBC$ (по трем сторонам), значит высоты AF и BF попадают в одну точку и равны:
3) Рассмотрим $\triangle BFA$, BA - хорда, значит, что радиус цилиндра минимальный тогда, когда эта хорда диаметр
$R\geq\frac{2}{2}$; $R\geq1$.

4) Положим, $R=1$, BA - диаметр $\Rightarrow AF=BF=\sqrt{2}$
$DF=\sqrt{49-2}=\sqrt{47}$; $FC=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$

Чистовик 3

5) Аналогично, $DF=\sqrt{47}$, $FC=\sqrt{34}$; $DC=\sqrt{47}-\sqrt{34}$

~~4 ч 5 вар~~

6) треугольники возможны

Ответ. ~~$DC=\sqrt{47}\pm\sqrt{34}$~~ $DC=\sqrt{47}\pm\sqrt{34}$

1. Запишем условие как систему уравнений:
(a_i — i-ый элемент последовательности, d — шаг последовательности, все числа целые и d — положительное (по условию)).

$$\begin{cases} a_9a_{17} > S+12, \\ a_{11}a_{15} < S+47; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > S+12, \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+47; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1^2+24d)a_1+120d > S+12, \\ (a_1^2+24d)a_1+140d < S+47; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1-S > -120d+12, \\ a_1^2+23da_1-S < -140d+47 \end{cases}$$

Заметим, что слева получилось одинаковые выражения, тогда можем домножить второе на -1, и затем сложить их:

$$-140d+47 > -120d+12$$

$$20d < 35$$

Тогда в силу условий получаем, что единственный вариант это $d=1$ и мы можем выразить S через a_1 и d:

$S = \frac{(a_1+a_1)4}{2} \cdot 8207 \cdot Cdot \cdot 14 = 7(2a_1+13d)$ Чистовик 4.

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1-7(2a_1+13) > 12-120, \\ a_1^2+24a_1-7(2a_1+13) < 47-140\cdot 13; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1+144 > 36 \\ a_1^2+24a_1+144 < 51; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+12)^2 > 36, \\ (a_1+12)^2 < 51; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1+12 \in (-\infty;-6)\cup(6;+\infty). \\ a_1+12 \in (-\sqrt{51};\sqrt{51}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1+12 \in (-\infty;-6)\cup(6;+\infty) \\ a_1+12 \in [-7;7]. \end{cases}$$

Тогда т.к. все элементы элементы последовательности положительные и целые $a_1+12=-7$ или $a_1+12=7$

Ответ: -19 и -5.

21101567 (U867806 M1301331)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101567**

ID профиля: **867806**

Вариант 19

Черновик.

4. $НОД\,(a;b;c)=21$

$НОК\,(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15}$

$НОК\,(a;b;c)=3^{15}\cdot 7^{15}\cdot 3^{2}=21^{15}\cdot 3^{2}$

$36\cdot 16=216+36=576$ $\quad$ $576\cdot 14=2304+576=8064$

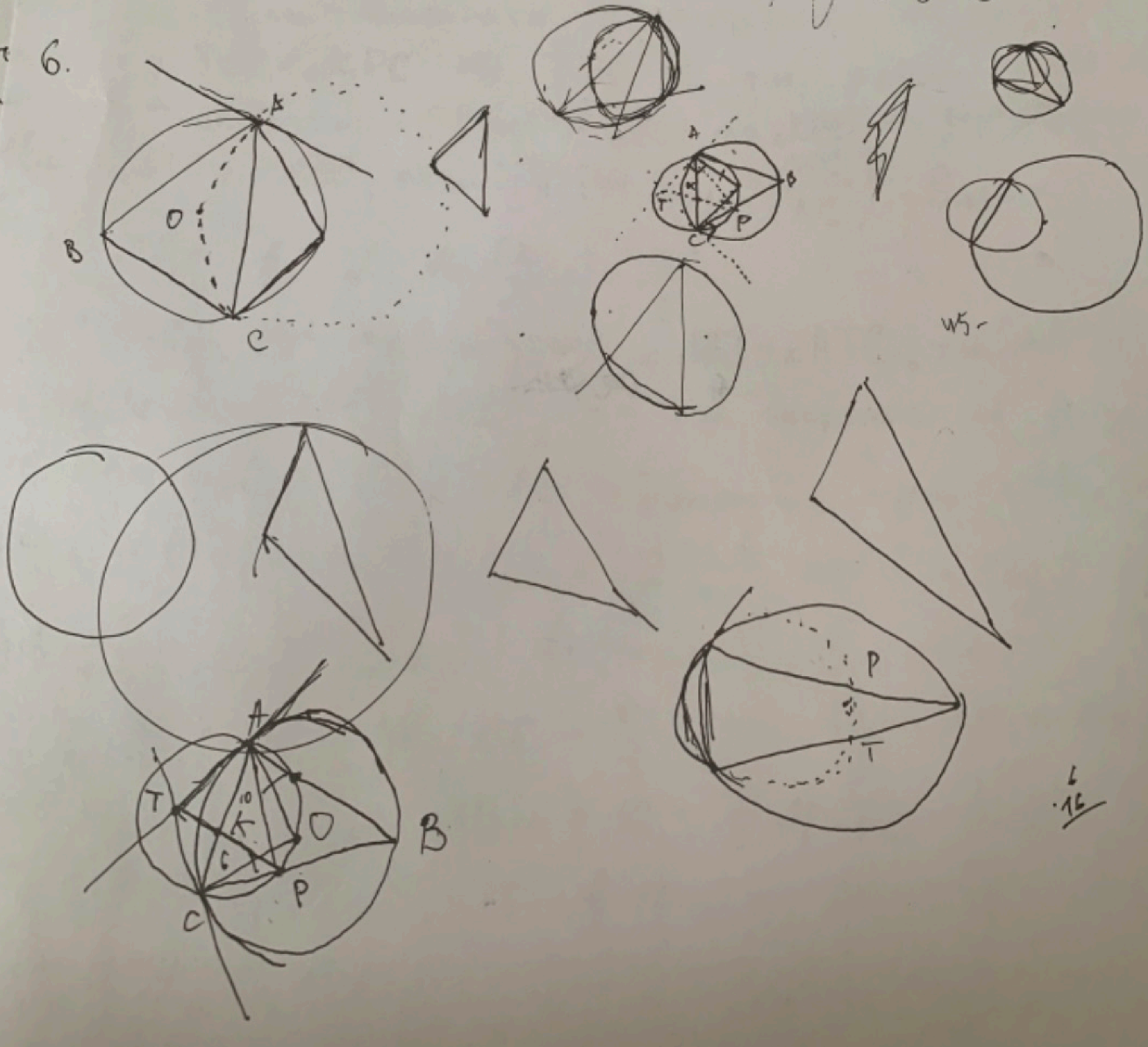
log

5. $\log\left(\frac{x}{2}+1-1\right)^{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^{2}$

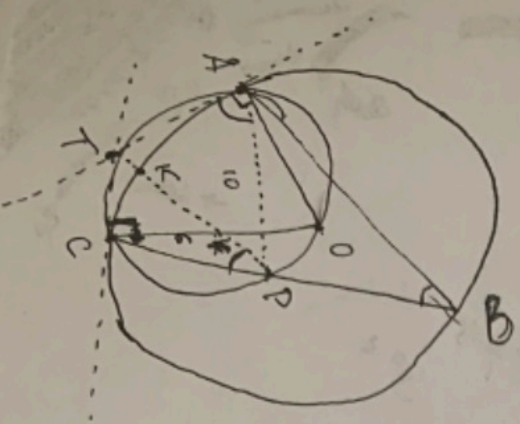
$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)+2\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{11}{4}\right)=2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)+1$

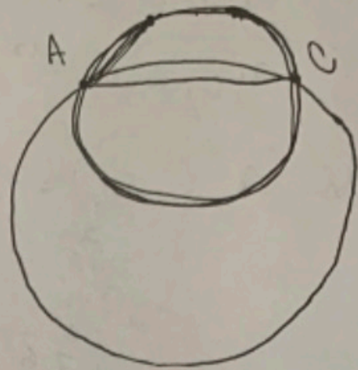
$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)+2\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{11}{4}\right)=2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

6.



Черновик





[illegible]

4. Заметим, что так как НОК — это произведение 3 и 7, то каждое из чисел представляется в следующем виде

$n = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$

Причём, у каждого из 3х чисел степени у 3 и 7 не меньше 1 (в противном случае НОД был бы не 21)

Тогда степенью у 3 и 7, которые встречаются в НОК — это максимальные возможные степени и хотя бы одно число, у которого в разложении есть такая степень, должно быть аналогичным хотя бы одно число, у которого степень ~~при~~ у ~~тройки~~ 3 будет единица (1) и должно быть хотя бы одно, у которого степень у 7 будет 1 (необязательно, что это должно быть одно и то же число)

Посчитаем теперь число вариантов, выбрав степень ~~3~~ тройки: 1) три варианта выбрать число со степенью 1

2). два вар. выбрав число со степенью 17

3) оставшиеся принимают любое знач. от 2 до 16 включительно,

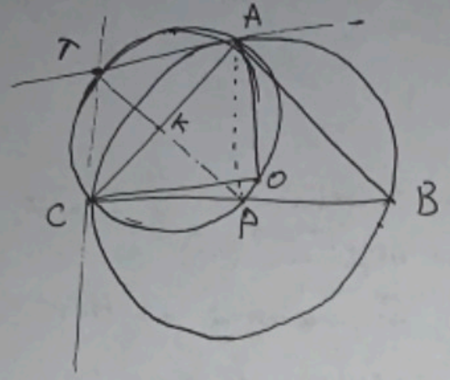
Так же отдельно посчитаем случай, когда 2 числа с максимальной степенью или миним. Это равно числу способов выбрать 2 числа из трех, то есть три варианта и так будет и для 17 и для 1 => всего 6. Просуммируем все варианты и всего вариантов выбрать степень для 2: 6·16 ~~+~~

Аналогично с поправкой на то, что рассматриваем промежуток от 1 до 15. Можем посчитать варианты для 7: 6·14.

Ответ: 36·16·14 = ~~8064~~ 8064

21101567 (U867806 M1301332)

7)



А)

1) $AK : KC = S_{APK} : S_{PKC} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

2) $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, т.к. AT и CT – касательные, ~~следовательно $\angle OAT$ и $\angle OCT = 180^\circ$~~, O, A, C, T – лежат на одной окружности $\Rightarrow$ $\Rightarrow O, A, T, C, P$ – лежат на одной окружности.

3) $\angle ABC = \angle TAC$ (по теореме об угле между касательной (AT) и хордой (AC)) и $\angle PAC = \angle TPC$, как вписанные, опирающиеся на дугу TC то есть $\angle ABC = \angle KPC \Rightarrow TP \parallel AB$, т.к. равны соответственные углы $\angle KPC$ и $\angle ABC \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ по двум углам $\angle ABC = \angle KPC$, $\angle ABC$ – общий. 4) Так $S_{\triangle ABC} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 \cdot S_{TPC} =$
$= \left(1+\frac{5}{3}\right)^2 \cdot 6 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 6 = \frac{64}{9} \cdot 6 = \frac{128}{3}$

Б) 1) $AT = CT$ (как отр. касат.) $\Rightarrow \angle ACT = \angle ATC$, т.к. $\triangle ATC$ – равнобедренный. 2) $\angle APT = \angle ACT$, т.к. они опираются на дугу $AC \Rightarrow \angle APC = 2\angle KPC = 2\angle ABC = 2\,\mathrm{arctg}\,2$, пусть $\angle ABC = \alpha =$ $= \mathrm{arctg}\,2 \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos^2\alpha = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} =$
$= 2\,\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \frac{1}{1+(\sin^2\alpha : \cos^2\alpha)} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha : (1+\mathrm{tg}^2\alpha) = 2 \cdot 2 : 1 + 2^2 =$
$= \frac{4}{5}$, 3) $AP : PC = AK : KC = \frac{5}{3}$, т.к. PK – биссектриса в тр-ке APC, а $S_{APC} = 10+6 = 16 = \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin\angle APC =$
$= \frac{1}{2} PC \cdot \frac{5}{3} PC \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3} PC^2 \quad PC^2 = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$, $PC = 2\sqrt{6}$

Чистовик 3

$AP = \frac{5}{3} PC =$

$= \cancel{...} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{10}{3}\sqrt{6}$

$AC = \sqrt{AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos\angle APC}$ – по теореме косинусов

$AC = \sqrt{\left(10/3 \cdot \sqrt{6}\right)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2 - 2 \cdot \frac{10}{3}\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \left(-\sqrt{1-\frac{4}{5}}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{200}{3} + 24 + 80 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{200}{3} + 24 + \frac{240}{5}} = \sqrt{\frac{2080}{15}} =$

$= 2 \cdot \sqrt{\frac{520}{15}} = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$

Ответ: $\cancel{4\sqrt{...}}$ $\cancel{\frac{4\sqrt{26}}{3}}$ $4 \cdot \sqrt{\frac{26}{3}}$