Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101562**

ID профиля: **66663**

Вариант 19

№1. Чистовик $16 \cdot 8 = 2 \cdot 64 = 128$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{14}$ – целые числа a_1 – ?

$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(a_1 + a_{14}) = (2a_1 + 13d) \cdot 7 = 14a_1 + 91d$

$a_9 \cdot a_{17} > S + 12$

$a_{11} \cdot a_{15} < S + 47.$

$\begin{cases} (a_1 + 8d) \cdot (a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12 & (1) \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47 & (2) \end{cases}$

(1) $a_1^2 + 8a_1d + 16a_1d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

(2) $a_1^2 + 10a_1d + 14a_1d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$

$+\begin{cases} 14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 \\ a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \end{cases}$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{24a_1d} + 128d^2 + \cancel{14a_1} + \cancel{91d} + 47 > \cancel{14a_1} + \cancel{91d} + 12 + \cancel{a_1^2} + \cancel{24a_1d} + 140d^2$

$35 > 12d^2$

$2 < \frac{35}{12} < 3$ $\frac{35}{12} > d^2$, но $a_1, d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = \pm 1.$

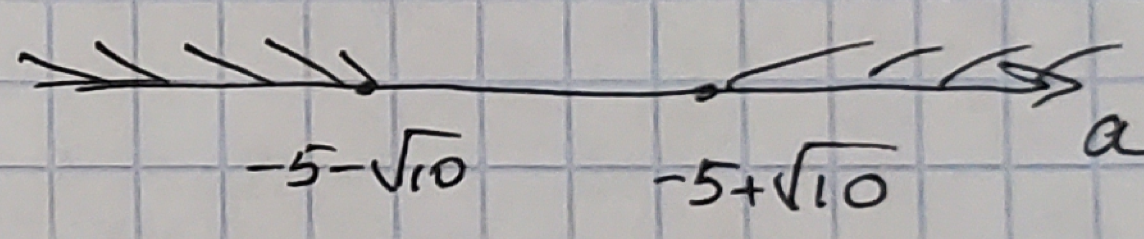
$d = 1$: $\begin{cases} (a_1 + 8) \cdot (a_1 + 16) > 14a_1 + 91 + 12 & 1). \\ (a_1 + 10)(a_1 + 14) < 14a_1 + 91 + 47 & 2). \end{cases}$

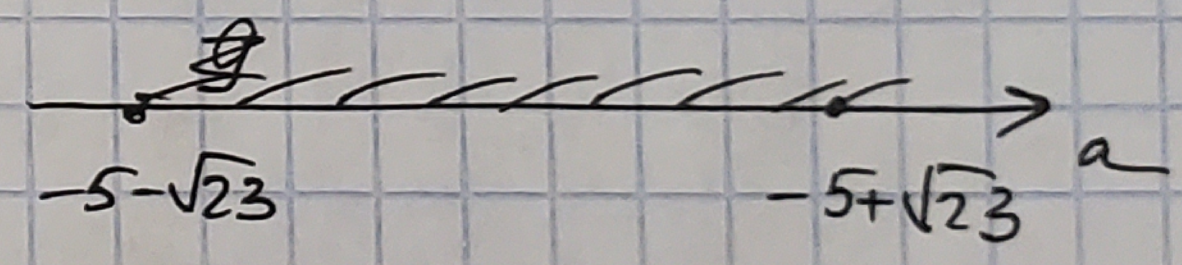
1) $a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103$

$a_1^2 + 10a_1 + 15 > 0$ $D = 100 - 4 \cdot 15 = 40$

$a_{11} = \frac{-10 + 2\sqrt{10}}{2} = -5 + \sqrt{10}$

$a_{12} = \frac{-10 - 2\sqrt{10}}{2} = -5 - \sqrt{10}$





2) $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$ $\begin{array}{r} 91 \\ +47 \\ \hline 138 \end{array}$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 100 - 8 = 92$ $a'_{11} = \frac{-10 + 2\sqrt{23}}{2} = -5 + \sqrt{23}$

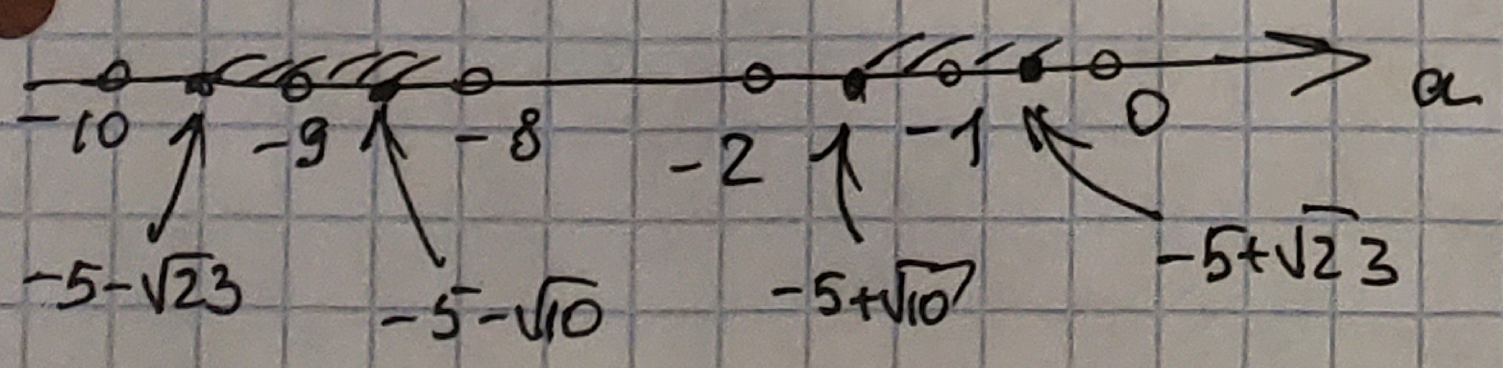
$92 = 4 \cdot 23$ $a'_{12} = \frac{-10 - 2\sqrt{23}}{2} = -5 - \sqrt{23}$

Т.к. $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16} = 4$, то $-1 > -5 + \sqrt{10} > -2$ $\Rightarrow$

$-8 > -5 - \sqrt{10} > -9$

Т.к. $4 = \sqrt{16} < \sqrt{23} < \sqrt{25} = 5$, то $0 > -5 + \sqrt{23} > -1$ $\Rightarrow$

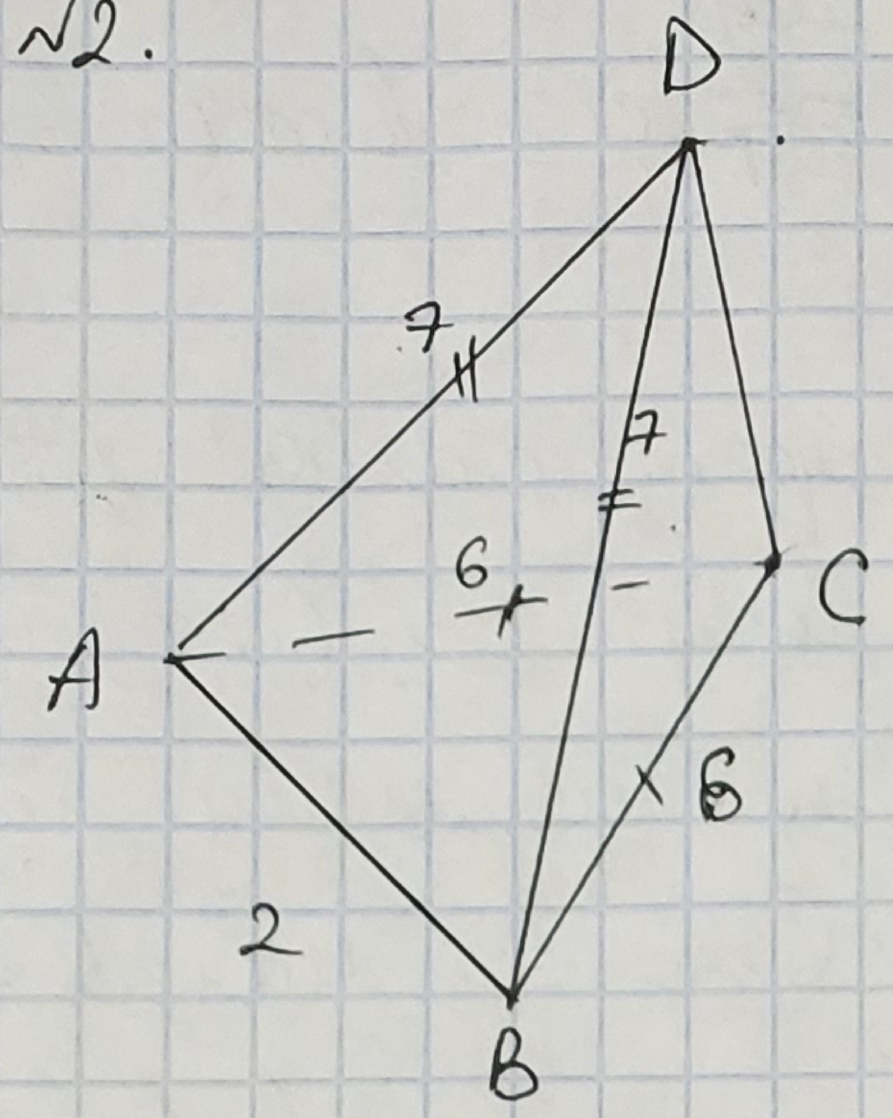
$-9 > -5 - \sqrt{23} > -10$



$\Rightarrow a_1$ может принимать значения -1 или -9. Ответ: $a_1 = \{-1; -9\}$.

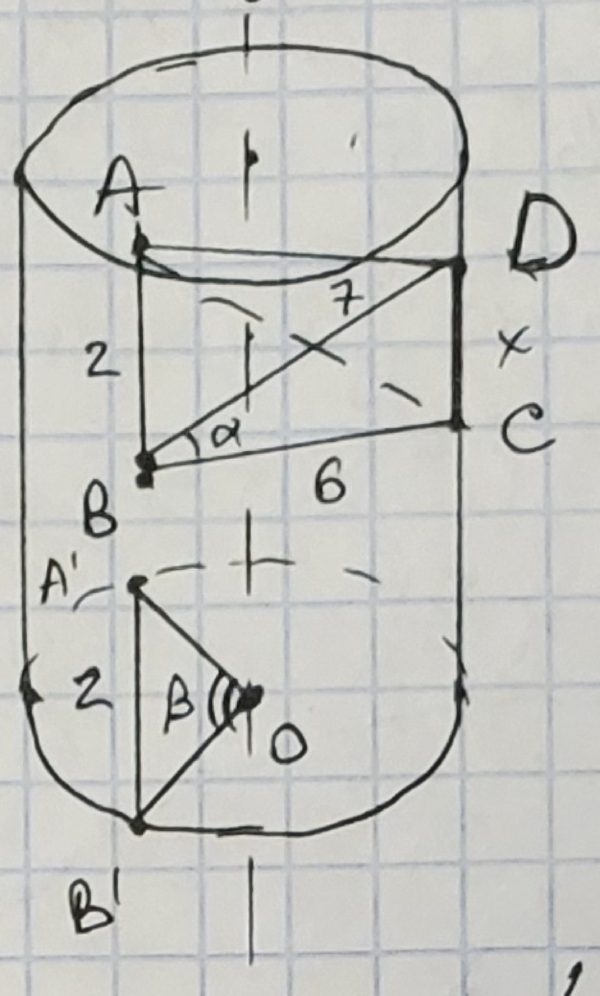
Чистовик

№2.



А Исходя из усл. данный тетраэдр выглядит так как на рис. слева.

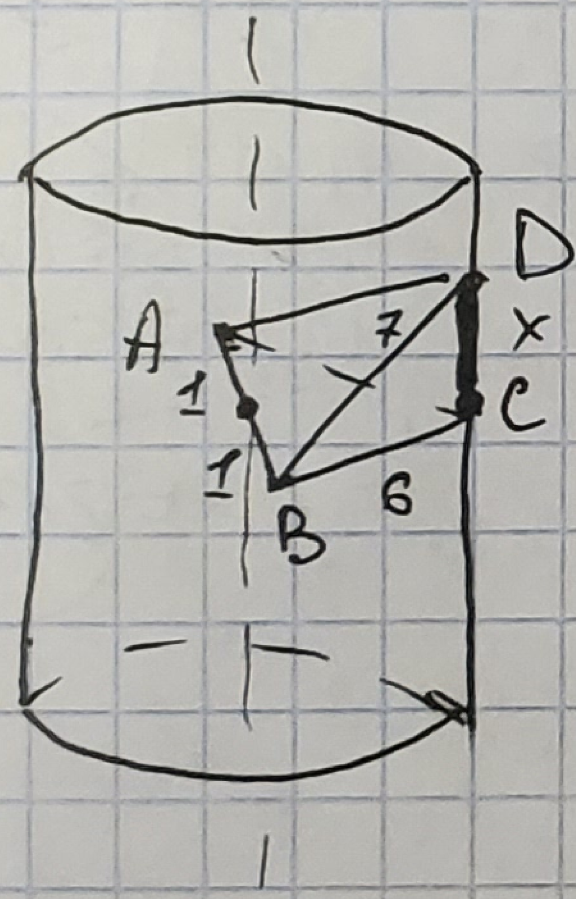
Пусть $CD = x$, $\angle DBC = \alpha$

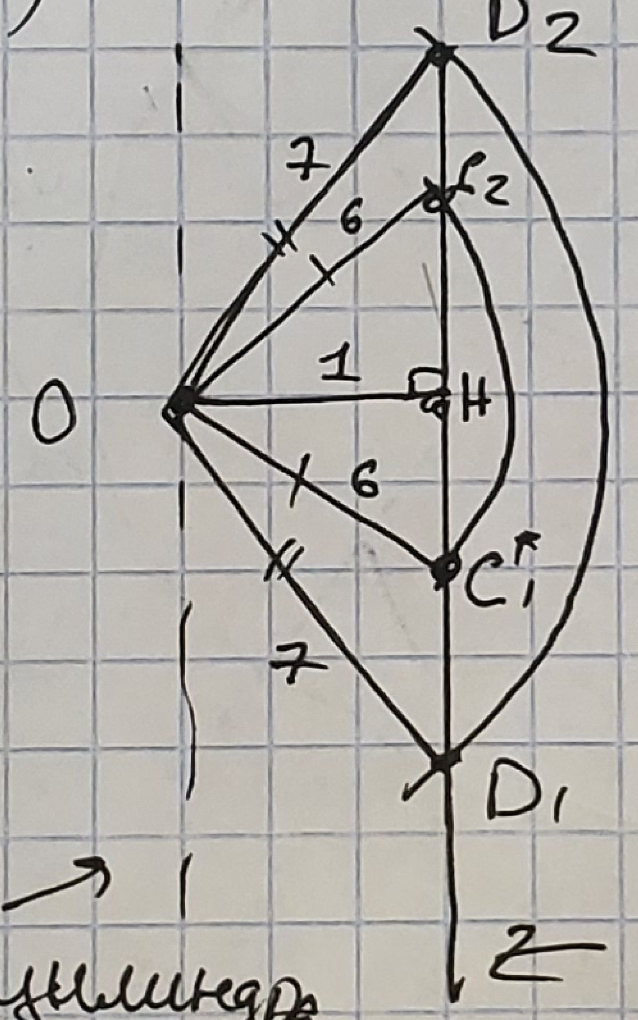


Сделаем проекцию AB на нижн. основание цилиндра и назов. её $A'B'$. O – ц. основания, $\angle B'OA' = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow R = \frac{1}{\sin\beta}$, но т.к. R – min, то $\sin\beta$ – MAX $\Rightarrow \beta = 90^\circ$. $\Rightarrow \Delta A'OB'$ – п/у $\Rightarrow$

$\Rightarrow O$ – сер. $A'B'$ (т.к. $R = 1$)





Ось цилиндра

бок. пов-сть.

C_1, C_2; D_1 и D_2 – т., где могут расп. C и D, т.к. $BC = AC$, $BD = AD$ – const.

$OH = r = 1 \Rightarrow C_1H = C_2H$ (т.к. ΔC_1OC_2 – р/б $\Rightarrow OH$ – выс., мед.) $= \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$.

$D_1H = D_2H$ (т.к. ΔD_1OD_2 – р/б $\Rightarrow OH$ – выс., мед.) $= \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow CD$ может быть равен $4\sqrt{3} - \sqrt{35}$ (C_1D_1 или C_2D_2) или $4\sqrt{3} + \sqrt{35}$ (C_1D_2 или C_2D_1)

Ответ: $CD = \{4\sqrt{3} - \sqrt{35};\ 4\sqrt{3} + \sqrt{35}\}$.

Черновик

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 & (1)\\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) & (2)\end{cases}$$

(1) — ~~окр~~ шар. с ц. в т. $(a;b)$ и $r=5$.

(2) Заметим, что $\min(-8a-6b, 25)$ не будет больше 25 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$ — ~~окр~~ шар с ц. $(0;0)$ и $r=5$, у которого есть пустые зоны, т. е. это часть исх. шара с ц. в т. $(0;0)$ и $r=5$. $a^2+b^2 \ge 0 \Rightarrow -8a-6b \ge 0 \Leftrightarrow 4a+3b \le 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b \le -\frac{4}{3}a$

~~Т.к. $a^2+b^2 \le 25$, то~~

$a \in [-5;+5]$

$b \in [-5;+5]$, но $4a+3b \le 0$.

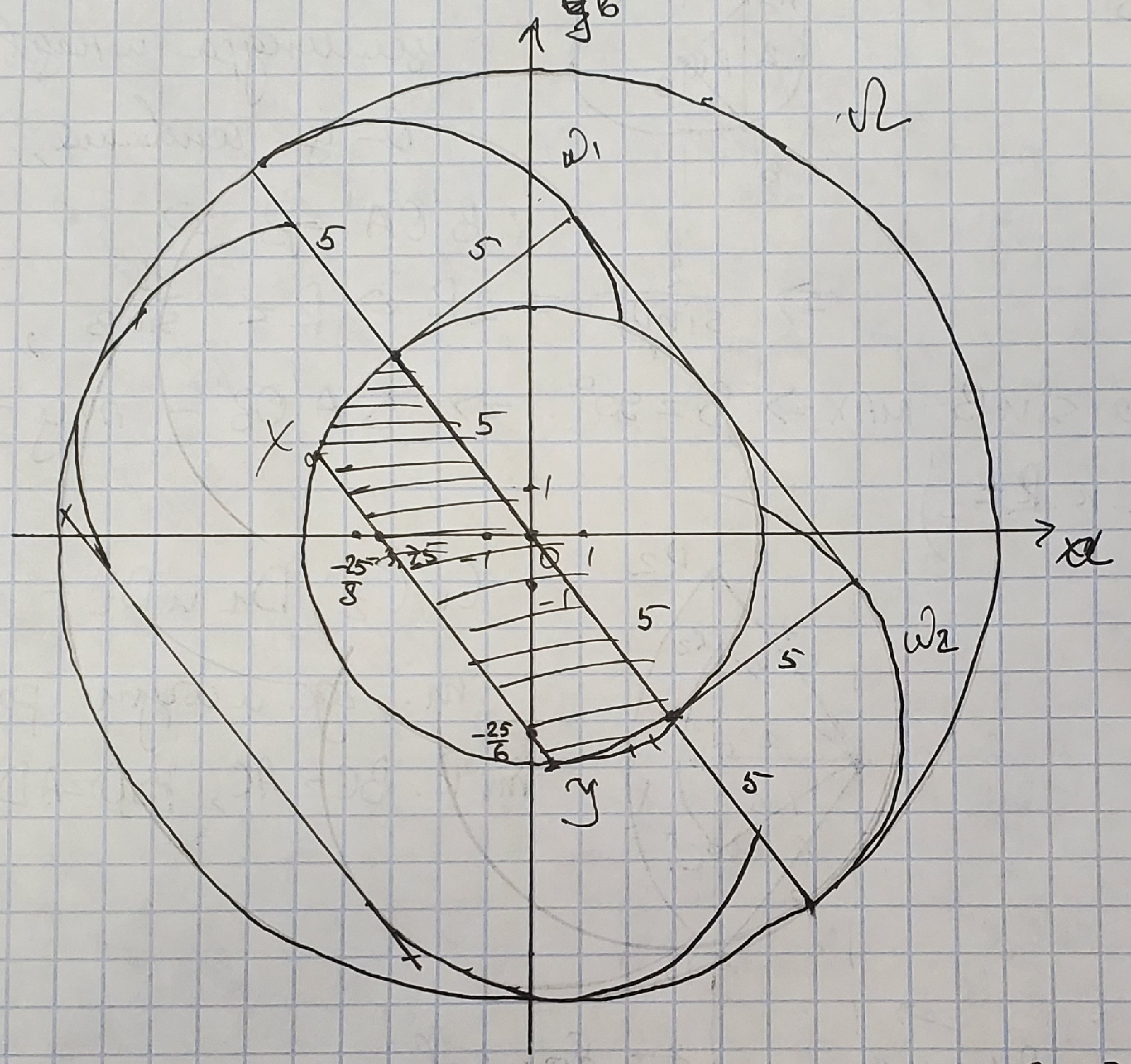
$20+3b \le 0$
$-20+3b \le 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |b| \ge 5 - \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $4|a|$

$4a+15 \le 0$
$4a-15 \le 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \in [-3{,}75; 3{,}75]$



Г-м, когда $-8a-6b \ge 25 \Rightarrow b \le \frac{-8a-25}{6}$

Заштрихованная обл. — обл. допустимых знач. a и b, но фигура M постр. из всех т. (x,y) : $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$, т. е. заштрих. обл. — область, где могут быть центры шара из (1). $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Провед. окр. Ω с ц. $(0;0)$ и $r=10$. и отсеч. лишние обл-ти.

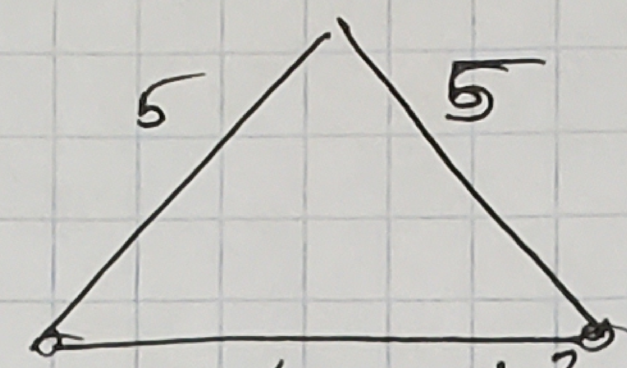
Прямая $b = -\frac{4}{3}a$ делит окр Ω пополам.

~~Площ~~ S_M над. пр. $b = -\frac{4}{3}a$. равна: $\dfrac{\frac{\pi\cdot 5^2}{2}+\frac{\pi\cdot 5^2}{2}+5\cdot 10\cdot 2}{2} =$

$= \frac{\pi\cdot 5^2}{2} + 5\cdot 10 = \frac{25\pi}{2}+50.$

Чистовик

№3 $b = -\frac{8a-25}{6}$.



$\left(-\frac{8a-25}{6}\right)^2 + a^2 = 25$ $\left(\frac{8a-25}{6}\right)^2 + a^2 = 25$ $|\cdot 36$

$64a^2 - 400a + 625 + 36a^2 = 900$

$100a^2 - 400a - 275 = 0$. $|:25$

$4a^2 - 16a - 11 = 0$.

$D = 16^2 + 16\cdot 11 = 16\cdot 27 = (4\cdot 3)^2\cdot 3$

$a_1 = \frac{16+12\sqrt{3}}{8} = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$

$a_2 = \frac{16-12\sqrt{3}}{8} = \frac{4-3\sqrt{3}}{2}$

$a_1 = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$: $b = \frac{-16-12\sqrt{3}-25}{6} = \frac{-41-12\sqrt{3}}{6}$.

$a_2 = \frac{4-3\sqrt{3}}{2}$: $b = \frac{-16+12\sqrt{3}-25}{6} = \frac{-41+12\sqrt{3}}{6}$.

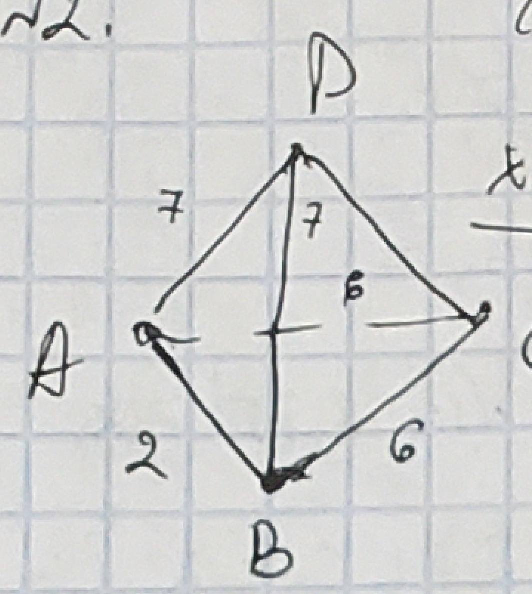
$XY = \sqrt{\left(\frac{4+3\sqrt{3}}{2} - \frac{4-3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-41-12\sqrt{3}}{6} - \frac{-41+12\sqrt{3}}{6}\right)^2} =$

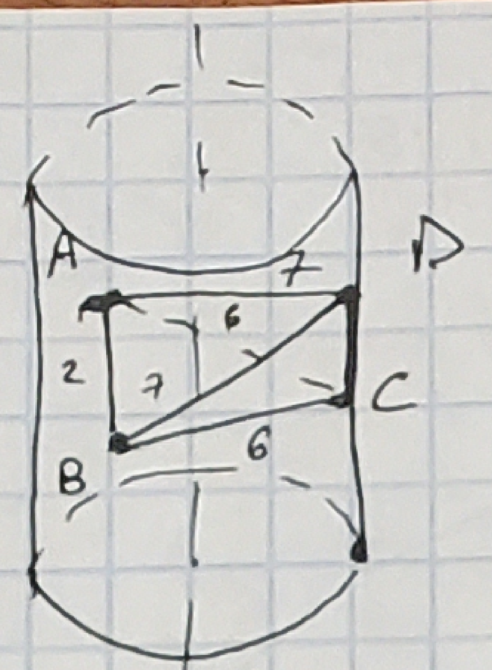
$=$

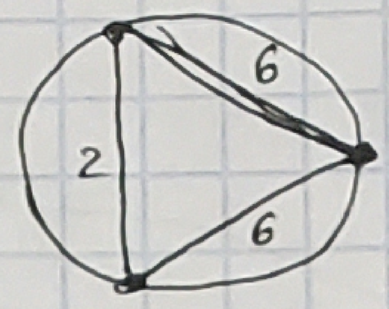
Черновик

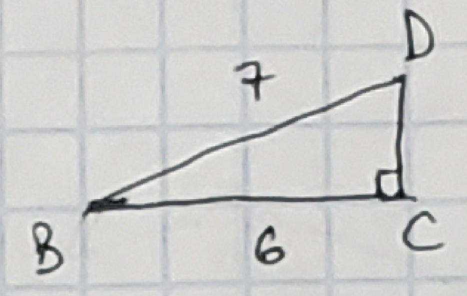
№2. $16\cdot 25$

$$\begin{array}{r} \times\, 25 \\ 36 \\ \hline 900 \end{array}$$



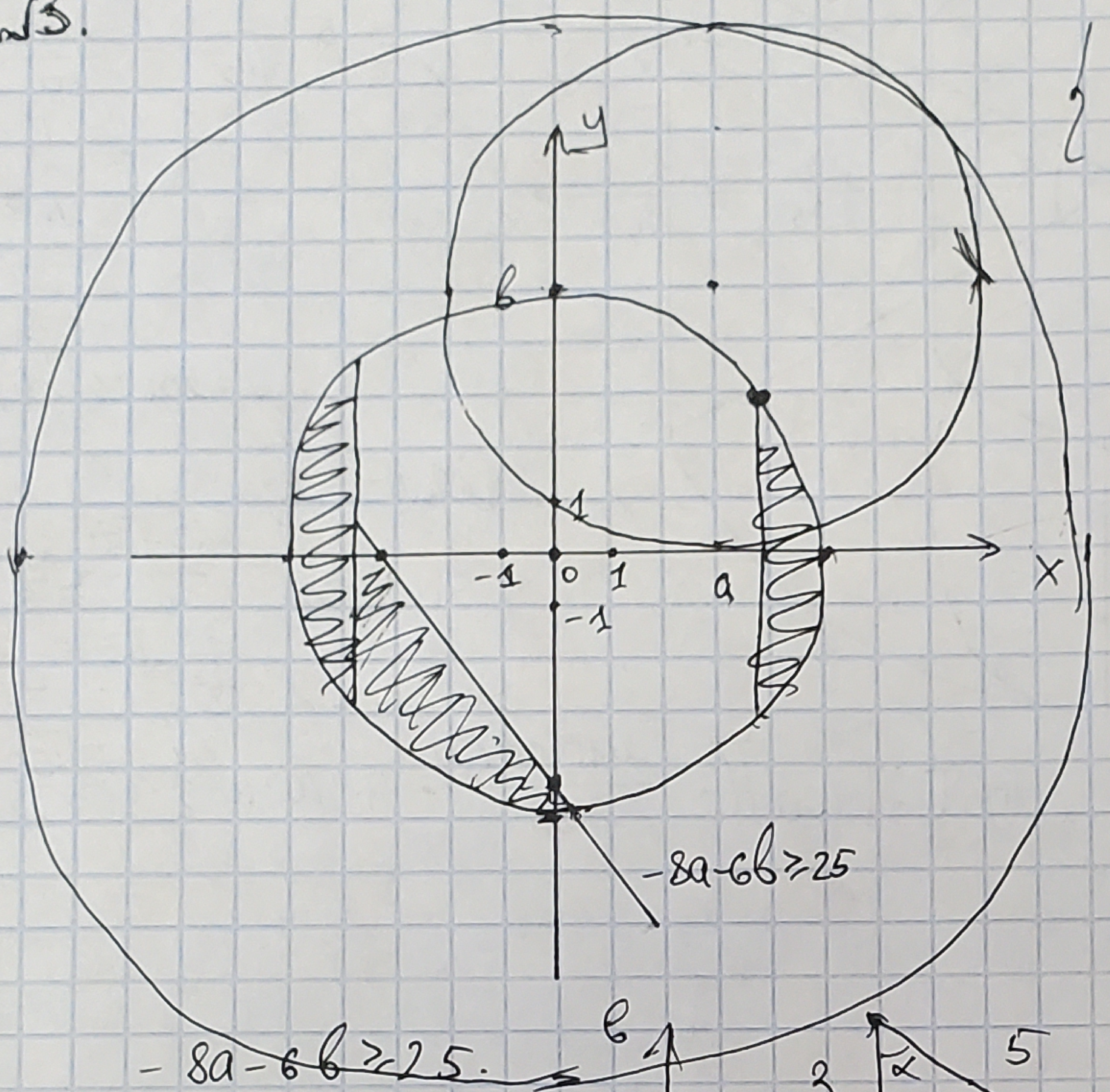






$CD = \sqrt{7^2-6^2} = \sqrt{49-36} = \underline{\sqrt{13}}$

№3.



$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25). & (2) \end{cases}$$

(1) шар с $r=5$ и ц. в т. $(a;b)$

(2) $-8a-6b \ge 25$

$-8a-6b \ge 0.$

$4a+3b \le 0.$

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b; 25) \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2 \le 25$, т.е.

$a \in [-5;5]$, $b \in [-5;5]$.

$4a \le -3b$

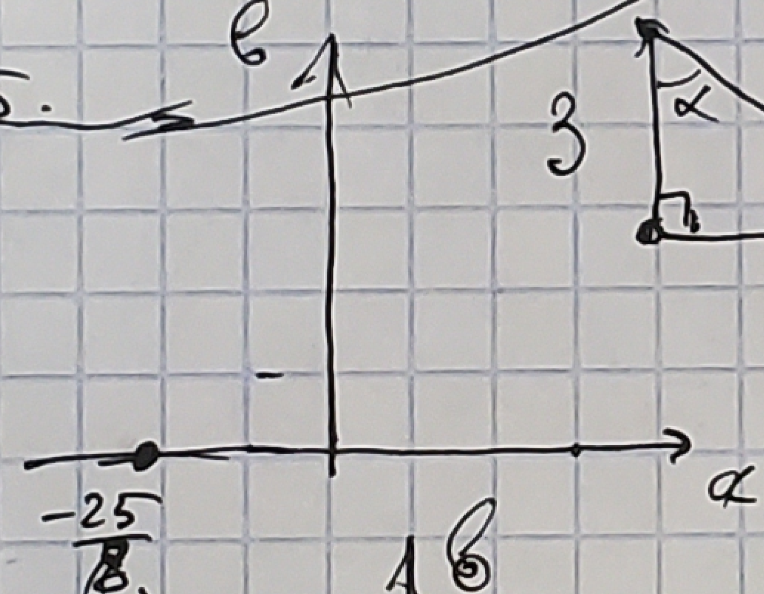
$\left[\begin{array}{l} 20 \le -3b \\ -20 \le -3b \end{array}\right.$, но тогда $b \notin [-5;5]$

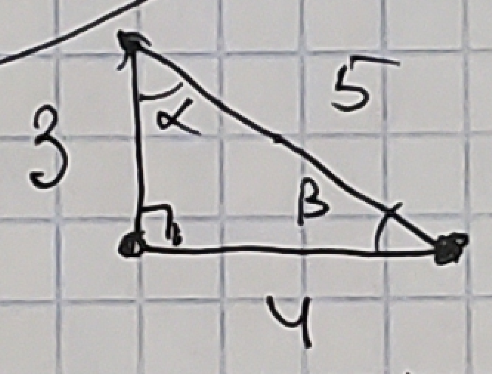
$\left[\begin{array}{l} 4a \le -15 \\ 4a \ge -15 \end{array}\right. \Rightarrow a \in [-3{,}75; 3{,}75]$

$-8a-6b \ge 25.$

$a=0 \Rightarrow$

$a \ge \frac{-25-6b}{8}$





$\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$5 = 2R.$

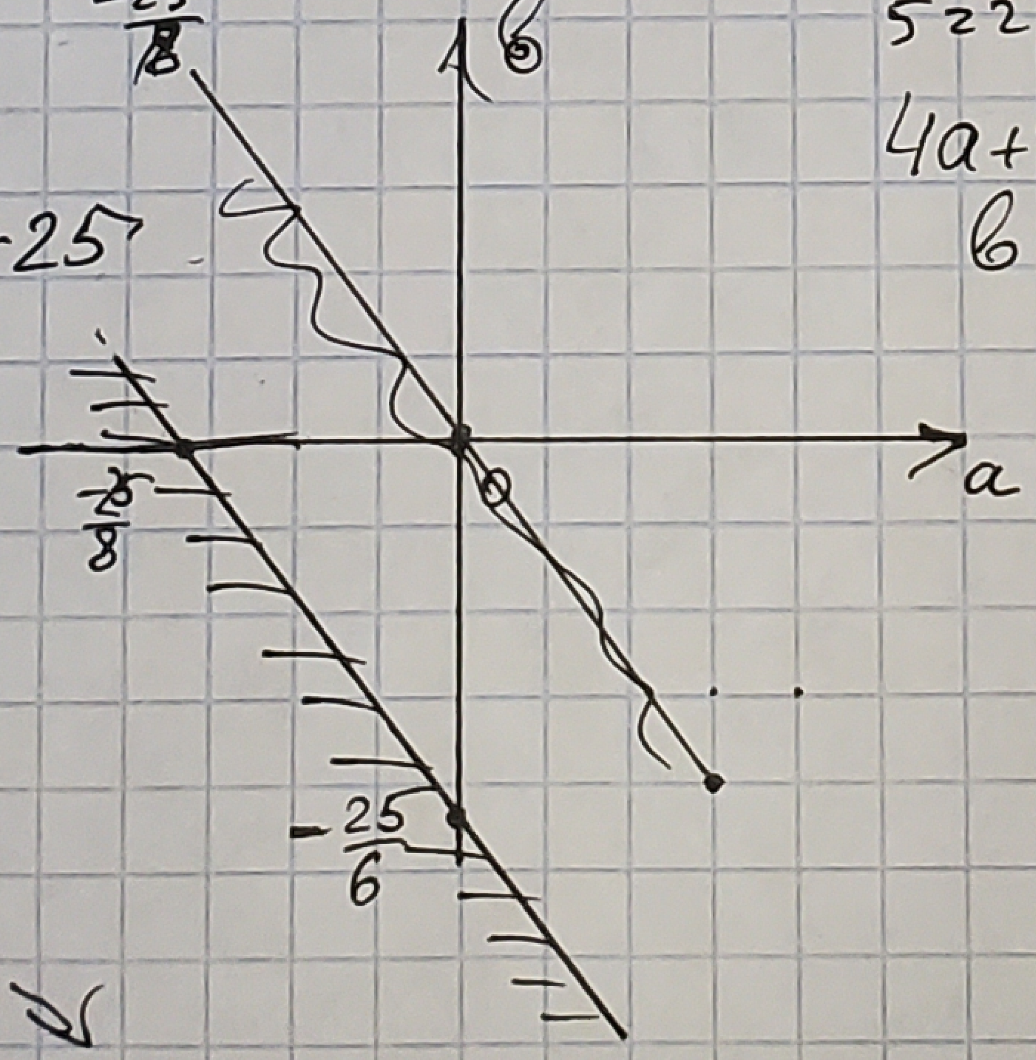
$4a+3b \le 0.$

$b \le -\frac{4}{3}a$

$-8a-6b \ge 25$

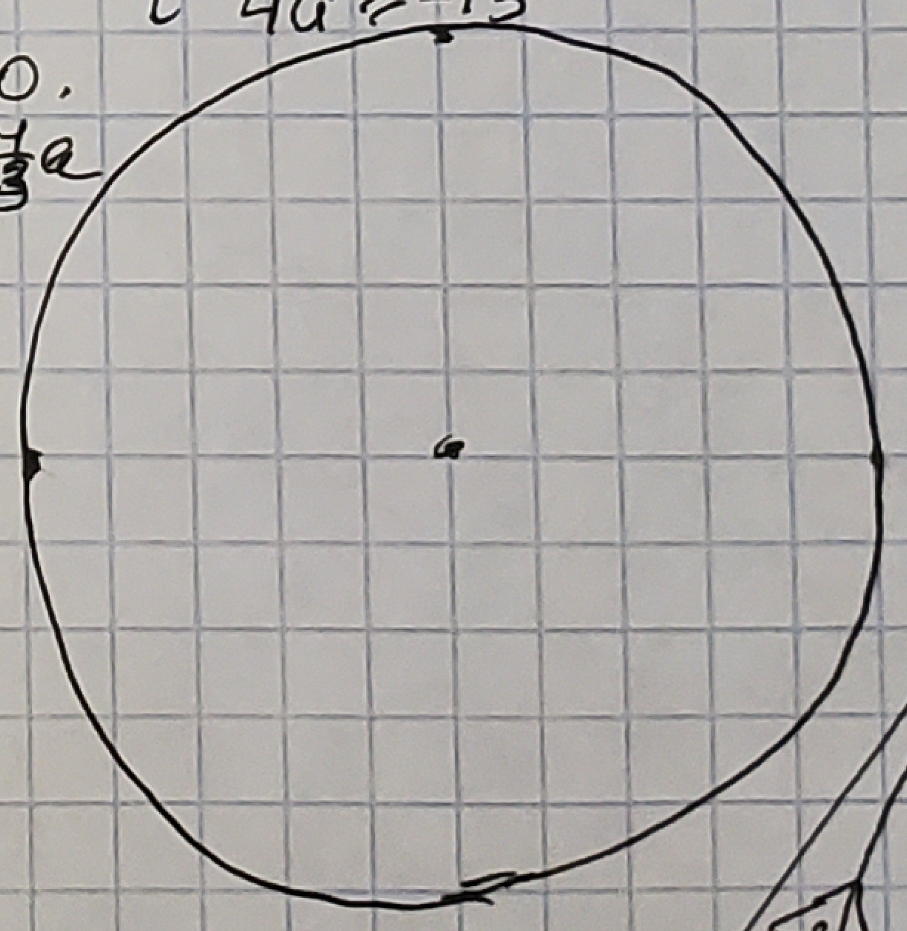
$-8a-25 \ge 6b$

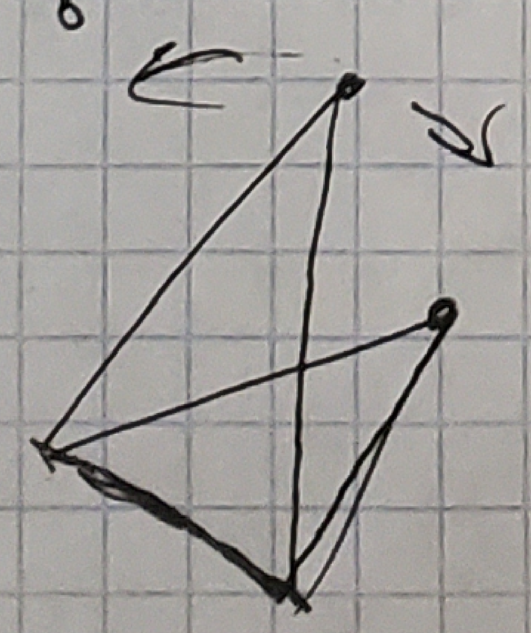
$b \le -\frac{8a-25}{6}$

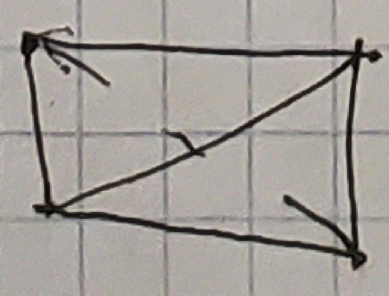


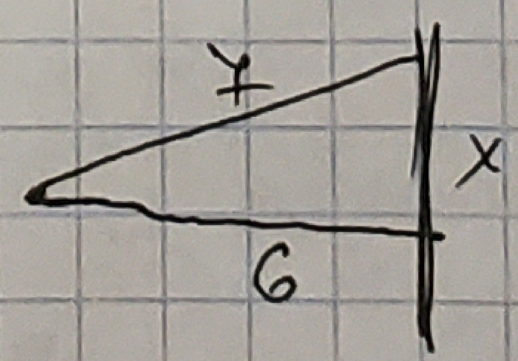
$b=0 \Rightarrow -8a-25=0$

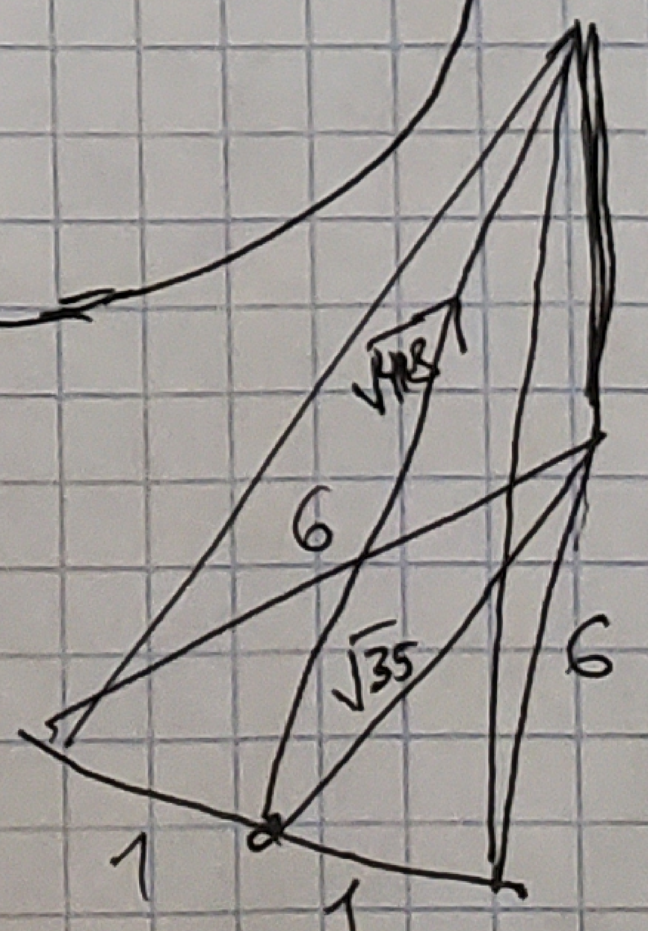
$a = -\frac{25}{8}$











$48 = 4\cdot 12 =$

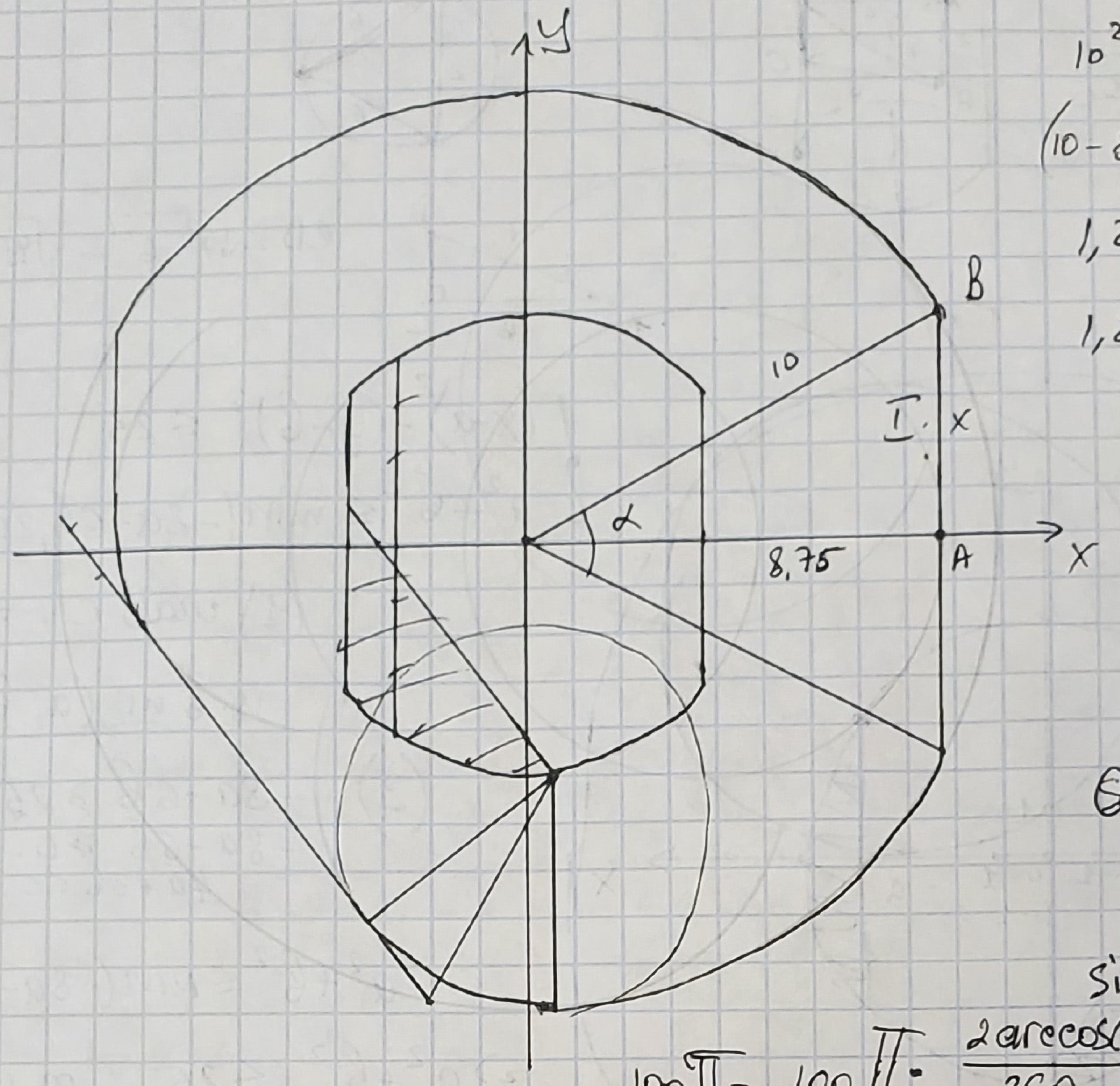
$= 8\cdot 6 = 16\cdot 3$

черновик.

$$\begin{array}{r|l} 1875 & 125 \\ -125 & \overline{15} \\ \overline{625} & \end{array}$$

Пл. окр.: $\pi R^2 = 100\pi$.

I.: $A(8{,}75;0)$



$10^2 - 8{,}75^2 = x^2$

$(10-8{,}75)\cdot(10+8{,}75) = x^2$

$1{,}25 \cdot 18{,}75 = x^2$

$1{,}25^2 \cdot 15 = x^2$

$x = \frac{5}{4}\sqrt{15}$

$\frac{8{,}75}{10} = \frac{1{,}25\cdot 7}{1{,}25\cdot 8} = \frac{7}{8}$

$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{7}{8}\right)$

$\cos\alpha = \frac{7}{8}$,

$\sin\alpha = \frac{5\sqrt{15}}{40} = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

$\sin 2\alpha = 2\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = \frac{7\sqrt{15}}{32}$.

$100\pi - 100\pi\cdot\frac{2\arccos\left(\frac{7}{8}\right)}{360} + 10\cdot 10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{7\sqrt{15}}{32}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101562**

ID профиля: **66663**

Вариант 19

~~Вариант 13~~.   Чистовик

№4.

(a,b,c) — ?

$\begin{cases} НОД(a,b,c)=21 \\ НОК(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$ $\Rightarrow$ ~~Пусть~~ Заметим, что все числа сост. из произв. простых множ., а именно 3 и 7.

Пусть $a=3^{\alpha}\cdot 7^{\beta}$,
$b=3^{k}\cdot 7^{l}$,
$c=3^{s}\cdot 7^{t}$, тогда: $\begin{cases} НОД(a,b,c)=3^{\min(\alpha,k,s)}\cdot 7^{\min(\beta,l,t)}=3\cdot 7 \\ НОК(a,b,c)=3^{MAX(\alpha,k,s)}\cdot 7^{MAX(\beta,l,t)}=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$

$\min(\alpha,k,S)=1$ $\overset{\min}{\cancel{MAX}}(\beta,l,t)=1$

$MAX(\alpha,k,S)=17$ $MAX(\beta,l,t)=15$

$\Rightarrow$ среди чисел α,k,s есть $1, 17$, а третье число $[1;17]$ $\Rightarrow$
среди чисел β,l,t есть $1, 15$, а 3-е число $\in[1;15]$.

$\Rightarrow$ вариантов степеней α,k,s,β,l,t $15\cdot 17$.

~~Кол-во способов расст. α,k,S в числах a,b,c = C_{15}^{3}~~ $\Rightarrow$
~~степеней β,l,t в a,b,c = C_{17}^{3}~~

α,k,S: для каждого варианта степеней есть 6 расстановок,

$\Rightarrow$ ~~всего k разл. троек $(a,b,c)=C_{15}^{3}\cdot C_{17}^{3}$~~

то же самое с β,l,t $\Rightarrow$

Ответ: $C_{15}^{3}\cdot C_{17}^{3}$. $\Rightarrow$ всего $6^{15}\cdot 6^{17}=6^{32}$

Ответ: 6^{32}.

№5.

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

Пусть $a=\frac{x}{2}-1$, $b=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$, $c=x-\frac{11}{4}$.

$\log_{a^2}b$, $\log_{\sqrt{c}}a$, $\log_b c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_a b$, $2\log_c a$, $2\log_b c$.

Перемножим данные логарифмы:

$\frac{1}{2}\log_a b\cdot 2\log_c a\cdot 2\log_b c = 2\,\frac{\cancel{\log b}}{\cancel{\log a}}\cdot\frac{\cancel{\log a}}{\cancel{\log c}}\cdot\frac{\cancel{\log c}}{\cancel{\log b}}=2$

Чистовик

Пусть данные логарифмы равны $A, B, C,$

тогда: $\begin{cases} A\cdot B\cdot C = 2 \\ A = B \\ C = A+1 \end{cases} \Rightarrow (A+1)\cdot A^2 = 2.$

$A^3 + A^2 - 2 = 0$

$(A-1)\cdot(A^2+2A+2) = 0$

$A = 1,\ B = 1,\ C = 2.$

Воспольз. схем. Горнера:

	1	1	0	-2
1	1	2	2	0

$A^2 + 2A + 2 = 0 \quad \geq 0$

$D = 4 - 4\cdot 2 < 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \\ \sqrt{x - \frac{11}{4}} = \frac{x}{2} - 1 \\ \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 \\ \left(\sqrt{x - \frac{11}{4}}\right)^2 = \frac{x}{2} - 1 \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^4 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \\ \sqrt{x - \frac{11}{4}} = \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

~~Данные уравнения~~

Из начальной (в усл.) записи логарифмов получ.:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 > 0 \\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 \neq 1 \\ \sqrt{x-\frac{11}{4}} > 0 \\ \sqrt{x-\frac{11}{4}} \neq 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \neq 1 \end{cases}$$

(1): $\frac{x^2}{4} - x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$x - \frac{11}{4} = \frac{x^2}{4} - x + 1$

$\frac{x^2}{4}$

(2)

(1): Из запис. ограничений!

$\frac{x^2}{4} - 1{,}5x + \frac{5}{4} = 0 \mid \cdot 4$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$D = 36 - 20 = 16$

$x_1 = \frac{6+4}{2} = 5$

$x_2 = \frac{6-4}{2} = 1$, но $\sqrt{1 - \frac{11}{4}} \not> 0 \Rightarrow \varnothing$

$x - \frac{11}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$

$\frac{x}{2} = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}$

$\frac{x}{2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = 5.$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - x + 1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}. \\ x - \frac{11}{4} = \frac{x^2}{4} - x + 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x - \frac{11}{4} \end{cases}$$

$\frac{x^2}{4} - 2x + \frac{15}{4} = 0 \mid \cdot 4$

$x^2 - 8x + 15 = 0.$

$(x-3)(x-5) = 0$

$x_1 = 3$

$x_2 = 5.$

(1): $x = 5.$

Чистовик

$36\cdot4=120+24=$
$=144$

(2): $\frac{x^2}{4}-x+1=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$.

$\frac{x^2}{4}-1{,}5x+\frac{5}{4}=0$

$x^2-6x+5=0$.

$\cancel{x=3}$ $D=36-20=16$

$x_1=\frac{6+4}{2}=5$

$x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{1}{2}-\varnothing$.

$x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{16}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$.

$x^2-6x+\frac{125}{16}=0\ |\cdot16$.

$\cancel{16x^2}$ $D=36-\frac{125}{4}=\frac{36\cdot4-125}{4}=\frac{19}{4}$

$x_1=\frac{6+\frac{\sqrt{19}}{2}}{2}=3+\frac{\sqrt{19}}{4}$

$x_2=\frac{6-\sqrt{19}/2}{2}=3-\frac{\sqrt{19}}{4}$.

У этих трёх уравнений нет общих корней $\Rightarrow\varnothing$.

$x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-1$.

$\frac{x}{2}=\frac{11}{4}-1$

$\frac{x}{2}=\frac{7}{4}\Rightarrow x=3{,}5$

(3): $\left(\frac{x}{2}-1\right)^4=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$.

~~$\left(\frac{x}{2}-1\right)^4=\frac{1}{2}\cdot(x-$~~

$\frac{x^4}{16}-4\cdot\frac{x^3}{8}+6\cdot\frac{x^2}{4}-4\cdot\frac{x}{2}+1=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ |\cdot16$

$x^4-8x^3+24x^2-32x+16=8x-4$.

$x^4-8x^3+24x^2-40x+20=0$.

$\sqrt{x-\frac{11}{4}}=\frac{x}{2}-1$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1\ .\ |\cdot4$

$4x-11=x^2-4x+4$.

$x^2-8x+15=0$

$x_1=3$

$x_2=5$.

У данных 3-ёх уравнений нет общих корней $\Rightarrow\varnothing$.

В итоге получаем, что единственное подходящее значение $x=5$.

Ответ: при $x=5$.

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{16}\ |\cdot16$

$16x^2-88x+121=8x-4$.

$16x^2-96x+125=0\ |:16$

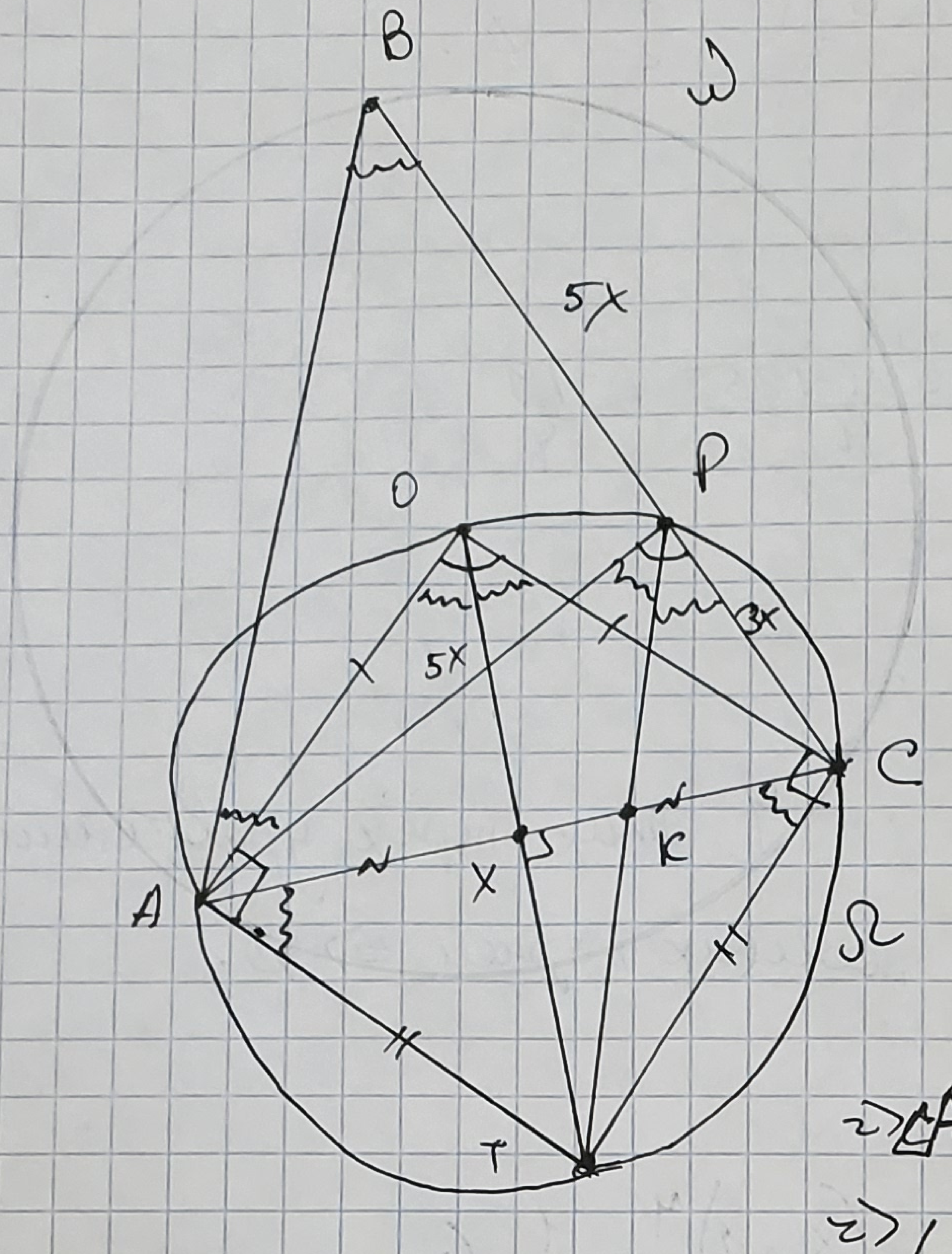
$\cancel{D=96}\cdot$ $x^2-6x+\frac{125}{16}=0$.

$x_1=3+\frac{\sqrt{19}}{4}$

$x_2=\frac{3-\sqrt{19}}{4}$

Чистовик

№6.



а) S_{ABC} - ?, $S_{APK} = 10$, $S_{CPK} = 6$

$AT = TC$ (как. отр. кас-ых, пров. из 1 т.), $AO = OC = R$.

$\angle AOC + \angle ATC = \angle OAT + \angle OCT \Rightarrow$

$\Rightarrow$ OCTA - впис. $\Rightarrow$ т. $T \in \Omega$

Провед. TO - диам. Ω.

$OT \cap AC = X$.

$AO = OC$, $AT = CT \Rightarrow AC \perp OT$.

Пусть $\angle AOC = \angle APC = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATC = 180 - 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATO = \angle CTO = 90 - \alpha$ (т.к. TO - биссектр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AXT = \angle CXT = \alpha$, $\angle B (\angle ABC) = \alpha$.

$AX = XC$ (т.к. $\triangle AOC$ - р/б, OX - выс., мед.).

$AX^2 = OX \cdot XT$. $\quad \angle AOT = \angle APT = \alpha \Rightarrow \angle TPC = \alpha$.

$$\left.\begin{aligned} S_{APK} &= \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot AP \cdot PK = 10 \\ S_{CPK} &= \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot CP \cdot PK = 6 \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{AP}{CP} = \frac{5}{3}.$$

$S_{APC} = 16 = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot 5x \cdot 3x$

~~B $10 = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot 5x \cdot BPK$~~

$\angle APC$ - внешний для $\triangle APB \Rightarrow 2\alpha = \alpha + \angle BAP \Rightarrow \angle BAP = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BPA$ - р/б $\Rightarrow BP = AP = 5x$

$$:\left\{\begin{aligned} S_{APB} &= \frac{1}{2} \cdot \sin(180 - 2\alpha) \cdot 5x \cdot 5x \\ S_{APC} &= \frac{1}{2} \cdot \sin(2\alpha) \cdot 5x \cdot 3x \end{aligned}\right.$$

$\frac{S_{APB}}{\underset{16}{S_{APC}}} = \frac{5}{3} \Rightarrow S_{APB} = \frac{5}{3} \cdot 16 = \frac{80}{3} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{80}{3} + 16 =$

$= \frac{80 + 48}{3} = \frac{128}{3}$.

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$, AC - ?

~~S_{AL}~~ $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$ $\qquad$ $\operatorname{tg}\alpha = 2$

Чистовик

$\triangle APC: \ AC^2 = (5x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot \cancel{\sin 2}\cos\alpha \cdot 5x \cdot 3x =$

$= 34x^2 - 30x^2(2\cos^2\alpha - 1) = 64x^2 - 60x^2 \cdot \cos^2\alpha =$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad | : \cos^2\alpha$

$\underbrace{tg^2\alpha + 1}_{4+1=5} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{5}$

$= (64 - 12)x^2 = 52x^2$

$52 \cdot 8 = 416$

$S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot 25x^2 = \frac{80}{3}$

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot 25x^2 = \frac{80}{3} \quad | : \cos^2\alpha$

$tg\alpha \cdot 25x^2 = \frac{400}{3}$

$\cancel{2} \ 50x^2 = \frac{400}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow AC^2 = 52 \cdot \frac{8}{3} = \frac{416}{3} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{416}{3}}$

Ответ: б) $AC = \sqrt{\frac{416}{3}}$; а) $S_{ABC} = \frac{128}{3}$.

Черновик.

$AC^2 = 25x^2 + 9x^2 - 2\cos 2\alpha \cdot 5x \cdot 3x$

$AC^2 = 34x^2 - 30x^2 \cdot {}^{-2\cos^2\alpha} + 30x^2 \cdot \cancel{\sin^2\alpha} =$

$= 64x^2$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R.$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$AC^2 = 34x^2 + 30x^2 - 60x^2 \cdot \cos^2\alpha.$

$1 + 4 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$AC^2 = 64x^2 - 12x^2 = 52x^2 \Rightarrow$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{5}.$

$\Rightarrow AC = \sqrt{52} \cdot x = 2 \cdot \sqrt{13}\, x$

$\frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot 25x^2 =$

№4. Черновик.

$(a, b, c) - ?$

$a = 3^{\alpha} \cdot 7^{\beta}$

$b = 3^{k} \cdot 7^{\ell}$

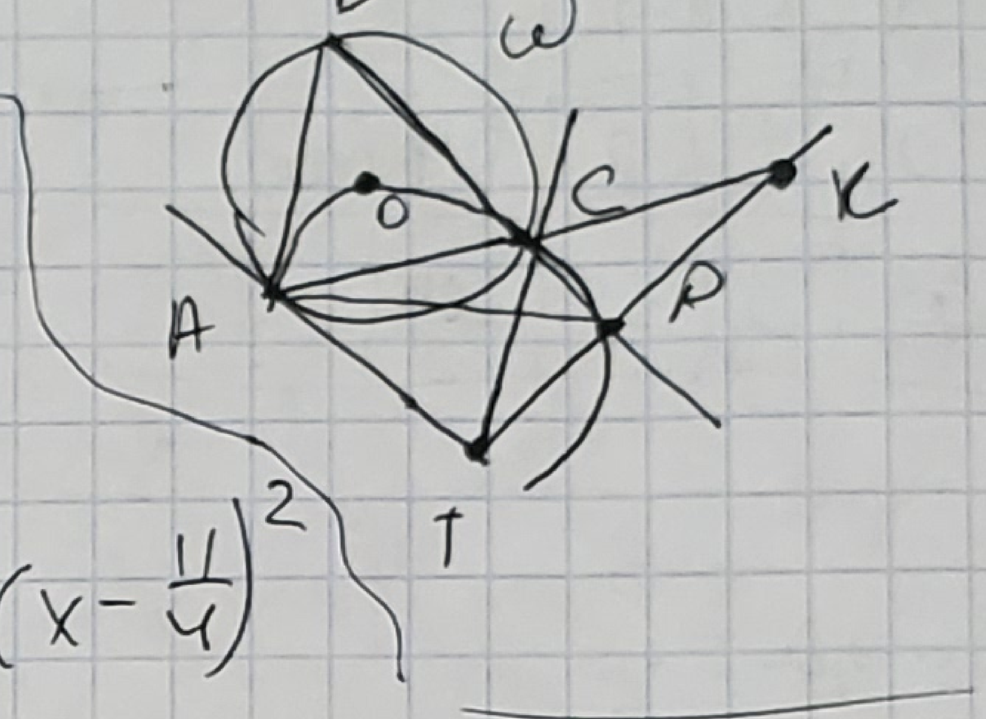
$c = 3^{s} \cdot 7^{t}$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 21 = 3^1 \cdot 7^1 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 3^{\min(\alpha,k,s)} \cdot 7^{(\beta,\ell,t)} = 3 \cdot 7 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{\max(\alpha,k,s)} \cdot 7^{(\beta,\ell,t)} = 3^{17} \cdot 7^{15}. \end{cases}$$

$\min(\alpha, k, s) = 1$ M

$\max(\alpha, k, s) = 17$



№5.

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $2\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

$\frac{x}{2}-1 = a$, $\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = b$, $x-\frac{11}{4} = c$

$\frac{1}{2}\log_a b \cdot 2\log_c a \cdot 2\log_b c = 2\frac{\cancel{\log b}}{\cancel{\log a}} \cdot \frac{\cancel{\log a}}{\cancel{\log c}} \cdot \frac{\cancel{\log c}}{\cancel{\log b}} = 2.$

Пусть исх. лог-мы $= A, B, C$

	1	1	0	−2
1	1	2	2	0

$$\begin{cases} A \cdot B \cdot C = 2, \\ A = B, \\ C = A+1. \end{cases}$$

$(A+1)\cdot A^2 = 2,$

$A^3 + A^2 - 2 = 0.$

$(A-1)\cdot(A^2+2A+2) = 0$

$D<0.$

$A = 1 = B,$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ (1)

$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0.$

$2x^2 - 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 8 = 1.$

$x_1 = \frac{3+1}{4} = 1$

$x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$, но $\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = 0 - \emptyset$

$(a-b)^4 = (a^2-2ab+b^2)(a^2-2ab+b^2) =$

$= a^4 - 2a^3b + a^2b^2 - 2a^3b + 4a^2b^2 -$

$- 2ab^3 + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 =$

$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4.$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1.

$2^4 = 16$

$16 + 64 + 48 - 80 + 20 \quad 16 - 64 + 24 \cdot 4 - 40 \cdot 2 + 20$

$-48 + 48 - 80 + 20.$

Черновик

	1	-8	24	-40	20
1	1	-7	-17	-63	
-1	1	-9	33	-	
5	1	-3	9	5	5
-5	1	-13	89	-	
4	1	-4	8	-8	-12
-4	1	-12	72		
10	1	2	44	400	
20	1	12	264		

| 1 |

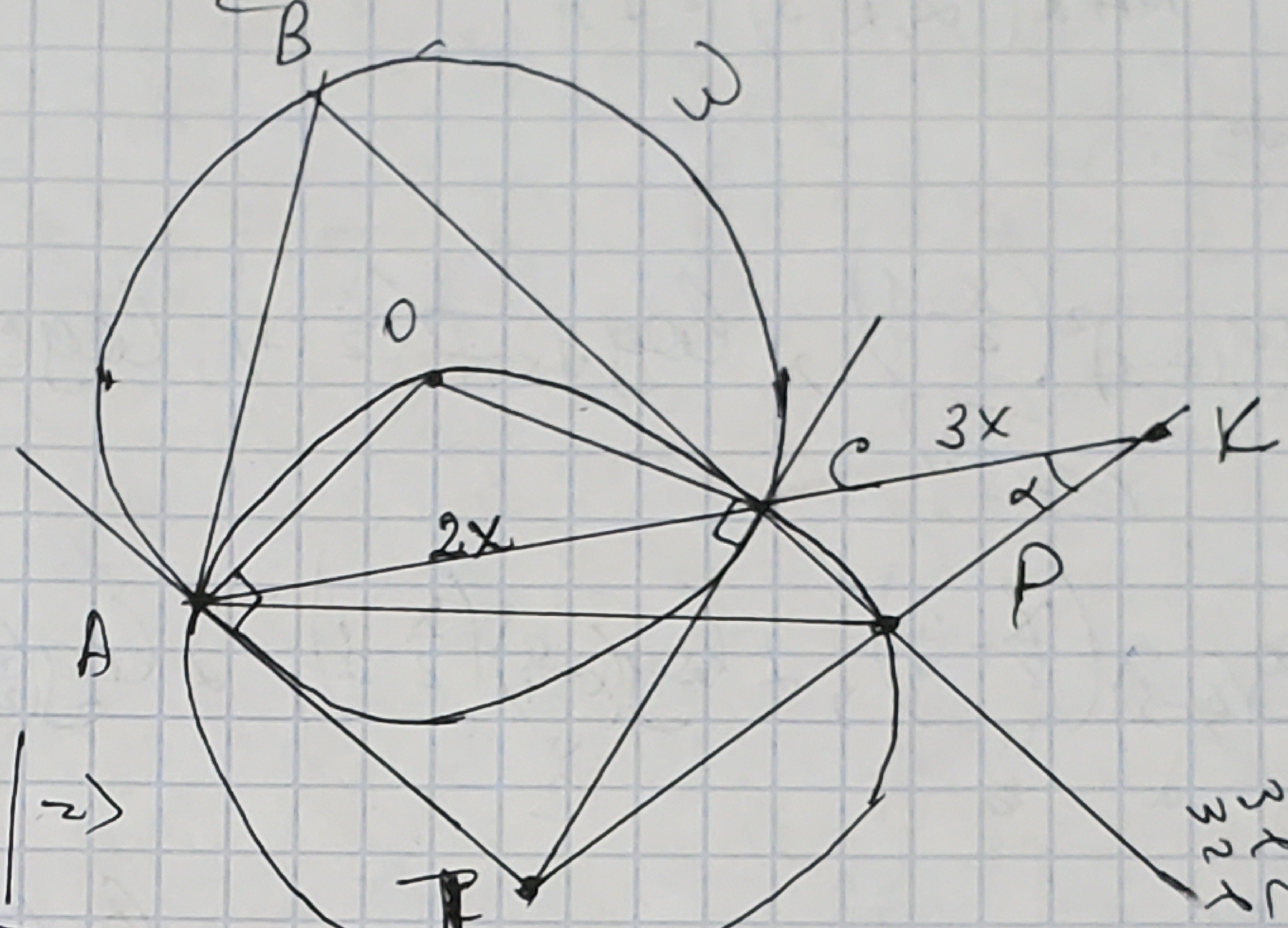
№6.

$R = \frac{abc}{4S}$

$S = \frac{abc}{4R}$

a,b,c
a,c,b
c,a,b
c,b,a
b,a,c
b,c,a

$C_3^2 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$



123
132
213
231
312
321

S_{ABC} - ?

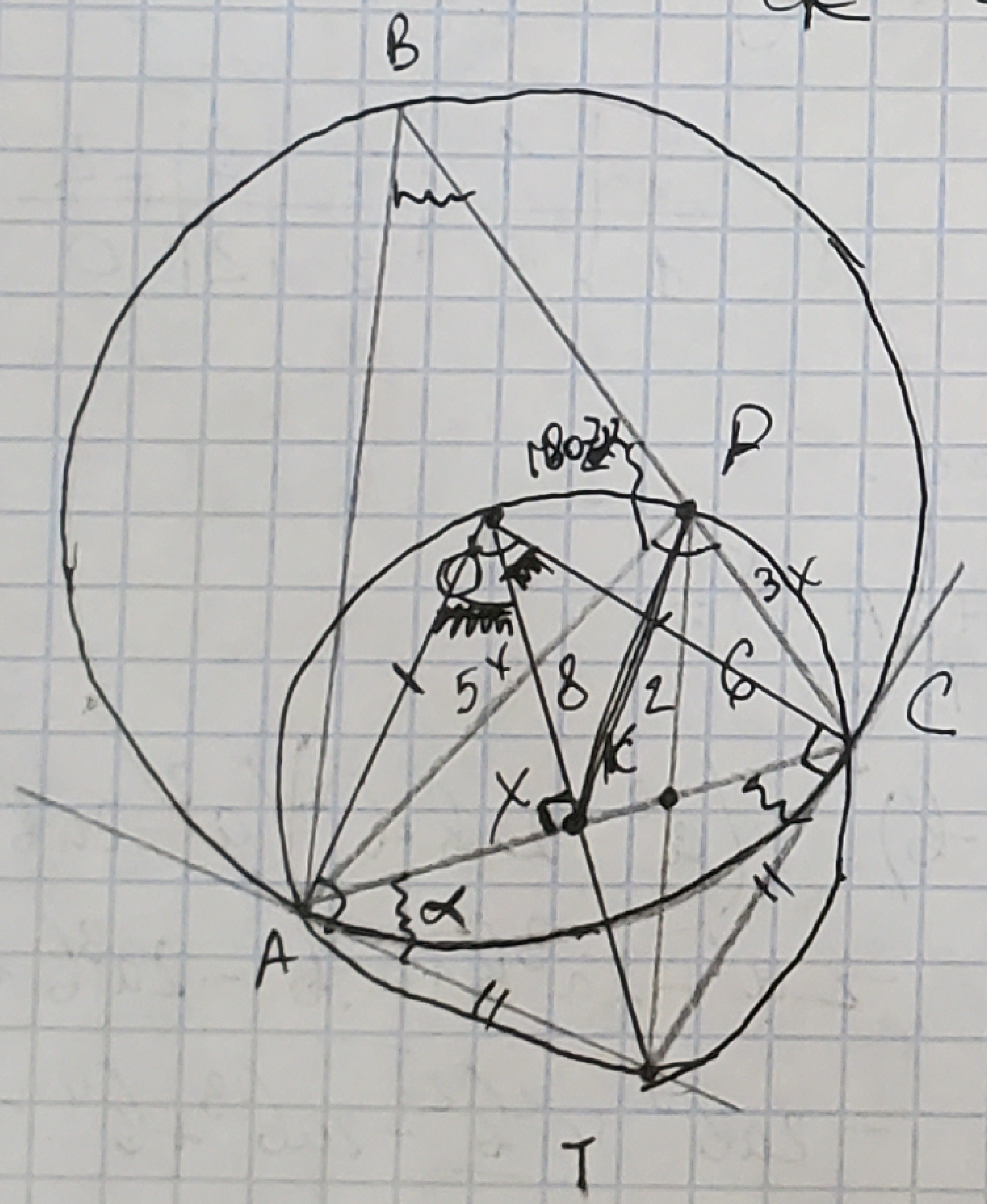
$S_{APK} = 10$, $S_{CPK} = 6$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ACP} = 4$.

$S_{APK} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot PK \cdot AK = 10$

$S_{CPK} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot PK \cdot CK = 6$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AK}{CK} = \frac{5}{3}$, $\Rightarrow AC:CK = 2:3$



OCTA - впис., OT - диам.

$S_{APK} = 10$, $S_{CPK} = 6$.

$S_{APC} = \frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha \cdot AP \cdot PC$

$S_{AOC} = \frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha \cdot R^2$

$AT = CT$ $\quad AX = XC$,

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$. $\quad R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$.

$S_{AOC} = \frac{1}{2}\cdot \frac{\sin 2\alpha \cdot AC^2}{2\sin\alpha \cdot 2\sin\alpha} =$

$= AC^2 \cdot \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} =$

$= AC^2 \cdot \frac{ctg\alpha}{2}$

$S_{AOC} = \frac{1}{4}\cdot AC^2$

$\angle CAT = \angle ACT = \angle B = \alpha$.

$\angle ABC = arctg\, 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha = 2 \Rightarrow ctg = \frac{1}{2}$.