Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101540**

ID профиля: **198662**

Вариант 19

[illegible]

Чистовик стр. 1

1. $S = 14a + 91d$

$a_9 = a + 8d, \quad a_{17} = a + 16d$

$a_{11} = a + 10d, \quad a_{15} = a + 14d$

$$\begin{cases} a^2 + 24ad + 128d^2 > 14a + 91d + 12 \\ 14a + 91d + 47 > a^2 + 24ad + 140d^2 \end{cases}$$

Сложим неравенства, получим $35 > 12d^2$

Раз $d > 0$ и $\forall a_i \in \mathbb{Z}$, то $d = 1$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} a^2 + 24a + 128 > 14a + 103 \\ a^2 + 24a + 140 < 14a + 138 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 10a + 25 > 0 & (\text{вып. всегда, т.к. } (a+5)^2 > 0 \text{ при } a \neq -5) \\ a^2 + 10a + 2 < 0 & (a \in (-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23})) \end{cases}$$

Конечно, т.к. $a \neq -5$, имеем: $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

2 Условие стр. 2

C и D лежат в плоскости ср. перп-ра к AB. Значит, можно через AB провести плоскость, перпендикулярную CD (т.к. AB ⊥ CD). Пусть X — пересечение её с CD.

Заметим, что AX = BX, т.к. X лежит в плоскости ср. перп-ра. Пусть AX = a.

Так как (ABX) ⊥ CD, AX ⊥ CD. Тогда CD = $= CX + DX = \sqrt{49-a^2}+\sqrt{36-a^2}$

Заметим теперь, что (ABX) пер-на оси цилиндра, т.е. лежит в круговом и параллельном торцу сечении. X лежит на границе сечения, т.к. X ∈ CD и CD лежит на боковой поверхности.

Тогда радиус цилиндра равен описанному радиусу △ABX, т.е. $\dfrac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{a^2+2^2-a^2}{2\cdot 2\cdot a}\right)^2}}$, что

равно $\dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}}$

Производная его по a составляет $\dfrac{a^3-2a}{2(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}$

Чистовик стр. 3

Это значит, от 1 до $\sqrt{2}$ $R(a)$ убывает (R от англ. "radius" - радиус), а затем возрастает (при $a \leq 1$ не опр-но)

Тогда наименьшее R - это $R(\sqrt{2})$. (D) же при $a = \sqrt{2}$ составляет $\sqrt{47} + \sqrt{34}$.

3 Сначала определим допустимые $(a; b)$ Тимохин стр. 4

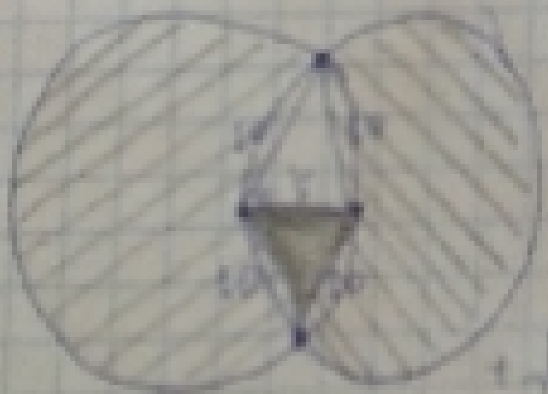
для этого решим $a^2+b^2 \in (-8a-6b, 25)$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \geq -8a-6b \\ a^2+b^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a+4)^2+(b+3)^2 \geq 25 \\ a^2+b^2 \leq 25 \end{cases}$$

Допустимые (a, b) формируют 2 круга радиусом 5 на расстоянии 5 друг от друга

Каждая пара $(a; b)$ — центр круга радиусом 5 с допустимыми $(x; y)$. Таким образом, для (x, y) имеем те же круги, но с увеличенными на 5 (до 10) радиусами



Площадь вычислим как 2 сектора и 2 треугольника (в 2 раза)

$$S = 2\cdot 10\cdot\left(2\pi - 2\arccos\frac{10^2+5^2-10^2}{2\cdot 10\cdot 5}\right) +$$

$$+\sqrt{12,5\cdot 2,5\cdot 2,5\cdot 7,5}\cdot 2 =$$

$$= 40\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + \frac{25\sqrt{15}}{2}.$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101540**

ID профиля: **198662**

Вариант 19

Черновик стр 1

4 Простые числа, кроме 3 и 7, не входят в разложения a, b, c, т.к. иначе входили бы в НОД

Рассмотрим степени вхождения 3. В одно из чисел она 1, в другое 17, в третье 1 – 17. Варианты

1, 1, 17 — 3 вар. (перестан)

1, 17, 17 — 3 вар. (перестан)

1, 2-16, 17 — 6 · 15 = 90 вар.

Всего: 96 вар.

С семеркой аналогично, но вместо 17 будет 15 вариантов 3 + 3 + 6 · 13 = 84

Распределение семерок не зависит от распред-я троек, так что всего вариантов 96 · 84 = 8064

Во-первых, заметим самое строгое ограничение $x > 11/4$.

Затем представим числа так:

$$\frac{\ln(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}{2\ln(\frac{x}{2}-1)}, \quad \frac{2\ln(\frac{x}{2}-1)}{\ln(x-\frac{11}{4})}, \quad \frac{2\ln(x-\frac{11}{4})}{\ln(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}$$

Легко увидеть, что их произведение 2. Пусть два равны a, и ещё одно $a+1$.

Тогда $a^2(a+1)=2$, то есть $(a-1)((a+1)^2+1)=0$.

Это значит, $a=1$, и двое равны единице.

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$ равно 1 при $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1$,

т.е. при $x^2-6x+5=0$, что выполняется только при $x=5$ (помним об ограничении)

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)$ равно 1 при $x-\frac{11}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1$, т.е.

при $x^2-8x=-15$, что выполняется при $x=3$ и при $x=5$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2$ равно 1 при $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{16}$, т.е.

при $x^2-6x=-125/16$, что выполняется

только при $x = 3 \pm \frac{\sqrt{19}}{4}$ (помним об ограничении).

Совпадает только $x=5$. Подставим его, чтобы проверить, равно ли третье двум.

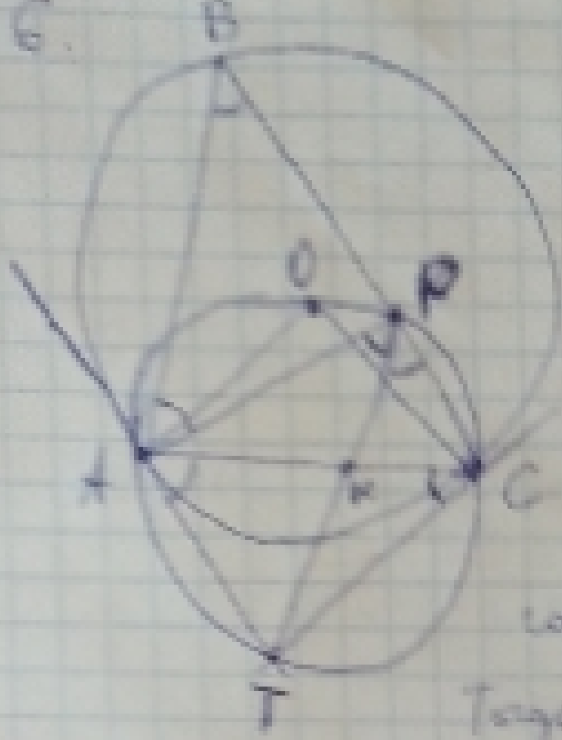
$$\log_{\left(\frac{5}{2}-1\right)^2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right) = 1$$

$$\log_{\sqrt{5-\frac{11}{4}}}\left(\frac{5}{2}-1\right) = 1$$

$$\log_{\frac{5}{2}-\frac{1}{4}}\left(5-\frac{11}{4}\right)^2 = 2$$

Ответ: 5.

6.



Пусть $\angle ABC = \alpha$ Чистовик стр 4

Как углы между касательной и хордой $\angle CAT$ и $\angle TCA$ равны по α

При этом $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\alpha$

Тогда $\angle ATC + \angle AOC = \pi$, что говорит о том, что $T \in$ окр (AOC)

Тогда $\angle APT = \angle TPC = \alpha$.

Это значит, PK – биссектриса $\triangle APC$. см. также 5

Тогда $AP : PC = AK : KC = S_{APK} : S_{KPC} = 5 : 3$.

То есть, $S_{APC} = \frac{3}{8} S_{ABC}$ Тогда $S_{ABC} = \frac{8}{3} \cdot (10+6) = \frac{128}{3}$

а) Ответ: $128/3$

Теперь мы знаем, что $tg\,\alpha = 2$, $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$ и $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$

---

5 Несложно заметить, что $\angle BAP = \pi - \alpha - (\pi - 2\alpha) = \alpha$ ~~Поэтому~~ $AP = BP$

В $\triangle ABP$, $\frac{AB}{2} : \cos\alpha = \frac{5}{8} BC$, т.е. $AB = \frac{5}{4} BC$

так как он равнобедренный

Черновик стр. 5

в $\triangle APC$, $\frac{1}{2} \cdot AP \cdot PC \cdot \sin 2\alpha = 16$

выражение площади

$$\frac{15}{64} \cdot BC^2 = 40$$

$BC = 16\sqrt{\frac{2}{3}}$. Тогда $AB = 4\sqrt{\frac{10}{3}}$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC \cdot \cos\alpha} =$$

теорема косинусов

$$= 4\sqrt{\frac{10}{3} + \frac{32}{3} - 2 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}} = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$$