Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101468**

ID профиля: **196133**

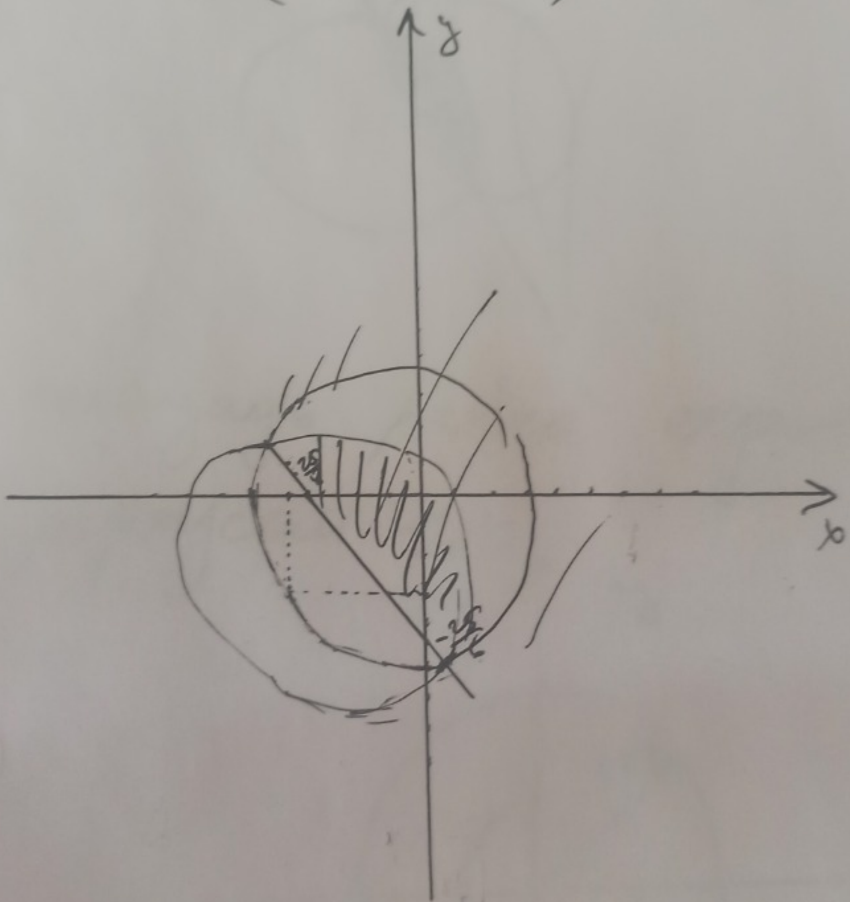
Вариант 19

Чистовик вариант 15

3. $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b;\ 25) & (2) \end{cases}$

При $-8a-6b < 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$



$\begin{cases} -8a-6b=25 \\ (a+4)^2+(b+3)^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ -8a-6b=25 \end{cases}$

Т.о переход происходит в т. пересеч. окр-тей и прямая отсекает верхнюю полуплоскость $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ $a^2+b^2 \le 25$ (3)

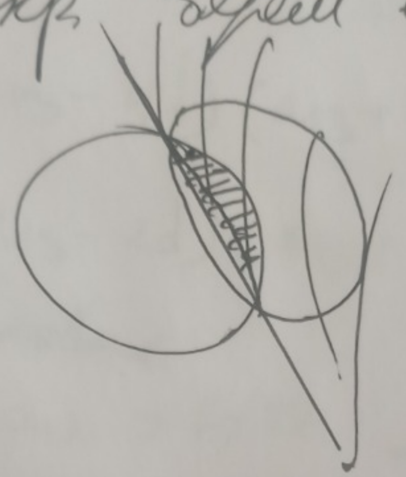
21101468 (U196133 M1300167)

чистовик вариант 19

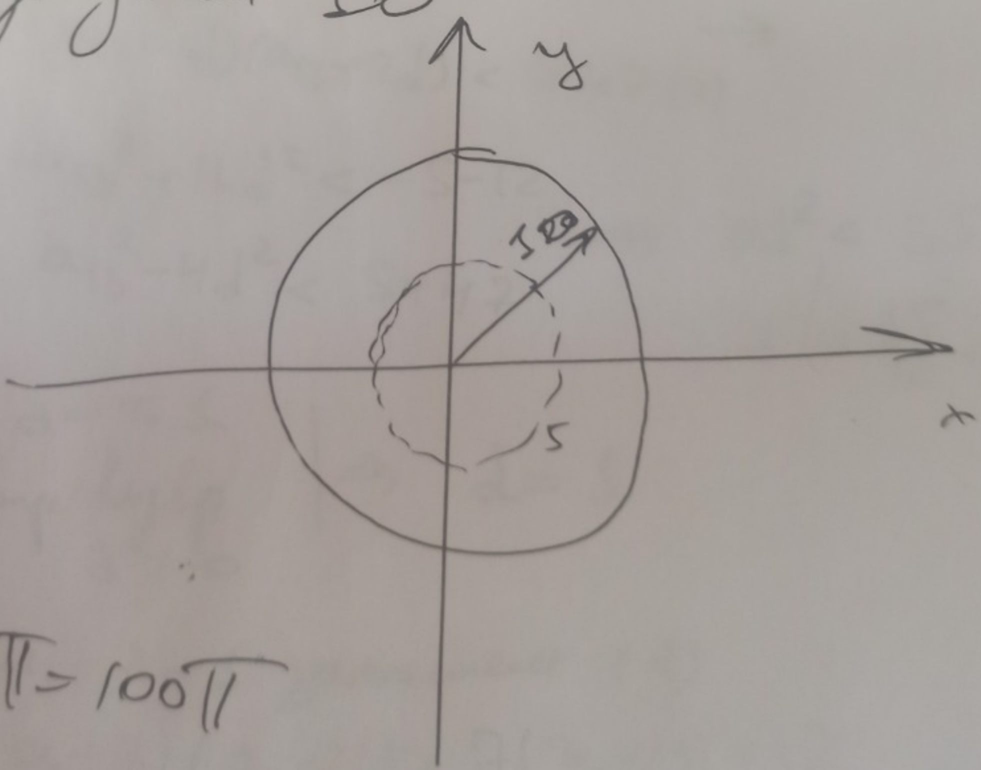
Т.е $a^2+b^2\leq 25$ $\Leftrightarrow$

$a^2+b^2\leq \min(-8a-6b;\ 25)$

В т. пер. окр. берем верх полупл-ть и окр-ть $\Rightarrow$



Т.о площадь равна окр-ти с радиусом 10



$S=(10^2)\pi=100\pi$

Ответ: 100π

2

Чистовик Вариант 19

1. $a_1 \in \mathbb{Z}$ $d \in \mathbb{Z}$ $a_1, \ldots a_{14} \ldots$ – ар. прог. возвр

$S = a_1 + \ldots + a_{14} =$

$= \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(2a_1 + 13d)$

$a_9 \cdot a_{17} = (a_{13} - 4d)(a_{13} + 4d)$

$a_{11} a_{15} = (a_{13} - 2d)(a_{13} + 2d)$

Запишем условие

$$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S + 12 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 47 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a_{13} - 4d)(a_{13} + 4d) > S + 12 \quad (1) \\ (a_{13} - 2d)(a_{13} + 2d) < S + 47 \quad (2) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -a_{13}^2 + 16d^2 < -S - 12 \\ a_{13}^2 - 4d^2 < S + 47 \end{cases} \Rightarrow 12d^2 < 35$$

$d^2 < \frac{35}{12} < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \pm 1$

Прогр возвр $d > 0$ $\Big| \Rightarrow d = 1$

С учетом $d = 1$ запишем (1)

$(a_1 + 8)(a_1 + 16) > 7(2a_1 + 13) + 12$

3

21101468 (U196133 M1300167)

Чистовик вариант 19

$a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+91+12$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0$

$a_1 \neq -5$

(2):

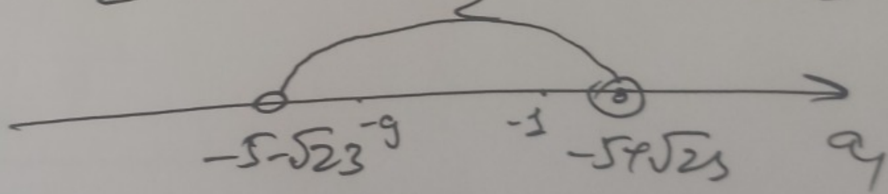
$(a_1+10)(a_1+14) < 7(2a_1+13)+47$

$a_1^2+24a_1+140 < 14a_1+\cancel{103}\,138$

$a_1^2+10a_1+2<0$

$D=10^2-4\cdot 2=92$

$a_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{92}}{2}=\frac{-10\pm 2\sqrt{23}}{2}=-5\pm\sqrt{23}$



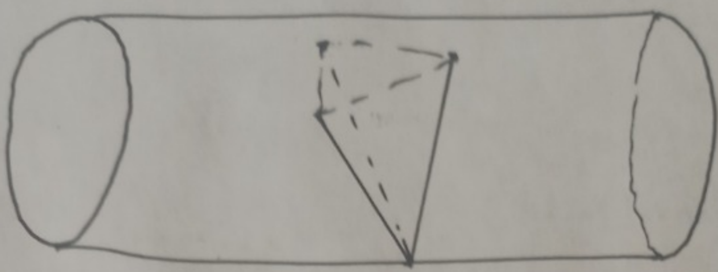
$-5-\sqrt{23}<-9$ $\quad -5+\sqrt{23}>-1$

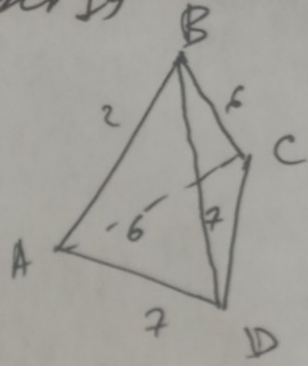
Т.о a_1 принимает все целые значения от -9 до -1 исключая -5

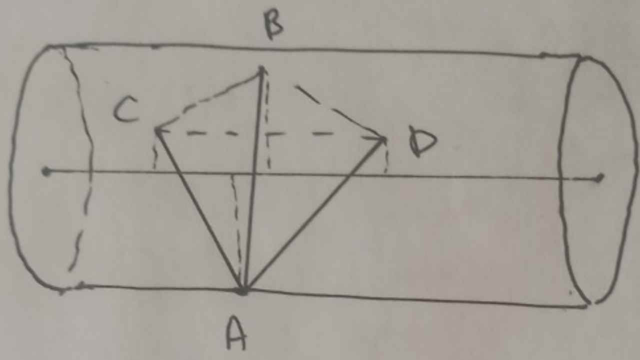
$-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

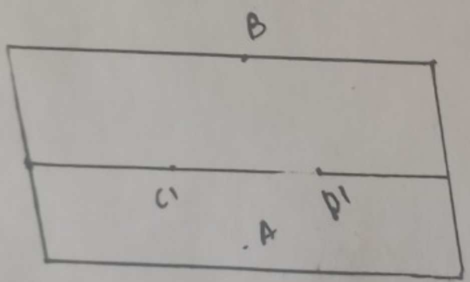
Ответ: $-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1$.

2 Гиштовеик вариант 19









5

21101468 (U196133 M1300167)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101468**

ID профиля: **196133**

Вариант 19

5. Чистовик вариант 19

$$\overset{a}{\overset{\parallel}{\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}},\ \overset{b}{\overset{\parallel}{\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)}},$$

$$\underset{c}{\underset{\parallel}{\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2}}$$

Рассмотрим $a \cdot b \cdot c$:

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(x/2-\frac{1}{4}\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(x/2-1\right) = \frac{2}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(x-\frac{11}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(x/2-1\right) =$$

$$= 2\log_{\frac{x}{2}-1}\left(x/2-1\right) = 2$$

Т.о $a \cdot bc = 2$

Пусть $a = b$ $c = a+1$

$$a^2(a+1) = 2$$

$$a^3+a^2-2=0$$

$a=1$ - подходит $1+1-2=0$

$(a-1)(a^2+2a+2)=0$ $a^2+2a+2=0$

$D = 4-4\cdot 2 < 0$

нет реш

1

~~Пусть $a=c$~~ Гиизовеин вариант 19 ~~$b=a+1$~~

Аналогичное кубическое ур-е и при

$a=b \quad c=a+1$ и $b=c \quad a=b+1$

т.о решениями являются

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} a=1 \\ c=1 \\ b=2 \end{cases} (2) \\ \begin{cases} b=1 \\ c=1 \\ a=2 \end{cases} (3) \end{array}\right. \Rightarrow \overset{(1)}{\begin{cases} \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1 & (1,1) \\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1 & (1,2) \\ \log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=2 & (1,3) \end{cases}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2 \\ \frac{x}{2}-1=\sqrt{x-\frac{11}{4}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{x^2}{4}-x+1=\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \qquad x^2-6x+5=0$$

$$(x-5)(x-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$$

$x=1$ не подх. из области опр ур-е

$\frac{x}{2}-1>0 \quad x=1: \ \frac{1}{2}-1>0$ — не верно

(1,2) Чистовик вариант 19

Подставим $x=5$: $\log_{\sqrt{\frac{9}{4}}}\left(\frac{3}{2}\right)=1$ - верно

(1,3) $\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{9}{4}\right)^2=2$ - верно

$x=5$ - подходит

Запишем О.О.У

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-1>0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ x-\frac{11}{4}>0 \\ x-\frac{11}{4}\neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1 \\ x\neq\frac{11}{4} \\ \frac{x}{2}-1\neq\pm 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}>1 \\ x>\frac{11}{4} \\ x\neq\frac{11}{4}, \frac{5}{2}, 0, 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{11}{4} \\ x\neq 4 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=1 & (2,1) \\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2 & (2,2) \\ \log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=1 & (2,3) \end{cases} \Rightarrow$$

(2,2) $\longrightarrow$ $x^2-6x+5=0$ $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \text{ - не подх.} \end{array}\right.$

Подставим $x=5$: (2,2) $\log_{\sqrt{\frac{9}{4}}}\left(\frac{3}{2}\right)=2$ - неверно

$\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{9}{4}\right)^2=1$

нет реш

3

чистовик варианта 19

(3)
$$\begin{cases} \log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=2 & (3,1) \\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1 & (3,2) \\ \log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=1 & (3,3) \end{cases} \Rightarrow$$

$(3,2) \rightarrow$
$$\frac{x}{2}-1=\sqrt{x-\frac{11}{4}}$$
$$\frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4}$$
$$\frac{x^2}{4}-2x+\frac{15}{4}=0$$
$$x^2-8x+15=0$$
$$(x-5)(x-3)=0$$
$$\left[\begin{array}{lll} x=3 & > \frac{11}{4} & \neq 4 \\ x=5 & > \frac{11}{4} & \neq 4 \end{array}\right.$$

Подставим $x=3$:

$(3,1)$ $\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{4}\right)=1$ – ~~не~~ верно

$(3,3)$ $\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^2=1$ – не верно

Подставим $x=5$ $\quad a=1, \; b=1, \; c=2$ не подх. в (3) сл. но явл. реш (1)

Ответ: 5.

4

21101468 (U196133 M1300168)

Чистовик вариант 19

$m+n+k=17$

$m=1$ $n+k=16$ 16 сл-в

$m=2$ $n+k=15$ 15 сл-в

...

$m=15$ $n=k=1$ 1 сл-в

Итого $16+15+...+1=\frac{17\cdot16}{2}=8\cdot17=$

$=136$ сл-вов

Т.к тройка чисел (a, b, c) упорядоченные то при фикс. к другое l это новый случай.

Т.е выбор троек (m, n, k) и (l, p, q) независимы. Воспользуемся правилом умножения

Итак, $136\cdot91=12376$

$$\begin{array}{r} 136 \\ \times\ 91 \\ \hline 136 \\ 1224\ \ \\ \hline 12376 \end{array}$$

Ответ: 12376

21101468 (U196133 M1300168)

6.

Чистовик

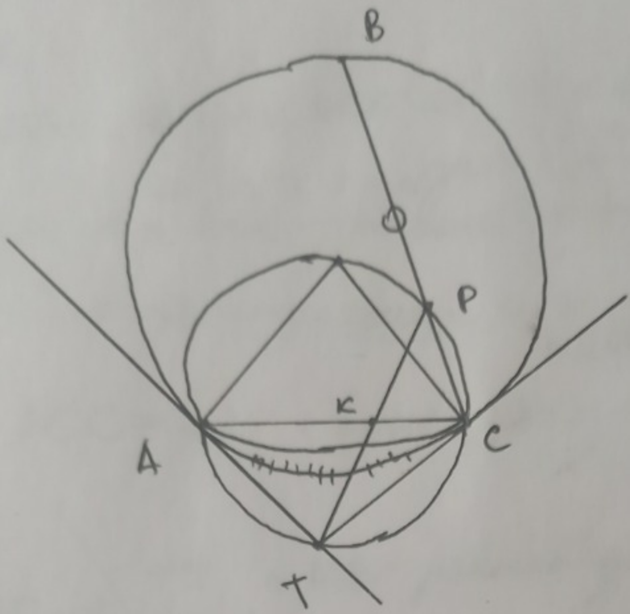
вариант 19

$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=6$

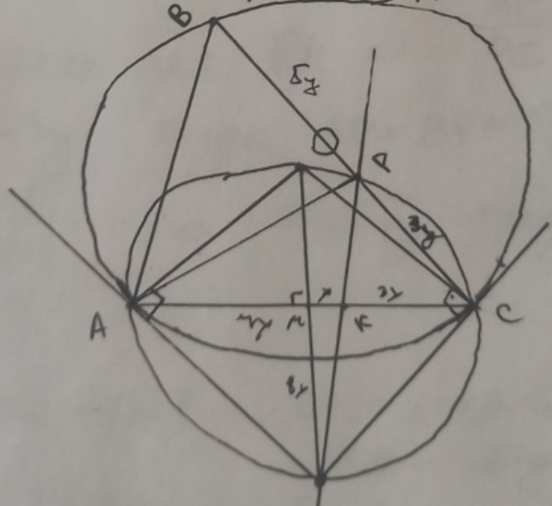
S_{ABC} — ?

$\frac{AK}{CK}=\frac{5}{3}$



Решение

1 т.к $\angle OAT=\angle OCT=90^\circ$ (касательные), то вокруг четырехуг OATC можно опис. окр-ть $\Rightarrow$ окр-ть опис. около $\triangle AOC$ совп. с ней.



2 AT и TC — касательные к ω $\Rightarrow$ по т. об угле между касательной и хордой $\angle CAT=\angle TCA=\angle ABC$

Пусть окр-ть описанная около OATC Ω.

Чистовик   вариант 19

$\angle AOM = \alpha = \operatorname{arctg} 2 \Rightarrow OM = \frac{AM}{2}$

Пусть $CK = 3x$, тогда $AK = 5x$

2. $AM = CM = \frac{8x}{2} = 4x$

$OM = 2x$ $MT = 8x$ $OT = 10x$

$\sin \angle AOM = $

$tg^2 \angle AOM + 1 = \frac{1}{\cos^2 AOM} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 AOM = \frac{1}{2^2+1} = \frac{1}{5}$

$\cos AOM = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin AOM = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin_{AOC} = 2 \sin AOM \cdot \cos AOM = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

$\sin AOM = \frac{AC}{2OT}$

$AP = 5y$ $PC = 3y$ $AC = 8x$

$\cos \angle APC = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

$AC^2 = A$

$64x^2 = 25y^2 + 9y^2 - 2 \cdot 5y \cdot 3y \cdot \frac{3}{5} = 16y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 4x^2 \rightarrow y = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow PC = 6x$ $BC = 8y = 16x$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8x \cdot 16x \cdot \sin BCA \Rightarrow \sin BCA = \frac{2}{3x^2}$

$\frac{128}{3}$

$\cancel{AB^2 = 64x^2 + 256x^2 - 2 \cdot 8x \cdot 16x \cdot \frac{\sqrt{5}}{3x^2}}$

9

21101468 (U196133 M1300168)

Чистовик вариант 13

$AT = \sqrt{64x^2 + 16x^2} = 4\sqrt{5}x \qquad AO = 2\sqrt{5}x$

$AB^2 + 256x^2 - 2AB \cdot 16x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 64x^2$

10

Тогда в Ω $\angle AOT = \angle ACT$ $\angle COT = \angle CAT$ как вписанные.

Т.о. $\angle AOT = \angle CAT = \angle ACT = \angle COT = \angle ABC = \alpha$

$\Rightarrow \Delta TCO = \Delta TAO$ (по катету $AT = CT$ (кас) и противол. острому углу) $\Rightarrow$

~~ОТ – б-са в Δ АОС – равнобедр $\Rightarrow$ высота и медиана~~

$\angle OAT = 90°$ ~~$\Rightarrow$ ОТ – диаметр~~ $\Rightarrow OC = AO \Rightarrow \Delta AOC$ – равноб. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCA = 90°$ ~~$\Rightarrow$ ОТ – диаметр~~

3 $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ (впис. опир на одну дугу) $\Rightarrow$

$\angle ABC = \alpha$

$\Rightarrow \angle BAP = \alpha$ $\Rightarrow$ ΔAPB – равнобедр $AP = BP$

$\angle APT = \angle TCA$ (впис.)

$\angle CPT = \angle CAT$ (впис.) $\Rightarrow \angle APT = \angle CPT = \alpha \Rightarrow PK$ – бис-са в ΔAPC

4 $\dfrac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{5}{3}$

по св-ву б-сы для $PK \Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{5}{3}$

Пусть $PC = 3y$, тогда $AP = BP = 5y$

Т.о. $\dfrac{CK}{AK} = \dfrac{3}{5} = \dfrac{CP}{BP}$ по обобщ. теореме Фалеса $\Rightarrow$

$\Rightarrow PK \parallel AB$

5. $\Delta CPK \sim \Delta CBA$ ($\angle CPK = \angle CBA$ соотв $AB \parallel PK$, $\angle PCK$ – общий) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot S_{PKC} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 6 = \frac{64}{\cancel{9}_3} \cdot \cancel{6}^2 = \frac{128}{3}$

б) 1. $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2 = \alpha$

Тогда $\angle ACT = \operatorname{arctg} 2$ $\angle CMT = 90° \Rightarrow$

$MT = 2CM$

(8)

21101468 (U196133 M1300168)

Чистовик вариант 19

4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases} \longrightarrow a,b,c \vdots 21$$

Т.к Н.О.К(a;b;c) не содержит в своем разлож. простых множителей отличных от 3 и 7, то a, b и c не кратны ни каким простым мн-лем кроме 3 и 7.

Т.о пусть

$a=3^k\cdot 7^l$

$b=3^m\cdot 7^p$, $k,l,m,p,n,q \geq 1$

$c=3^n\cdot 7^q$, $k,l,m,n,p,q \in \mathbb{Z}$

$l+p+q=15$

$m+n+k=17$

При $l=1$ $p+q=14$ $p=1$ $q=13$

$p=2$ $q=12$

...

$p=13$ $q=1$ 13

При $l=2$ $p+q=13$ $p=1$ $q=12$

...

$p=12$ $q=1$ 12

...

$l=13$ $p+q=2$ $p=q=1$ 1

Т.о выбрать l,p,q $13+12+11+...+1=$

$=\frac{14\cdot 13}{2}=7\cdot 13=91$ способ

5

21101468 (U196133 M1300168)