

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101367**

ID профиля: **124553**

Вариант 19

$$\begin{cases} a_3 a_{17} > S + 12 \\ a_{11} - a_{15} < S + 47 \end{cases}$$

$$S = \frac{a_1 + (a_1 + 16d)}{2} \cdot 14, \text{ где } d - \text{разность прогрессии}$$

$$S = 14a_1 + 91d; a_3 = a_1 + 2d; a_{17} = a_1 + 16d$$

$$a_{11} = a_1 + 10d; a_{15} = a_1 + 14d$$

$$(a_1 + 2d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12$$

$$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47 - \text{поменяем местами части}$$

$$a_1^2 + 24ad + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12$$

$$14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 24ad + 140d^2 - \text{ложим два неравенства}$$

Если складываем большее с большим, а меньшее с меньшим, то знак остается прежним, >

$$a_1^2 + 24ad + 128d^2 + 14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 24ad + 140d^2 + 14a_1 + 91d + 12$$

$$35 < 12d^2 \quad d - \text{целое число; догадываем, что так. Пусть нет,}$$

тогда a_1 - целое; d - нецелое $\Rightarrow a_1 + d$ - нецелое = a_2 . Противоречие $d > 0$, т.к. прогрессия возрастающая.

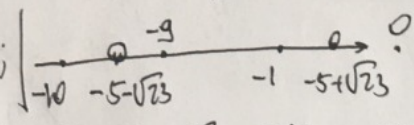
Из целых $d > 0$ подходит $d = 1$, т.к. при $d \geq 2 \quad 12d^2 \geq 48 > 35$

Подставим $d = 1$ в оба нерав-

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12 \\ 14a_1 + 91 + 47 > a_1^2 + 24a_1 + 140 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \quad (a_1 + 5)^2 > 0 \quad a_1 \neq -5 \\ a_1^2 + 10a_1 + 12 < 0 \quad \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad D = 100 - 2 \cdot 8 = 92 = (2\sqrt{23})^2 \quad a_{1,2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} = -5 \pm \sqrt{23} \quad (\sqrt{23} < 5)$$

решим ур-ние $a_1^2 + 10a_1 + 12 = 0$; 

Из второго нам подходят: -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; -8; -9, но должны исключить -5

Ответ: -1; -2; -3; -4; -6; -7; -8; -9

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 25 \\ a^2 + b^2 \leq \min(-8a-6b; 25) \end{cases} \quad S(M) = ?$$

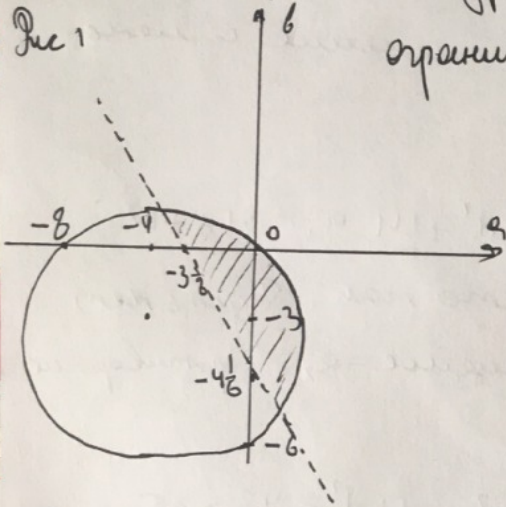
Рассмотрим второе неравенство системы

При $-8a-6b < 25$

$$a^2 + b^2 \leq -8a - 6b$$

$(a+4)^2 + (b+3)^2 \leq 25$ - уравнение окружности на плоскости $(a; b)$

Рис 1 ограничим прямой $b > \frac{-8a-25}{6}$

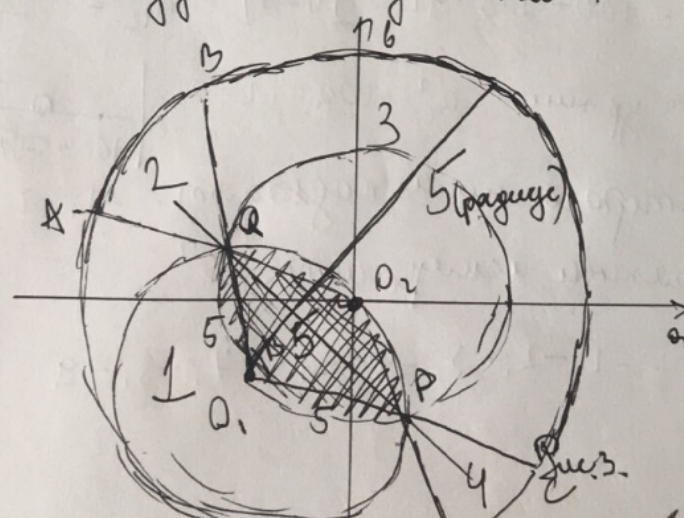
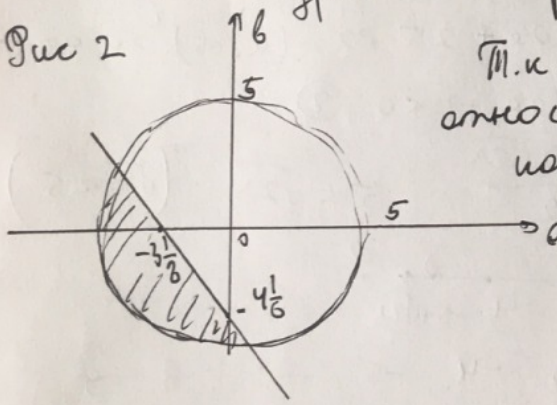


При $-8a-6b \geq 25$

$a^2 + b^2 \leq 25$ - уравнение окружности на плоскости $(a; b)$

Рис 2

П.к центры окружностей симметричны относительно прямой $b = \frac{-8a-25}{6}$, то начертание будет выглядеть так:



Запрашиваемые точки - возможные центры окружностей $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 25$ на $(x; y)$ лист 2

к рисунку 3.

т.к. $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 25$ - окружность с радиусом 5
 можно утверждать, что на отмеченной площадке
 точки (x, y) будут задаваться 4-ми областями

1) Это область, для которой выполняется
 $x^2 + y^2 \leq 100$ (область AD)

2) область AB области, для которой выполняется
 $(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 \leq 25$

3) область BC, для которой
 $(x+4)^2 + (y+3)^2 \leq 100$

4) область CD, для которой
 $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 \leq 25$

Для областей 1 и 3 такое выполняется, потому что каждая
 точка в области удалена от центра на 5 от центра
 из записанной, которая в свою очередь удалена
 на 5 от "своего центра" - центра O_1 или O_2

Найдем точки A и P

$$\begin{cases} b = \frac{-6a - 25}{6} & \text{①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 & \text{②} \end{cases}$$

$$a^2 + \frac{64a^2 + 400a + 625}{36} = 25$$

$$a^2 + \frac{16}{9}a^2 + \frac{100}{9}a - \frac{175}{36} = 0 \quad | \cdot \frac{36}{36}$$

$$4a^2 + 16a - 11 = 0$$

$$D = 256 + 176 = 4\sqrt{27}$$

$$a_{1,2} = \frac{-16 \pm 4\sqrt{27}}{8} = -2 \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{matrix} x_p & y_p \\ a_1 = -2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} & b_1 = -3 - 4\sqrt{3} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_2 = -2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} & b_2 = -3 + 4\sqrt{3} \\ \parallel & \parallel \\ x_q & y_q \end{matrix}$$

маж ~~...~~
 т.к. $x_q < x_p$ и $y_q > y_p$

Найдем QP

$$\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{\frac{27}{3} + 18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

По теореме cos уг Δ O, QP

$$\frac{75}{3} = 2 \cdot 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \beta$$

$$1 \cdot \frac{3}{2} = -2 \cdot \cos \beta$$

$$-\frac{1}{2} = \cos \beta$$

$\beta = 120^\circ = \frac{1}{3}$ от круга, т.к. все круги = 360°

аналогично с Δ O₂QP

$$\frac{1}{3} S_{\text{круг}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \quad R=10 \Rightarrow \frac{100\pi}{3}$$

$\Rightarrow \frac{200\pi}{3}$ - сумма площадей

*2, потому что 2 раза для Δ-нов QO₁P и QO₂P как вершины 1 и 3 области.

QO₂PO₁ - ромб $\Rightarrow \angle Q, QO_2 = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle AQB = 60^\circ = \frac{1}{6} S_{\text{круг}} = 2$ или 4 "зона"

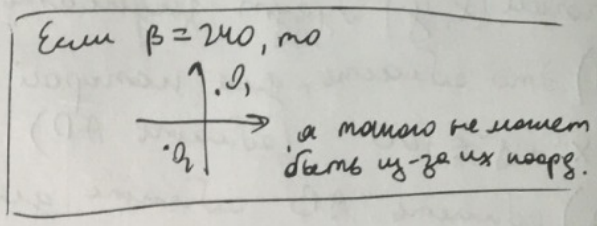
$$\frac{1}{6} S_{\text{круг}} = \frac{1}{6} \pi R^2 \Rightarrow R=5 \Rightarrow \frac{25\pi}{6}$$

*2 потому что 2 раза для 2 и 4 "зоны"

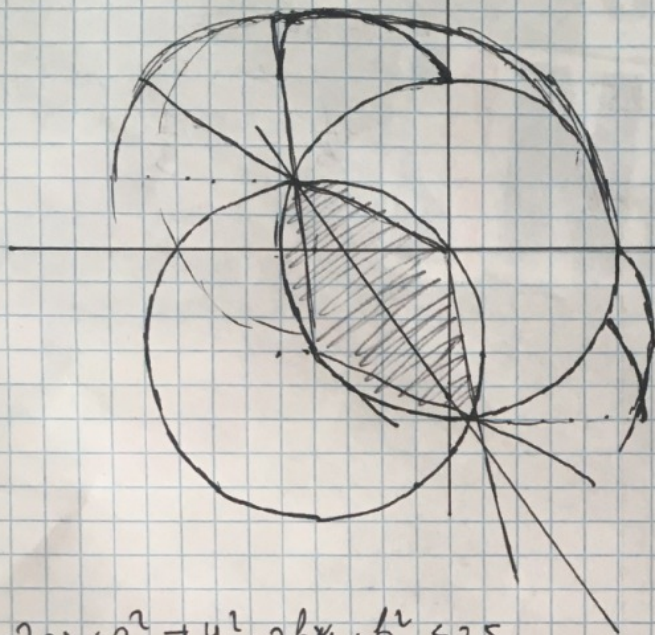
$$\Rightarrow \frac{25\pi}{3}$$

Складываем и получаем $\frac{225\pi}{3} = 5$

Ответ: $\frac{225\pi}{3}$



Черновик



$$a^2 + b^2 = 25$$

или

$$(a+4)^2 + (b+3)^2 = 25$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = 25$$

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0$$

Когда двигаем по окружности, самая удаленная точка имеет расстояние 10

Узнать радиусу веру дуги

лист 4

Чертежем
 Существует пара a, b , для которых выполняется система

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 25 \\ a^2 + b^2 \leq \min(-8a - 6b; 25) \end{cases} \quad - \frac{25}{b}$$

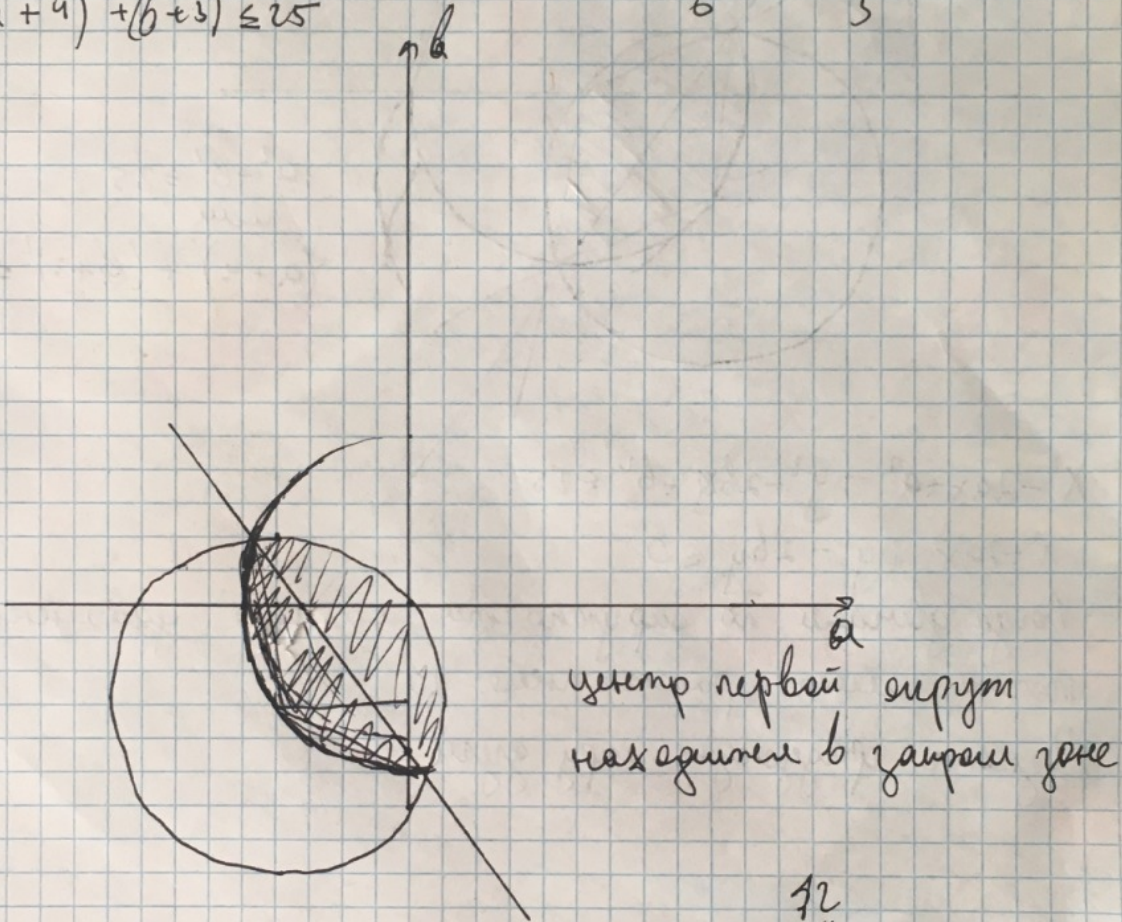
при $-8a - 6b < 25$

$$b > \frac{-8a - 25}{6}$$

$$\& a^2 + 8a + 16 + b^2 + 6b + 9 \leq 25$$

$$\frac{4}{b} \quad - \frac{4}{3}$$

$$(a+4)^2 + (b+3)^2 \leq 25$$



центр первой окружности находится в заштрихованной зоне

$$\frac{12}{4} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{27 + 48}{75}$$

Лист 3

Черновик
 S - сумма первых 14-ти членов арифм

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 13d}{2} \cdot 14$$

$$14a_1 + 91d$$

Целью еще

$$a_9 a_{17} > S + 12$$

$$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12$$

$$a_{11} a_{15} < S + 47$$

$$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47$$

$$a_1^2 + 24ad + 128d^2 > 14a_1 + 91d$$

$$a_1^2 + 24ad + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24ad + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ 14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + 24ad + 140d^2 \end{cases} \oplus \text{ Знак переменя}$$

$$\begin{cases} 35 > 12d^2 \\ d \in \mathbb{Z} \\ d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a + 128 > 14a_1 + 91 + 12 \\ 14a_1 + 91 + 47 > a_1^2 + 24a + 140 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \quad [a \neq -5]$$

$$0 > a_1^2 + 10a_1 + 2$$

$$D = 100 - 8 = \sqrt{92} = 2\sqrt{23}$$

$$\frac{-10 \pm \sqrt{23}}{2}$$

$$\frac{-10 - 9 - 5 - 1 - 0}{-5 - \sqrt{23} \quad -5 + \sqrt{23}}$$

$$b = -\frac{4}{3}a - 4\frac{1}{6}$$

$$(a^2 + 4)^2 + \left(-\frac{4}{3}a - \frac{7}{6}\right)^2 = 25$$

$$a^2 + 8a + 16 + \frac{16}{9}a^2 + \frac{28}{9}a + \frac{49}{36} = 25$$

$$\frac{25}{9}a^2 + \frac{100}{9}a + \frac{275}{36} = 0 \quad | \cdot 36$$

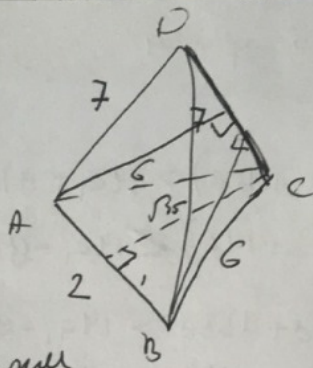
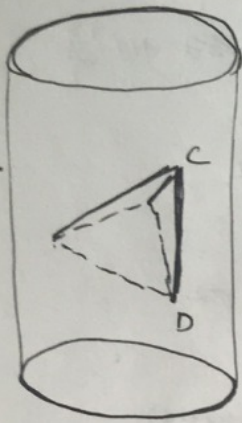
$$100a^2 + 400a + 275 = 0$$

$$D = 160000 - 110000 = 50000 = 100\sqrt{5}$$

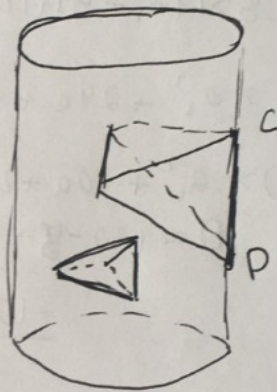
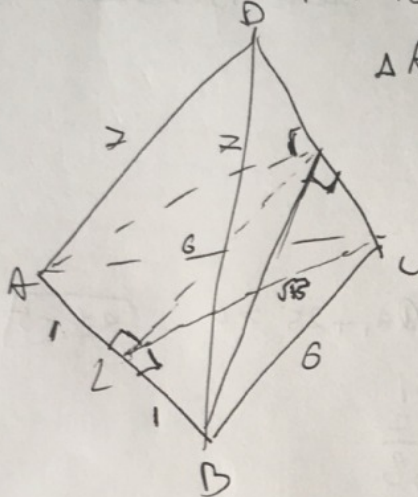
$$\frac{-400 \pm 100\sqrt{5}}{200} = -2 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ 18 \\ 144 \\ 9 - \frac{48 \cdot 18}{36} \\ 36 \cdot 324 \\ 48 \\ 275 \quad | \quad 5 \\ 255 \quad | \quad 55 \\ 25 \cdot 11 \\ 16 \quad 25 \cdot 4 \cdot 9 \\ 800 \\ 615 \\ 275 \end{array}$$

Чертежи



знаем ~~что~~ не меньше, чем высота у
 А и В го CD, они равны, т.е. равны
 $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$



$$\frac{48}{27} = \frac{16}{9}$$

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} + 12 = \frac{75}{4}$$

$$\frac{4}{25} = \frac{8}{125}$$

~~$$\frac{25^2 \cdot 3^2}{4^2} = 25^2 \cdot 2 - 2 \cdot 5^2 \cdot \cos \alpha$$~~

$$\frac{5^4 \cdot 3^2 - 5^2 \cdot 2^5}{4^2} = -2 \cdot 5^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{225 - 32}{32}$$

Ответ

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101367**

ID профиля: **124553**

Вариант 19

№4

Числовик

$$\{ \text{НОД}(a; b; c) = 21 = 3^1 \cdot 7^1 \quad ①$$

$$\{ \text{НОК}(a; b; c) = 5^{17} \cdot 7^{15} \quad ②$$

- ① В каждое число входит $3^1 \cdot 7^1$, причем в одно из чисел 3 входит в 1 степени, в одно из чисел 7 в 1 степени, а 3 больше чем в 17.

Рассмотрим вхождение прайки. Будем создавать возможные наборы вхождения, а потом расставлять по шлам

- 1) Когда степени $1; 17; x; x \in [2; 16]$ 15 способов выбрать „x“ и т.к. шлам разлит $3!$ способами „расставить степени по шлам“
- 2) Когда $1; 17; 17$ 3 способа расставить по шлам.
- 3) Когда $1; 1; 17$ 3 способа расставить по шлам.

Итого для троек $15 \cdot 3! + 3 + 3 = 96$ способов

Рассмотрим аналогичным способом вхождение 7-ки

- 1) Когда степени $1; 15; y; y \in [2; 14]$ 13 способов выбрать „y“ и т.к. шлам разлит $3!$ способами „расставить степ. по шлам“
- 2) Когда $1; 15; 15$ 3 способа
- 3) Когда $1; 1; 15$ 3 способа

Итого для „7“ок $13 \cdot 3! + 3 + 3 = 84$

Т.к. способы для троек и для 7-ок независимы, перемножим их. $84 \cdot 96 = 8064$

Ответ: 8064

№5

Числовый

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2} \left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right), \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}} \left(\frac{x}{2}-1\right), \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}} \left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

Затем обратимся

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-1 > 0 \\ \frac{x}{2}-1 \neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} \neq 1 \\ x-\frac{11}{4} > 0 \\ x-\frac{11}{4} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{11}{4} \\ x \neq 4 \\ x \neq \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$\frac{x}{2}-1 = a$$

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = b$$

$$x-\frac{11}{4} = 3a-b$$

$$\frac{1}{2} \log_a b; 2 \log_{3a-b} a; 2 \log_b 3a-b$$

Выберем 3 уравнения:

$$1) \frac{1}{2} \log_a b = 2 \log_{3a-b} a$$

$$\log_a b \cdot \log_b 3a-b = 4$$

$$2 \log_{3a-b} 3a-b = 1 + \log_a b$$

$$\log_a b = 2 \log_b 3a-b - 1$$

$$\log_a b = 4 \log_{3a-b} a \quad (\log_{3a-b} a \text{ берем})$$

$$2 \log_{3a-b} a = 1 + \log_a b \quad (2)$$

$$b = a \quad 4 \log_{3a-b} a \text{ не берем } (2)$$

$$2) 2 \log_{3a-b} a \cdot \log_b 3a-b = 1 + \log_a b$$

$$b \log_b a = 1 + \log_a b \quad \log_a b = t$$

$$t^2 + t - 8 = 0 \quad D = 5^2 \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3; 2$$

$$\log_{\frac{x}{2}-1} \frac{x}{2}-\frac{1}{4} = 2$$

$$\log_{\frac{x}{2}-1} \frac{x}{2}-\frac{1}{4} = -3$$

$$2) 2 \log_{3a-b} a = 2 \log_b 3a-b \quad (\text{не берем } (2))$$

$$2 \log_{3a-b} a = \frac{1}{2} \log_a b - 1$$

$$a \log_{3a-b} a \cdot \log_{3a-b} b = 1$$

$$a \log_{3a-b} b = 1$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ \log_{3a-b} b = 0 \end{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

\emptyset

$$\log_{3a-b} a = a$$

$$2 \log_{3a-b} a = 1 + \log_{3a-b} b \cdot 4 \log_b a$$

$$2 \log_{3a-b} a = 1 + 4 \log_{3a-b} b \cdot a$$

$$\log_{3a-b} a = -\frac{1}{2} \quad \boxed{\text{не } a} \quad \text{нет}$$

Четвертое

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_a b = 2 \log_{3a-b} a & (\log_a b, b \text{ — члены}) \\ 2 \log_{3a-b} a + 1 = 2 \log_{3a-b} a & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$3a-b = \frac{1}{2} \log_a b \text{ нечем делить } \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \quad 2 \log_{3a-b} a + 1 = \frac{1}{2} \log_a b \cdot \log_{3a-b} a$$

$$2 \log_{3a-b} a + 2 = \log_{3a-b} b$$

$$\log_{3a-b} a = t$$

$$4t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$D = (2\sqrt{5})^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\log_{3a-b} a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

~~$$2 \log_{3a-b} a + 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_a b \cdot \log_{3a-b} a$$~~

Суж

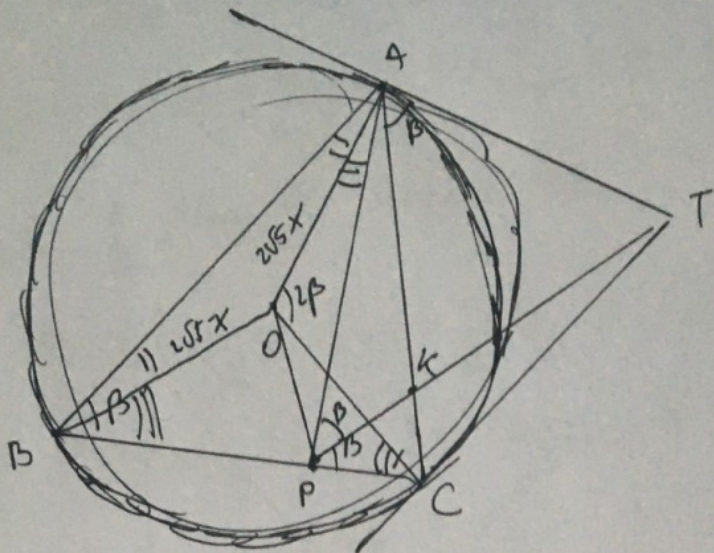
$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x - \frac{11}{4}}}$$

~~$$\frac{x}{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x - \frac{11}{4}}}$$~~

$$\frac{1}{2} \log_a b = 2 \log_{3a-b} a$$

$$b = a^{4 \log_{3a-b} a}$$

\emptyset



а) Площади откосов равны, так как высоты оснований
 $CK = 3x$ $AK = 5x$
 по т. син и кос $\angle TAC = \beta$; т.к. $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$,
 $ATCPO$ - вис; $\Rightarrow \angle TAC = \angle TPC$ - отпр на одну дугу
 $\angle AOC$ - центральный $= 2\beta \Rightarrow \angle APC = 2\beta$ так отпр на
 одну дугу $\Rightarrow \angle APK = 2\beta - \beta = \beta \Rightarrow PK$ - вис $\Rightarrow PC = 3y$ $AP = 5y$
 $\angle OBP = \angle OCP$, т.к. $BO = OC$ $\triangle BOC$ р/б
 $\angle OBA = \angle OAB$ т.к. $AO = OB$ $\triangle AOB$ р/б
 $\angle OCP = \angle OAP$, так отпр на одну дугу $\Rightarrow \angle ABP = \angle PAB \Rightarrow$
 $BP = 5y$

$$16 = \sin \angle BCA \cdot 8x \cdot 3y \quad S = \sin \angle BCA \cdot 8x \cdot 8y \quad S = \frac{16 \cdot 8}{3} = \frac{128}{3}$$

б) $\sin \beta = 2 \cos \beta \Rightarrow$ по син и кос найдем. $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{8x}{\sin \beta} = 2R_w \quad R_w = \frac{20x}{\sqrt{5}} \text{ - по т. синусов в } \triangle ABC$$

в $\triangle OAC$ по т. кос:

$$\cos 2\beta = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5} = 2\cos^2 \beta - 1 \quad ; \quad 64x^2 = 20x^2 + 20x^2 + \frac{6}{5} \cdot 20x^2$$

Корень 4 степени
 $\log(a, b, c) = 21 \Rightarrow$ 6 вариантов
 3' 2'

15.3.2
 3' 2' 3'
 3' 2' 3'
 3' 2' 3'

$$\frac{11}{8} - \frac{1}{4}$$

15.3.2
 3' 2' 3'
 3' 2' 3'

13.3.2
 3' 2' 3'

$$x > 2 \quad \frac{x}{2} \neq \frac{5}{4}$$

$$x > \frac{11}{4} \quad \frac{5}{2} \neq \frac{11}{4}$$

$$\log_{\frac{x-1}{2}} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right); \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}} \left(\frac{x}{2} - 1 \right); \log_{\frac{x}{2}-1} \left(x - \frac{11}{4} \right)^2$$

Сумма 0/3

$$a = \frac{x}{2} - 1$$

$$b = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

$$c = \sqrt{x - \frac{11}{4}}$$

$$\frac{3}{24}$$

$$\frac{56}{504}$$

$$\frac{256}{8064}$$

$$\frac{13}{6}$$

$$\frac{28}{6}$$

$$\frac{6}{84}$$

$$\log_{\frac{x}{2}-1} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}} \frac{x-1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \log_a b; 2 \log_c a; 2 \log_b c$$

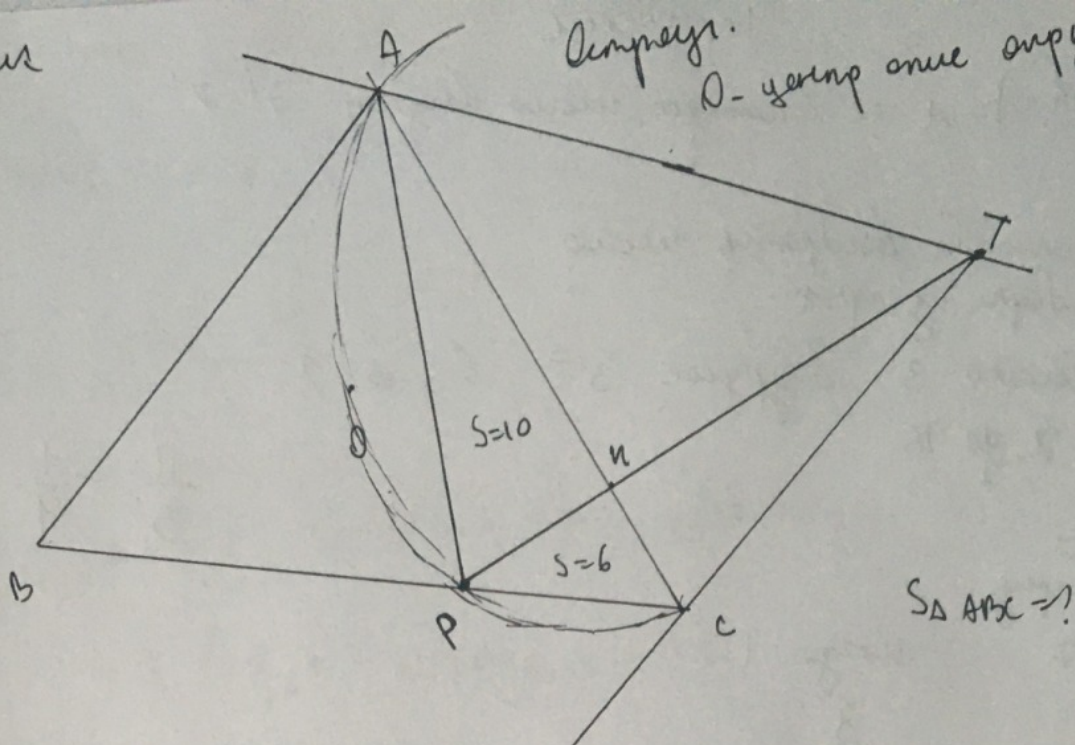
$$\frac{11}{8} - 1$$

$$\frac{3}{8}$$

$$\frac{4}{8}$$

Чертежи

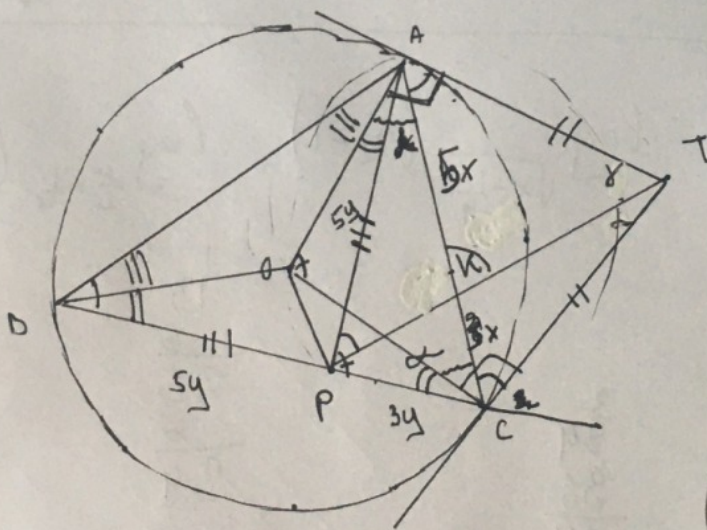
Стереометрия.
D - центр окружности.



через T касательная к окружности
через T касательная к окружности

$S_{\Delta APK} = 10$
 $S_{\Delta PKC} = 6$
 $S_{\Delta ABC} = ?$

$\angle ATC = 2$



Тем же на окружности
середина OPCTA

$\left(\frac{5}{3}\right)$

$\{ + \} = 90$

$3y \cdot \sin \gamma \cdot 2x = 16$

$2y \cdot \sin \gamma \cdot 2x = ? \left(\frac{128}{3}\right)$

$\gamma = 2$
 $\angle ABC = \arctg 2 \quad AC = ?$

$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \quad \sin \alpha = 2 \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

SUICIDE

$$\begin{cases} \log_a b = 2 \log_{3a-b} a \end{cases}$$

Чепробен

$$\begin{cases} 2 \log_b 3a-b = 2 \log_{3a-b} a + 1 \end{cases}$$

$$b = a^{2 \log_{3a-b} a}$$

$$b \log_{3a-b} a \cdot \log_b 3a-b = 2 \log_{3a-b} a + 1$$

$$b \log_a a = 2 \log_{3a-b} a + 1$$

Упробем

$$3\left(\frac{x}{2}-1\right) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = x - \frac{11}{4}$$

$$\frac{x}{2} - 1 = a$$

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = b$$

$$x - \frac{11}{4} = 3a - b$$

$$a, b > 0$$

$$a \neq \frac{b}{3}$$

$$\frac{1}{2} \log_a b ; 2 \log_{3a-b} a ; 2 \log_b 3a-b$$

$$\frac{1}{2} \log_a b = 4 \log_{3a-b} a$$

$$\log_a b = \frac{4}{\log_b 3a-b} \quad b = \frac{11}{3}$$

$$\log_b 3a-b = a^4$$

$$\frac{1}{2} \log_a b = 4 \log_{3a-b} a = \log_b 3a-b$$

$$\log_{3a-b} a = \frac{1}{\log_{3a-b} b}$$

$$\log_{3a-b} a \cdot \log_{3a-b} b$$

$$a = \sqrt{3a-b}$$