Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101256**

ID профиля: **852629**

Вариант 19

Чистовик, ~~[illegible]~~, №1, вариант 19, стр. 1/11, часть 1,

Пусть $a_1 = m$, а разность прогрессии равна q. Тогда сумма первых четырнадцати членов прогрессии $a_1, a_2 \dots$ будет равна:

$$m + (m+q) + (m+2q) + \dots + (m+13q) =$$

$$= 14m + (1 + \dots + 13)q = 14m + \frac{13 \cdot 14}{2} q = 14m + 91q$$

В тех же обозначениях:

$$a_9 = m + 8q, \quad a_{17} = m + 16q$$

$$a_{11} = m + 10q, \quad a_{15} = m + 14q$$

Итак, $S = 14m + 91q$, тогда нер-ва $a_9 a_{17} > S + 12$ и $a_{11} a_{15} < S + 47$ переписываются так:

1) $(m+8q)(m+16q) > 14m + 91q + 12$

$$\Updownarrow$$

$$m^2 + 24mq + 128q^2 > 14m + 91q + 12$$

2) $(m+10q)(m+14q) < 14m + 91q + 47$

$$\Updownarrow$$

$$m^2 + 24mq + 140q^2 < 14m + 91q + 47$$

$$\Updownarrow$$

$$m^2 + 24mq + 140q^2 - 35 < 14m + 91 \cdot q + 12$$

Тогда заметим, что $m^2 + 24mq + 128q^2 > 14m + 91q + 12$ и $14m + 91q + 12 > m^2 + 24mq + 140q^2 - 35$

Тогда: $m^2 + 24mq + 128q^2 > m^2 + 24mq + 140q^2 - 35$

$$\Updownarrow$$

Чистовик, стр.
№1 (продолжение)
вариант 19, 2-1
[illegible]

$$128q^2 > 140q^2 - 35$$
$$\Updownarrow$$
$$35 > 12q^2$$
$$\Updownarrow$$
$$q^2 < \frac{35}{12}.$$

Но по условию арифм. прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots$ состоит из целых чисел, т.е. $a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$, а также $a_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_2 - a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow q \in \mathbb{Z}$.

Но $q^2 < \frac{35}{12}$, и т.к. $q \in \mathbb{Z}$, то $q \in \{-1, 0, 1\}$, т.к. если $|q| \geq 2$, то $q^2 \geq 4$, а $4 > \frac{35}{12} \Leftrightarrow 48 > 35$ – верно

~~Если q=0, то $m = a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$~~
~~Тогда $S = 14m$, $a_9 = m = a_{17} = a_{11} = a_{15}$~~
~~Тогда $\begin{cases} m^2 > 14m + 12 \\ m^2 < 14m + 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 14m - 12 > 0 \\ m^2 - 14m - 47 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$~~

Если $q=0$, то тогда арифм. прогрессия не будет возрастающей, а это противоречит условию. Если $q=-1$, то тогда арифм. прогрессия опять не будет возрастающей, а это противор условию. Значит, $q=1$.

21101256 (U852629 M1299567)

Тогда $S = 14m + 91$, $a_9 = m+8$, $a_{17} = m+16$, $a_{11} = m+10$, $a_{15} = m+14$.

Тогда первое $a_9 a_{17} > S+12$ ~~[illegible]~~ и $a_{11}a_{15} < S+47$ примут вид:

$(m+8)(m+16) > 14m+91+12$

и

$(m+10)(m+14) < 14m+91+47$

Запишем их в систему:

$$\begin{cases}(m+8)(m+16) > 14m+103\\ (m+10)(m+14) < 14m+138\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+24m+128 > 14m+103\\ m^2+24m+140 < 14m+138\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+10m+25>0\\ m^2+10m+2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+5)^2>0\\ \left(m-(-5+\sqrt{23})\right)\left(m-(-5-\sqrt{23})\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -5\\ \begin{cases} m < -5+\sqrt{23}\\ m > -5-\sqrt{23}\end{cases}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5+\sqrt{23}\\ m > -5-\sqrt{23}\\ m \neq -5\end{cases}$$

~~Но $m \in \mathbb{Z}$, и $0 > -5+\sqrt{23} > -1$, а также~~

~~$-10 < -5-\sqrt{23} < -9$ и (т.к. $4 < \sqrt{23} < 5$) Тогда~~

~~$m \in ([0,+\infty) \cup (-\infty;-10]) \cap \mathbb{Z}$, но $m = a_1$, значит~~

Ответ: ~~$a_1 \in ([0,+\infty) \cup (-\infty;-10]) \cap \mathbb{Z}$.~~

Но $m \in \mathbb{Z}$ и $m \in (-5-\sqrt{23}, -5) \cup (-5, -5+\sqrt{23})$.

Тогда, т.к. $4 < \sqrt{23} < 5$, то

$m \in \{-9, -8, -7, -6, -4, -2, -3, -1\}$, но $m = a_1$, зн

Ответ: $a_1 \in \{-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\}$.

Вариант 19, ч. 1, ~~[illegible]~~

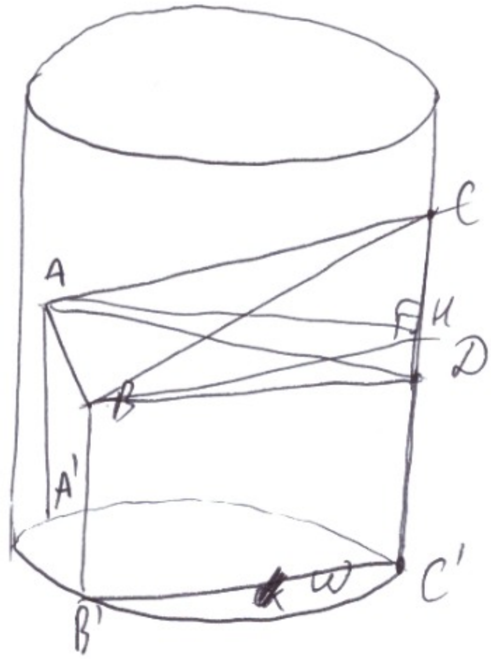


рис. 1

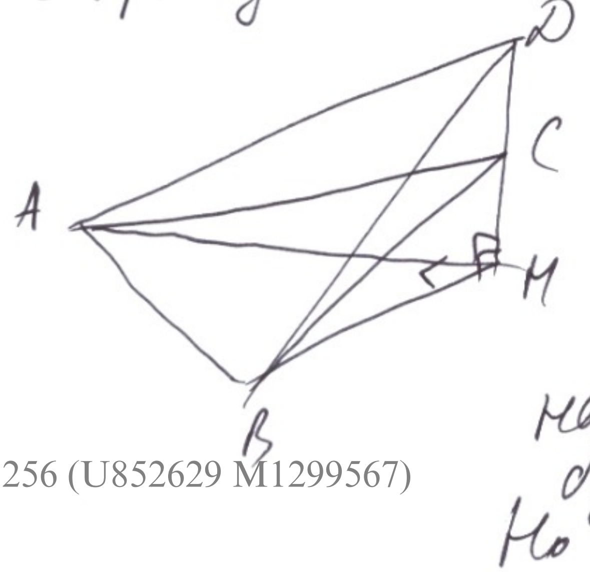
Возьмём произвольный тетраэдр ABCD, который удовлетворяет условию задачи и впишем его в цилиндр.

Пусть ω — плоскость нижнего основания цилиндра. Спроектируем вершины тетраэдра на плоскость ω. Поскольку цилиндр прямой (этот вопрос я уточнял у жюри во время олимпиады), ~~[illegible]~~ то его ось перпендикулярна ω. Но CD параллельно оси цилиндра по условию => (CD) ⊥ ω. Спроектируем вершины тетраэдра на ω. Пусть A проектируется в A', B проектируется в B', а C проектируется в C' (см. рис. 1). Но CD перпендикулярно ω => D тоже проектируется в D' (при проектировании D на плоскость ω). Опустим перпендикуляры из B и A на CD (перпендикуляры BH и AH). Заметим, что $\Delta BCD = \Delta ACD$ — по трём сторонам ($DB = AD = 7$, $BC = AC = 6$, CD — общая)

Тогда точки H и H' должны совпасть.
Заметим, что $B'C' \perp DC' \Rightarrow BHC'B'$ – прямоугольник $\Rightarrow BB' = HC'$. Аналогично $AHC'A'$ – прямоугольник $\Rightarrow AA' = HC' \Rightarrow AA' = BB' = HC'$. Но тогда $ABB'A'$ тоже прямоуг. (т.к. ~~AB~~ $BB' \parallel AA'$ и $BB' = AA'$, а также $BB' \perp A'B'$, т.к. $BB' \perp \omega$).
Тогда $AB = A'B'$. Поэтому задача сводится к следующему: через ребро AB тетраэдра $ABCD$, у которого $AC = CB = 6$, $AD = DB = 7$ и $AB = 2$, проводится плоскость β, перпендикулярная ребру CD. Пусть $(CD) \cap \beta = H$. Тогда рассмотрим радиус опис. окр-сти ΔABH. Он должен быть наименьшим из возможных. И ~~[illegible]~~ в итоге надо понять, какие значение может принимать ребро CD в тетраэдре с такими св-вами.

Рассм. 2 случая:

1) на прямой CD ~~точки~~ точки C D лежат по одну сторону от точки H.



Пусть $\angle AHB = \varphi$.
Тогда радиус опис. окр-сти ΔABH равен $\frac{AB}{2\sin\varphi}$. И этот радиус будет наименьшим, если $\sin\varphi$ будет наиб. из возможных.
Но $\sin\varphi \le 1 \Rightarrow$ чтобы радиус

был наименьшим надо, чтобы $\varphi = 90^\circ$.

Т.к. $\triangle BCD = \triangle ACD$ (как было сказано ранее), то $BH = AH$ — как соотв. эл.

Но тогда $\triangle AHB$ — прямоуг. и р/б $\Rightarrow$ т.к. $AB = 2$, то $AH = HB = \sqrt{2}$ (из теор. Пифагора). Тогда т.к. $BH \perp CD$ и $AH \perp CD$ (т.к. $(AHB) \perp (DC)$), то по теор. Пифагора $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} =$
$= \sqrt{6^2 - 2} = \sqrt{34}$, $DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{7^2 - 2} = \sqrt{47}$

Тогда, т.к. C и D лежат по одну стор от. точки H, то $CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$

~~Если же~~

2) Если C и D лежат по разные стор. от точки H, то ровно такими же рассуждениями получаем, что $AH = HB = \sqrt{2}$, $CH = \sqrt{34}$, $DH = \sqrt{47}$, но теперь уже, т.к. C и D лежат по разн. стор. от точки H, то $CD = CH + HD =$
$= \sqrt{34} + \sqrt{47}$

Ответ: CD может равняться $\sqrt{47} - \sqrt{34}$ или $\sqrt{47} + \sqrt{34}$.

Чистовик, №2 (продолжение), стр. 7/11
вариант 19, ч.1, ~~[illegible]~~

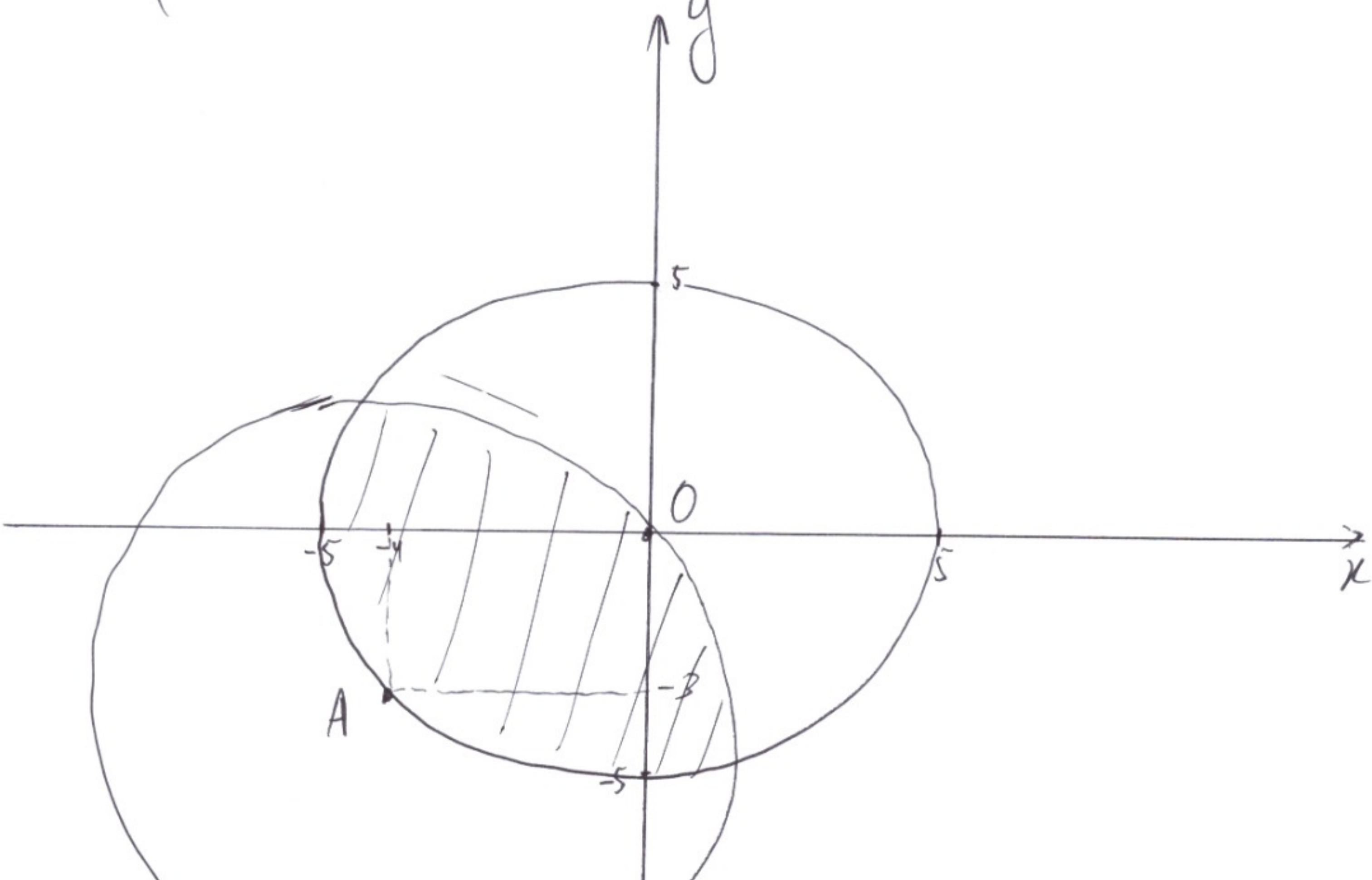
Посмотрим на второе уравнение системы, данной в условии.

Кузан Иван

$$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b,\ 25)$$
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le -8a-6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ a^2+8a+b^2+6b \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ a^2+8a+16+b^2+6b+9 \le 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \end{cases}$$



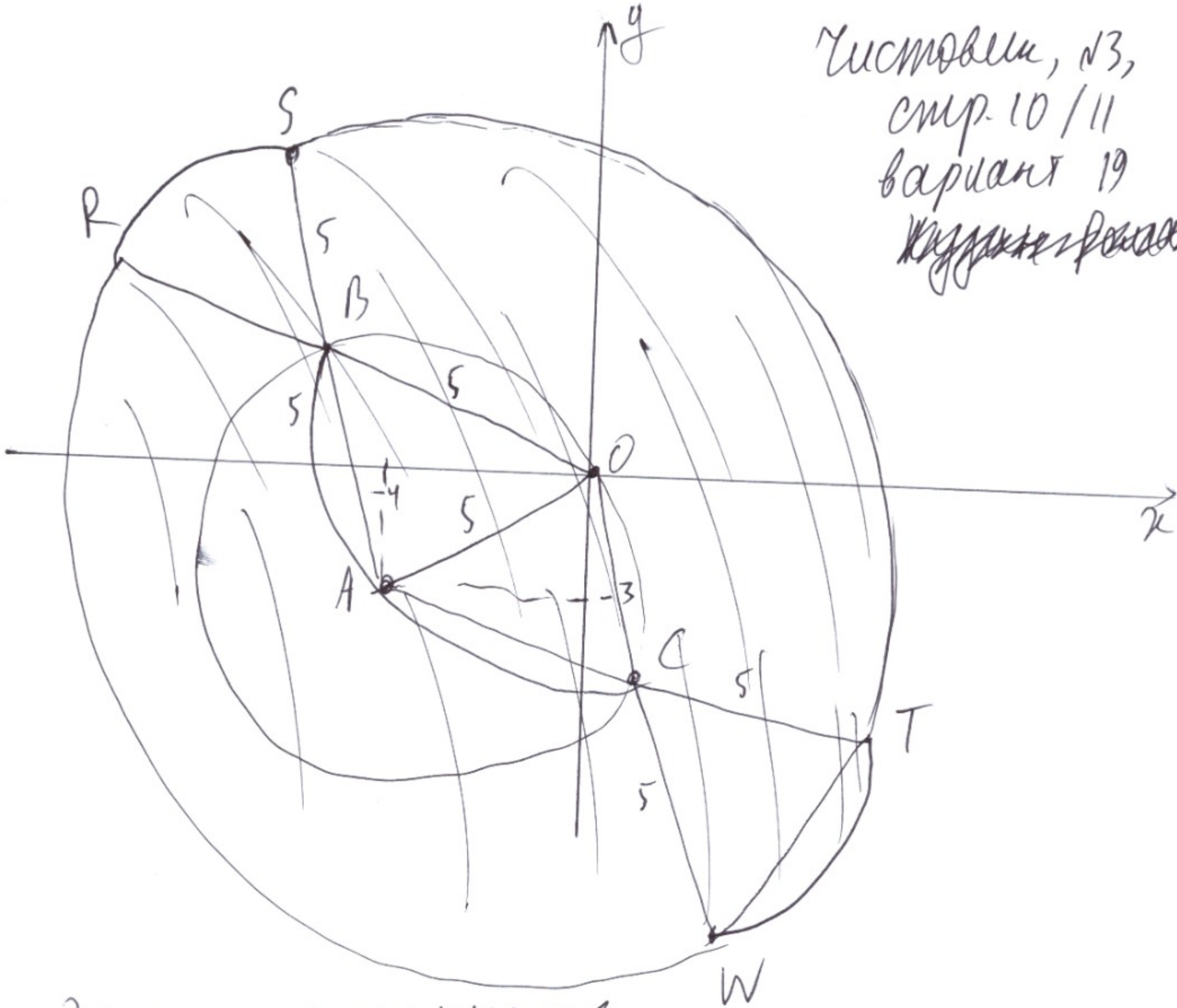
Тогда все возможные точки (a,b), удовле-
творяющие системе из условия, лежат в
закр. области. (закр. область – это пересечение
двух кругов: с центром в $(0,0)$ и радиусом
5 и с центром в $(-4,-3)$ и радиусом 5).
Теперь посмотрим на первое ур-ие системы
из условия. ~~Это~~ Оно представляет из себе
ур-ие ~~окружн~~ круга с центром в (a,b) и радиусом
5. По предыдущим рассуждениям мы знаем,
что все точки (a,b), удовлетворяющие сис-
теме из условия лежат в закр. области. K
~~По сути система из у~~ ~~Это~~ Пусть мн-во ~~K~~ K
– это мн-во всех точек, лежащих в закр.
области. ~~Тогда система из условие равно-
сильна следующему:~~ Тогда задача переформулируется так: ~~в если~~ для точки (x,y) существует такая точка (a,b), что $(a,b) \in K$ и
расст. м-ду (x,y) и (a,b) не больше 5 тогда
и только тогда, когда (x,y) лежит в искомом
мн-ве M. Но тогда мн-во M – это объединение
всех возможных кругов в центре в закр. облас-
ти и радиусом 5. Тогда мн-во M – это такое
мн-во:

21101256 (U852629 M1299567)

Чистовик, №3, стр. 9/11

~~[illegible]~~ вариант 19, ч.1

Чистовик, №3, стр. 10/11
вариант 19



~~Это так, поскольку это~~

Тогда пусть $A=(-4,-3)$, а точки C и B — это точки пересеч. окр-стей с центром в O и радиусом 5 и с центром в A и радиусом 5. Заметим, что $AO=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $OC=AC=5 \Rightarrow \Delta AOC$ — равност. $\Rightarrow \angle OAC=60^\circ$. Аналогично ΔAOB — равностор. $\Rightarrow \angle OAB=60^\circ$. Тогда $\angle BAC=60^\circ+60^\circ=120^\circ$.

Пусть S — ~~точка пересеч~~ — это такая точка, что $AS=10$ и AB прох. через S, T — такая точка, что $T\in AC$ и $AT=10$, W — такая точка, что

$OW=10$ и $W \in OC$, R — такая точка, что $R \in OB$ и $OR=10$. Тогда площадь сектора, ~~SAT~~ ограниченного углом $\angle SAT = 120^\circ$, равна

$\frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{3}$

~~А~~ Т.к. $\triangle AOB$ и $\triangle AOC$ — равностор., то $\angle BOA = \angle AOC = 60^\circ \Rightarrow \angle BOC = 120^\circ \Rightarrow \angle ROW = 120^\circ$.

Тогда площадь сектора, огр. $\angle ROW = 120^\circ$, будет равна $\frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{100\pi}{3}$

Теперь заметим, что т.к. $\triangle AOB$ и $\triangle AOC$ — равност. то $\angle ABO = \angle ACO = 60^\circ = \angle RBS = \angle TCW = 60^\circ$. Тогда площадь секторов, ограниченных углами $\angle RBS = 60^\circ$ и $\angle TCW = 60^\circ$ в ~~окр~~ кругах с центрами B и C и радиусами 5, равна $\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{1}{6} \cdot 25\pi = \frac{25\pi}{6}$

Тогда площадь фигуры M равна:

$\frac{25\pi}{6} + \frac{25\pi}{6} + \frac{100\pi}{3}^{\backslash 2} + \frac{100\pi}{3}^{\backslash 2} = \frac{50\pi}{6} + \frac{400\pi}{6} = \frac{450\pi}{6} = \frac{150\pi}{2} = 75\pi$

Ответ: 75π.

~~[illegible]~~, вариант 19, 7.1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

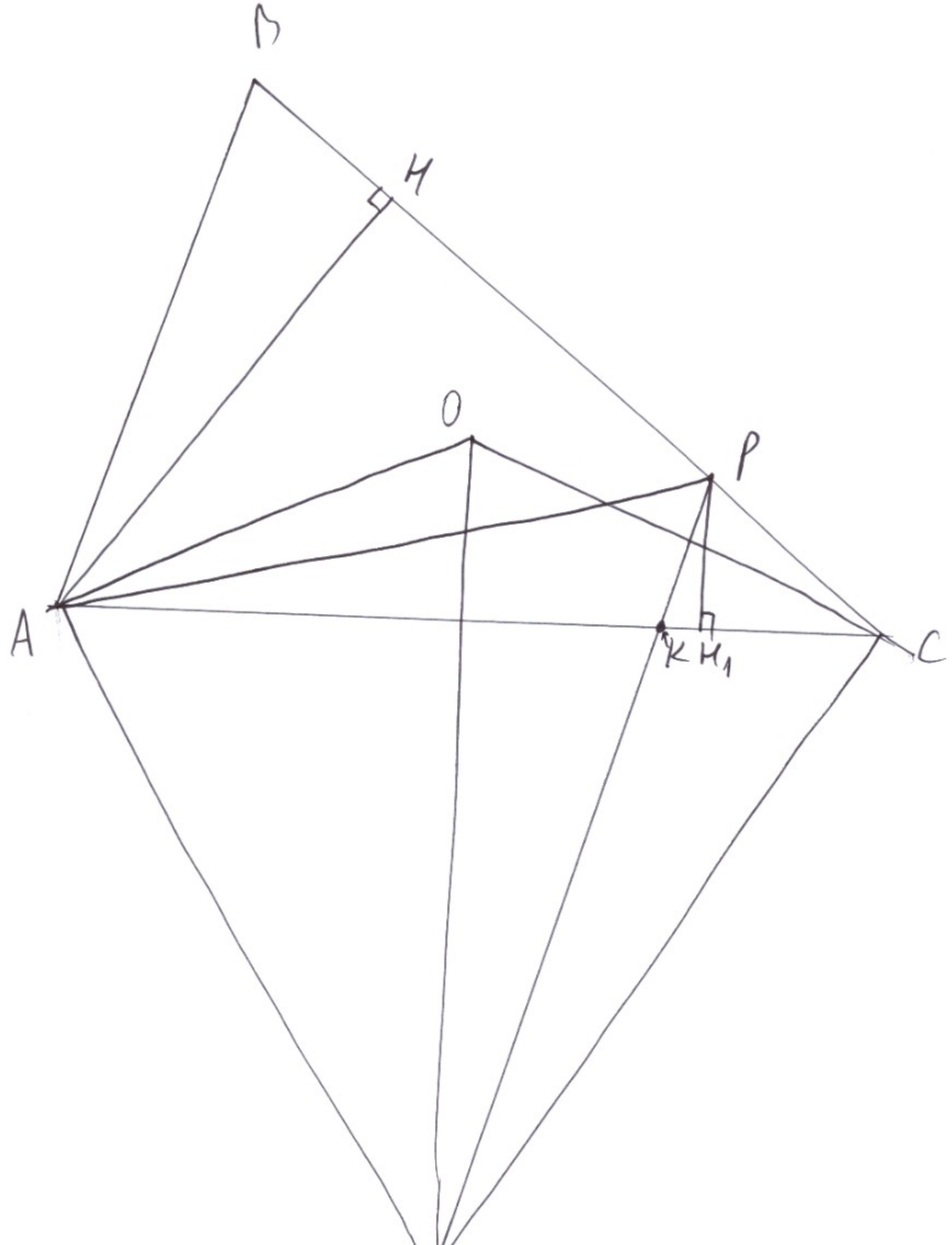
Шифр: **21101256**

ID профиля: **852629**

Вариант 19

№6.

а)



Пусть $\angle ABC=\beta$. Тогда по теор. о впис. угле $\angle AOC=2\beta$. Но $AOPC$ – впис. 4-уг. $\Rightarrow$ $\angle APC=\angle AOC=$ $=2\beta$. Но $\angle APC$ – внешний для $\triangle APB$. $\angle ABP=\beta\Rightarrow$

по теореме о внешнем угле:

$\angle PAB = \angle APC - \angle ABP = 2\beta - \beta = \beta \Rightarrow \angle PAB = \angle ABP \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABP$ – р/б ~~…~~ и $AP = BP$.

Пусть PH_1 – перпендикуляр из P на AC.

Тогда $S_{APK} = \frac{1}{2} AK \cdot PH_1$, $S_{PKC} = \frac{1}{2} KC \cdot PH_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{APC}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC}$. Но $S_{APC} = 10$, $S_{CPK} = 6$.

Тогда $\frac{AK}{KC} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

~~Теперь посмотрим на вписанный четырехугольник~~

Заметим, что $AOCT$ – впис. четырехугольник, т.к. CT и AT – касательные к ω, значит

$\angle OCT + \angle OAT = 90° + 90° = 180°$.

Тогда $APCT$ тоже впис., т.к. T и P лежат на опис. окр-сти $\triangle AOC$. Но по св-ву касательных $TA = TC$. Тогда T – середина дуги $(ATC) \Rightarrow$

$\Rightarrow PT$ – бис-са $\angle APC$. По св-ву бис-сы

$\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$, но $\frac{AK}{KC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{5}{3}$.

Воспользуемся доказанным ранее равенством $AP = BP$: $\frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PC} \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{5}{3}$.

Теперь заметим, что $S_{APC} = S_{APK} + S_{CPK} = 10 + 6 = 16$

Чистовик, №6, стр. 3, вар. 19, г. 2

Также ~~из~~ опустим высоту из A на BC. Обозначим её как AH. Тогда

$S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot AH$, $S_{APC} = \frac{1}{2} PC \cdot AH$

Тогда $\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \frac{5}{3}$ по предыдущему

Но $S_{APC} = 16 \Rightarrow S_{APB} = 16 \cdot \frac{5}{3} = \frac{80}{3}$ ~~$26\frac{2}{3}$~~

Но тогда $S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} = \frac{80}{3} + 16 = 26\frac{2}{3} + 16 = 42\frac{2}{3}$

Ответ: $42\frac{2}{3}$.

б) Если $\angle ABC = \mathrm{arctg}\, 2$, то по предыдущему $\angle APC = 2\mathrm{arctg}2 \Rightarrow \angle APB = \pi - 2\mathrm{arctg}2$

$S_{APB} = \frac{1}{2} AP \cdot BP \cdot \sin\angle APB \underset{\substack{\text{т.к. } AP = PB \\ \text{по предыдущ.}}}{=} \frac{1}{2} AP^2 \cdot \sin(\pi - 2\mathrm{arctg}2) =$

$= \frac{1}{2} AP^2 \cdot \sin(2\mathrm{arctg}2) = \frac{1}{2} AP^2 \cdot \cancel{\frac{2\sqrt{5}}{8}}\ \frac{4}{5} = \cancel{\frac{AP^2\sqrt{5}}{5}}\ \frac{AP^2 \cdot 2}{5}$

~~Иначе~~

Но $S_{APB} = \frac{80}{3}$ — по предыдущ. $\Rightarrow$

$\frac{80}{3} = \frac{AP^2 \cancel{\sqrt{5}}\, 2}{5} \Leftrightarrow 400 = 2 \cdot 3\, AP^2 \cdot \cancel{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cancel{\frac{400\sqrt{5}}{18}}\ \frac{200}{3} = AP^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AP = \cancel{\frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{15}}}\ \boxed{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ ~~10~~. Но по предыдущему

т.к. ABO

$\frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{PC}{AP} = \frac{3}{5} \Rightarrow PC = \frac{3}{5} \cdot AP = \cancel{\frac{3 \cdot 20 \cdot \sqrt{5}}{5 \cdot \sqrt{15}}} =$

$= \cancel{\frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{15}}}\ \frac{3}{5} \cdot \frac{10\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$

По теор. косинусов:

$AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cdot\cos\angle APC=AC^2$

$\Downarrow$

$\frac{600}{9}+4\cdot6-2\cdot\frac{10\sqrt6}{3}\cdot2\sqrt6\cdot\cos(2\,\mathrm{arctg}\,2)=AC^2$

$\Downarrow$

$\frac{600}{9}+24-\frac{40\cdot\cancel{6}^{2}}{\cancel{3}}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=AC^2$

$\Downarrow$

$\frac{600}{9}+24+80\cdot\frac{3}{5}=AC^2$

$\Downarrow$

$\frac{200}{3}+24+48=AC^2$

$\Downarrow$

$\frac{200}{3}+72=AC^2$

$\frac{200}{3}+\frac{216}{3}=AC^2 \Leftrightarrow \frac{416}{3}=AC^2 \Leftrightarrow AC^2=\frac{26\cdot4^2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AC=\frac{4\sqrt{26}}{\sqrt3}=\frac{4\sqrt{78}}{3}$

Ответ: $\frac{4\sqrt{78}}{3}$

чистовик, <u>№4</u>, вариант 19, г.2, стр. 5/11

Заметим, что если каждое из чисел a, в, c делит число $3^{17}\cdot 7^{15}$, то каждое из чисел a, в, c имеет вид:

$a=3^m\cdot 7^n$, $в=3^k\cdot 7^l$, $c=3^p\cdot 7^q$.

т.к. НОД$(a,в,c)=21$, то, т.к. $21=3\cdot 7$, то

$\min(m,k,p)=1$, $\min(n,l,q)=1$.

т.к. НОК$(a,в,c)=3^{17}\cdot 7^{15}$, то $\max(m,k,p)=17$,

$\max(n,l,q)=15$.

Итак, разберем случаи:

1) $m=1$, $k=17$, $1<p<17$. Тогда все числа a, в, c попарно различны (потому что не совп. степени при тройке).

Тогда мы знаем, что одно из чисел n, l, q должно быть равно 1, одно из них должно быть равно 15, а третье должно лежать на [1, 15]. Всего вариантов таких троек чисел $15\cdot 3\cdot 2\cdot 15=15\cdot 6\times 15=90\times 15=1350$

2) $m=1$, $k=17$, $p=1$. Тогда мы знаем, что одно из чисел n, l, q должно равняться 1, другое 15, а третье лежать на [1, 15].

21101256 (U852629 M1299568)

Тогда всего вариантов будет $3\cdot 2\cdot 15-2$, т.к.

$90-2=88$.

мы по два раза посчитали варианты

Чистовик №4

$\begin{cases} m=1, k=17, p=1 \\ n=1, l=15, k=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} m=1, k=17, p=1 \\ n=15, l=1, k=15 \end{cases}$

3) то же самое со ~~вариантами~~ случаем $m=1, k=17, p=17$.
Вариантов чисел будет 88.

~~4)~~ 8) $m=17, k=1, 1<p<17$.
Аналогично предыдущему вариантов будет 1350

5) $m=17, k=1, p=1$. Аналогично предыдущему вариантов будет 88

6) ~~A~~ $m=17, k=1, p=17$. Аналогично предыдущему вариантов будет 88.

7) ~~m~~ $k=17, p=1, 1<m<17$.
Аналогично предыдущему вариантов будет 1350

8) $k=17, p=1, m=17$ – ~~варианты уже~~ Аналогично предыдущему вариантов будет 88.

9) $k=17, p=1, m=1$ – эти вар. уже посчитаны в п. 2

10) $k=1, p=17, 1<m<17$.
Аналогично: вариантов будет 1350

11) $k=1, p=17, m=1$ Аналогично предыдущему: новых вариантов будет 88

2101256 (U852629 M1299568)

12) $k=1$, $p=17$, $m=17$ – эти варианты уже посчитаны в пункте 6

13) $m=1$, $p=17$, $1<k<17$.

Аналогично: новых вариантов будет 1350

14) $m=1$, $p=17$, $k=1$ – эти варианты уже посчитаны в пункте 11

15) $m=1$, $p=17$, $k=17$ – эти варианты уже посчитаны в пункте 3

16) $m=17$, $p=1$, $1<k<17$. Аналогично новых вариантов будет 1380

17) $m=17$, $p=1$, $k=1$. – эти варианты уже посчитаны в пункте 5

18) $m=17$, $p=1$, $k=17$ – эти варианты уже посчитаны в пункте 8

Итого: всего вариантов будет:

$1350 \times 6 + 88 \times 6 = 8628$

Ответ: 8628

19

чистовик, стр. 7, "вариант",
ч.2

№5. Чистовик

Чтобы все логарифмы были определены, надо, чтобы:

вариант 19, 7.2
№5

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2}-1\right)^2 \neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0 \\ \frac{x}{2}-1>0 \\ x-\frac{11}{4}>0 \\ x-\frac{11}{4}\neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{11}{4} \\ x\neq 0 \\ x\neq 4 \\ x\neq \frac{15}{4} \\ x\neq \frac{5}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Теперь заметим, что если выполнены все условия системы (*), то

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot 2\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right) =$$

$$= 2$$

Пусть a — это такое число, что

$$\{a, a, a+1\} = \left\{\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right), \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right), \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2\right\}$$

такое a существует по условию.

Тогда $a \cdot a \cdot (a+1) = 2$ Чистовик, стр. 9/11

Вариант 19,7.2

№5

$$\Updownarrow$$

$$a^3 + a^2 = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$a^3 + a^2 - 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(a-1)(a^2 + 2a + 2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(a-1)\left((a+1)^2 + 1\right) = 0$$

$$\Updownarrow \text{ т.к. } (a+1)^2 + 1 > 0$$

$$a - 1 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a = 1$$

Тогда какие-то два из этих логарифмов равны 1, а другой равен 2.

~~Разберем случаи:~~

~~1)~~ $\cancel{\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = 1 \quad \log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 1}$

$$\cancel{\Updownarrow}$$

~~Если выполнены все условие сист. (*), то~~

$$\cancel{2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right) = 2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 1}$$

$$\cancel{\Updownarrow}$$

~~Тогда~~ $\cancel{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = x - \frac{11}{4}, \quad \log_{x-\frac{11}{4}} \quad \left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{2} - 1}$

$$\cancel{\Updownarrow}$$

$$\cancel{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = x^2 + \frac{121}{16} - \frac{11}{2}x \Leftrightarrow x^2 + \frac{125}{16} - 6x = 0}$$

$$\cancel{\Updownarrow}$$

Разберем случаи: чистовик №5, стр. 10/11 вариант 19, 7-2

1) $2\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2$

$\Updownarrow$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-1$

$\Updownarrow$

$\frac{x}{2}=\frac{11}{4}-1$

$\Updownarrow$

$\frac{x}{2}=\frac{7}{4}$

$\Updownarrow$

$x=\frac{7}{2}$

Тогда $2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)=2\log_{\frac{6}{4}}\cancel{\frac{28}{4}}\left(\frac{14}{4}-\frac{11}{4}\right)=$

$=2\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}\neq 1$ $\cancel{2\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}\neq 2}$

2) $2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)=2$

$\Updownarrow$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4}$

$\Updownarrow$

$\cancel{\frac{x}{2}=\frac{7}{4} \Leftrightarrow x=\frac{7}{2}}$

$\frac{x}{2}=\frac{10}{4}$

$\Updownarrow$

$\frac{x}{2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=5$

Тогда $2\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right)=$

$=2\log_{\frac{9}{4}}\frac{3}{2}=1$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\log_{\frac{5}{2}-1}\left(\frac{10}{4}-\frac{1}{4}\right) = 1$

Тогда $x=5$ подходит

Чистовик
вариант 19
ч.2, №5

3) $\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=2$. Тогда

$\Updownarrow$

$2\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1$ и $2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right)=1$

$\Updownarrow$

$\left(x-\frac{11}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\Updownarrow$

$x-\frac{11}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$

$\Updownarrow$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1$

$\Updownarrow$

$\frac{x^2}{4}-2x+\frac{15}{4}=0$

$\Updownarrow$

$x^2-8x+15=0$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l}\boxed{x=5} \text{ — подходит} \\ x=3\end{array}\right.$

Если $x=3$, то

$\frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{4}\neq 2$

Тогда $x=3$ не подходит.

Тогда ответ: $x=5$.

вариан