Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101137**

ID профиля: **253073**

Вариант 19

Чистовик

$\boxed{1.}$ d – разность арифм. прогрессии, тогда по формуле суммы n 1х членов прогрессии: $S = \frac{14}{2}(a_1 + a_{14}) =$

$= 7(a_1 + a_1 + 13d) = 14a_1 + 91d$, т.к. $a_{14} = a_1 + 13d$ – по опр. ар. прогрессии

$$\begin{cases} a_9 a_{17} > S + 12 \\ a_{11} a_{15} < S + 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1 + 91d + 12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d - 14a_1 > 91d + 12 - 128d^2 \\ a_1^2 + 24a_1 d - 14a_1 < 91d + 47 - 140d^2 \end{cases}$$

$91d + 12 - 128d^2 < a_1^2 + 24a_1 d - 14a_1 < 91d + 47 - 140d^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 91d + 12 - 128d^2 < 91d + 47 - 140d^2 \Leftrightarrow 12d^2 < 35 \Leftrightarrow$

$d^2 < \frac{35}{12}$, т.к. все члены прогрессии целые, то $d \in \mathbb{Z}$

к тому же прогр. возрастающая $\Rightarrow d \in \mathbb{N}$, тогда

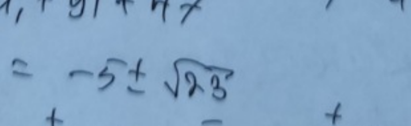
$d < \sqrt{\frac{35}{12}} < \sqrt{\frac{36}{12}} = \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} d < \sqrt{3} \\ d \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow d = 1$

С учетом этого перепишем систему:

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = -5 \pm \sqrt{23}$

$D' = 25 - 2 = 23$



$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Leftrightarrow (a_1+5)^2 > 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -5$

$\begin{cases} -5-\sqrt{23} < a_1 < -5+\sqrt{23} \\ a_1 \neq -5 \end{cases}$, $a_1 \in \mathbb{Z}$ по условию

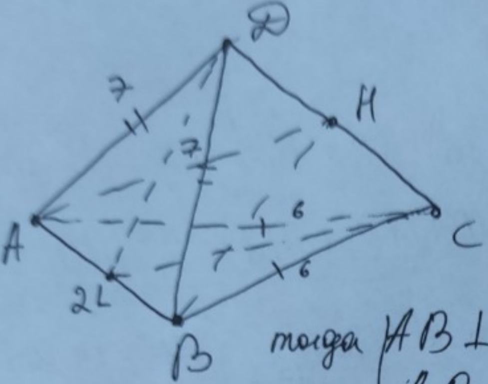
Чистовик

$-5-\sqrt{23} < a_1 < -5+\sqrt{23} \Rightarrow$ ~~$-9 \le a_1 \le 0$~~ $-5-\sqrt{16} \le a_1 \le -5+\sqrt{25}$

$-9 \le a_1 \le 0$, тогда $a_1 \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0$.

$\boxed{2.}$



1) $AD = DB \Rightarrow \triangle ADB$ – р/б

DL – высота $\Rightarrow AL = LB$, т.к. $\triangle ADB$ – р/б

$AC = CB \Rightarrow \triangle ACB$ – р/б

CL – высота, ~~медиана~~, т.к. $\triangle ACB$ – р/б

тогда $\left|\begin{array}{l} AB \perp CL \\ AB \perp DL \\ DL \cap CL = L \end{array}\right. \Rightarrow AB \perp (DLC) \Rightarrow AB \perp DC$

2) $\left.\begin{array}{l} BD = AD \\ AC = BC \\ DC \text{ – общая ст. для} \\ \triangle ADC \text{ и } \triangle BDC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADC = \triangle DBC$ по 3м сторонам

Проведу высоту AH в $\triangle ADC$, тогда BH – высота в $\triangle DBC$, ~~т.к. $\triangle ADC = \triangle DBC$~~

$\left.\begin{array}{l} AD = DB \\ DH \text{ – общая ст. для } \triangle ADH \text{ и } \triangle BDH \\ \angle ADH = \angle BDH \text{ (из } \triangle ADC = \triangle BDC) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADH = \triangle BDH$ по СУС $\Rightarrow$

BH – высота, $BH = AH = y$; $DC = x$

3) $\left.\begin{array}{l} DC \perp BH \\ DC \perp AH \\ AH \cap BH = H \end{array}\right\} \Rightarrow DC \perp (ABH)$, DC параллельна оси цилиндра, назову её l ($DC \parallel l$)

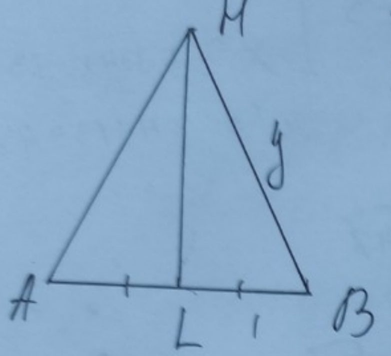
α – пл-ть основания цилиндра, тогда имеем:

$\left.\begin{array}{l} DC \perp (ABH) \\ DC \parallel l \\ l \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow (ABH) \parallel \alpha \Rightarrow \triangle ABH$ ~~описан окр~~ вписан в окружность с радиусом R, где R – радиус цилиндра.

ВН- высота, ВН = АН = у; DC = X

Чистовик

4)



По теореме о площади Δ-ка:

$S_{AHB} = \frac{1}{2} AB\cdot HL = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sqrt{y^2-1} = \sqrt{y^2-1}$

$(HL = \sqrt{HB^2-LB^2})$

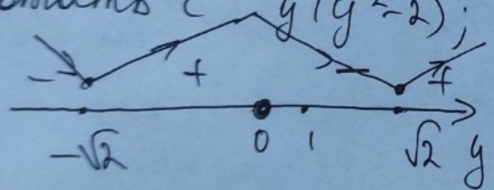
$S_{AHB} = \frac{AH\cdot HB\cdot AB}{4R} = \frac{y\cdot y\cdot 2}{4R} = \frac{y^2}{2R}$

Приравняю: $\frac{y^2}{2R} = \sqrt{y^2-1} \Rightarrow R = \frac{y^2}{2\sqrt{y^2-1}}$

Исследую ф-ю $R(y)$: $R'(y) = \frac{2y\cdot\sqrt{y^2-1} - \frac{1}{2\sqrt{y^2-1}}\cdot 2y\cdot y^2}{2(y^2-1)} =$

$= \frac{y}{2(y^2-1)}\left(2\sqrt{y^2-1} - \frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}}\right) = \frac{y(y^2-2)}{2(\sqrt{y^2-1})^3}$, $y^2 \geq 1 \Leftrightarrow |y| \geq 1$

замечу $2(\sqrt{y^2-1})^3 > 0 \Rightarrow$ не влияет на знак $R'(y) \Rightarrow$ могу работать с $y(y^2-2)$; $y(y^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

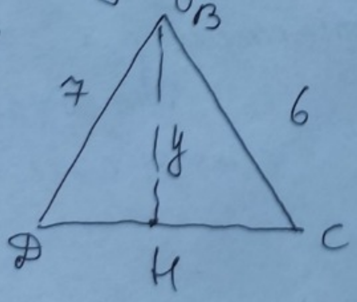


т.к. y - сторона, то $\begin{cases} y > 0 \\ |y| \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$y \geq 1$

тогда из анализа $R'(y)$ получаем, что минимальное значение $R(y)$ достигается в $y = \sqrt{2}$.

5) $DC = x$;



По теореме Пифагора:

$\begin{cases} DH^2 + y^2 = BD^2 \\ HC^2 + y^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-HC)^2 + y^2 = 49 \\ HC^2 + y^2 = 36 \end{cases}$

вычту: $x^2 - 2xHC = 13 \Rightarrow$

$HC = \frac{x^2-13}{2x}$

из 2-го ур. системы: ~~$y = \sqrt{}$~~ $y^2 = 36 - HC^2 = 36 - \left(\frac{x^2-13}{2x}\right)^2$

из п.4. $y = \sqrt{2} \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow 36 - \left(\frac{x^2-13}{2x}\right)^2 = 2$

Чистовик

$$\left(\frac{x^2-13}{2x}\right)^2=34 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\frac{x^2-13}{2x}=\sqrt{34}\\ \frac{x^2-13}{2x}=-\sqrt{34}\end{array}\right.\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-2\sqrt{34}x-13=0\\ x^2+2\sqrt{34}x-13=0\end{array}\right.$$

$D'=34+13=47$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{34}\pm\sqrt{47}\\ x=-\sqrt{34}\pm\sqrt{47}\end{array}\right.\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\sqrt{34}+\sqrt{47}\\ x=\sqrt{47}-\sqrt{34}\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\sqrt{47}\pm\sqrt{34}=CD$

$\boxed{3.}$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,\ 25)\end{cases}$$

1. $\begin{cases}-8a-6b\ge 0\\ -8a-6b\le 25\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b\le -\frac{4}{3}a\\ b\ge -\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}\end{cases}$

тогда 2-е нер-во примет вид: $a^2+b^2\le -8a-6b$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9\le 25 \Leftrightarrow \begin{cases}(a+4)^2+(b+3)^2\le 25\\ -\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}\le b\le -\frac{4}{3}a\end{cases}$

2. $-8a-6b>25 \Leftrightarrow b<-\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}$

2-е нер-во примет вид: $\begin{cases}a^2+b^2\le 25\\ b<-\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}\end{cases}$

найду точки пересечения окружностей: $\begin{cases}a^2+b^2=25\\ (a+4)^2+(b+3)^2=25\end{cases}$

вычту:

$8a+6b=-25 \Rightarrow b=-\frac{4}{3}a-\frac{25}{6} \Rightarrow$ точки пересечения лежат на прямой $b=-\frac{4}{3}a-\frac{25}{6}$

построю гр-к

Черновик

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{14}$ возр. $\quad a_1, a_2 \ldots a_n \in \mathbb{Z}$

$a_{\ldots} \, a_{17} > S + 12 \qquad a_1 - ?$

$a_{11} \, a_{15} < S + 47$

$S = \frac{14}{2}(a_1 + a_{14}) = 7(2a_1 + 13d)$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47$

$$\begin{cases} a_1^2 + 16a_1d + 8a_1d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 14a_1d + 10a_1d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + \underbrace{(24d - 14)}_{=2\cdot(12d-7)}a_1 + 128d^2 - 91d - 12 > 0 \\ a_1^2 + (24d - 14)a_1 + 140d^2 - 91d - 47 < 0 \end{cases}$$

$D' = (12d - 7)^2 - \cancel{128}d^2 + 91d + 12 = 144d^2 - 168d + 49 - 128d^2 + 91d + 12$

$= 16d^2 - 77d + 61$

$D' = 4d^2 - 77d + 96 \geq 0$

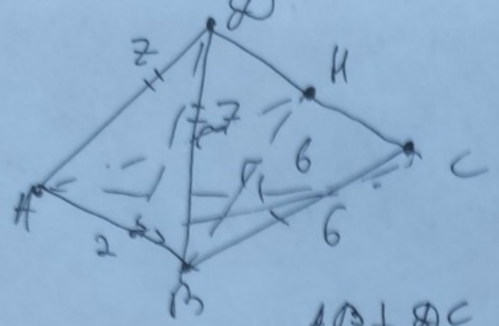
$$\begin{cases} 128d^2 + (24a_1 - 91)d + a_1^2 - 14a_1 - 12 > 0 \\ 140d^2 + (24a_1 - 91)d + a_1^2 - 14a_1 - 47 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d - 14a_1 > 91d + 12 - 128d^2 \\ a_1^2 + 24a_1d - 14a_1 < 91d + 47 - 140d^2 \end{cases} \Rightarrow 91d + 12 - 128d^2 < 91d + 47 - 140d^2$$

$12d^2 < 35 \Rightarrow d^2 < \frac{35}{12}$

$\left[\begin{array}{l} d^2 = 1 \\ d^2 = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{d = 1}$

Черновик



$AB = 2$

$AC = CB = 6$

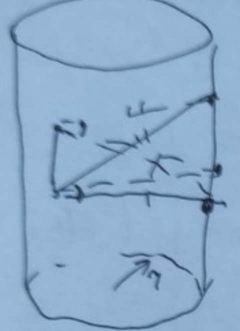
$AD = DB = 7$

6 ~~цил~~, все верш. на бок. пов-ти

$CD \parallel$ оси цил.

$R_{цил.}$ - min из получ. CD - ?

$AB \perp DC$



$AB \parallel$ оси цил.

AB - опис. ω с R-цил.

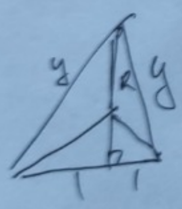
$DC = x$

$BH = AH = y$

$$\begin{cases} y^2 + HC^2 = 36 \\ y^2 + \cancel{DH} (x - HC)^2 = 49 \end{cases}$$

$x^2 - 2xHC = 13 \Rightarrow HC = \dfrac{x^2 - 13}{2x}$

$y^2 = 36 - HC^2 = \cancel{36} - \left(\dfrac{x^2 - 13}{2x}\right)^2$



$y \in (\cancel{1}; 6)$

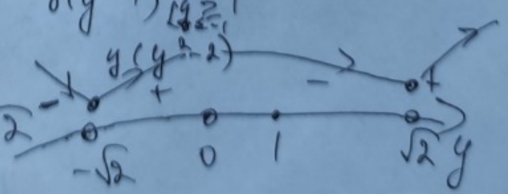
$\dfrac{y^2 \cdot 2}{4R} = \cancel{y} \sqrt{y^2 - 1}$

$R = \dfrac{y^2}{2\sqrt{y^2-1}} = \dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{y^4}{y^2 - 1}} = \dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^4}}}$

$R' = \dfrac{1}{2} \dfrac{\left(2y\sqrt{y^2-1} - \dfrac{y^2 \cdot 2y}{2\sqrt{y^2-1}}\right)}{4(y^2-1)} = \dfrac{y}{8(y^2-1)} \left(2\sqrt{y^2-1} - \dfrac{y^2}{\sqrt{y^2-1}}\right) =$

$= \dfrac{y}{8(y^2-1)^{\frac{3}{2}}} (2y^2 - 2 - y^2)$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$



$y = \sqrt{2}$ - R - min

$y^2 = 2 = 36 - \left(\dfrac{x^2 - 13}{2x}\right)^2 \Rightarrow \left(\dfrac{x^2-13}{2x}\right)^2 = 34 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 13}{2x} = \sqrt{34}$

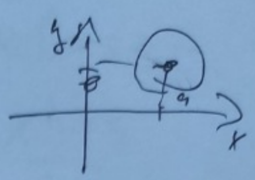
21101137 (U253073 M1302920)

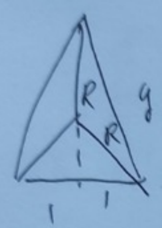
Черновик

$x^2 - 2\sqrt{34}\,x - 13 = 0$

$D' = 34 + 13 = 47$

$x = \dfrac{\sqrt{34} \pm \sqrt{47}}{\cancel{2}}$ $x = \sqrt{34} + \sqrt{47}$





$R = \sqrt{y^2-1} - \sqrt{R^2-1}$

$\cancel{R^2-1} = \left(\sqrt{y^2-1} - R\right)^2 = y^2 - 1 - 2\sqrt{y^2-1}\,R + R^2$

$R = \dfrac{y^2}{2\sqrt{y^2-1}}$

$\exists\,(a,b)$ Фц (x,y) | $\begin{cases}(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 25 \\ a^2 + b^2 \le \min(-8a-6b,\ 25)\end{cases}$

$-8a - 6b \ge 0 \Leftrightarrow b \le -\frac{4}{3}a$

$-8a - 6b \le 25 \Rightarrow b \ge -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

$-\frac{4}{3}a - \frac{25}{6} \le b \le -\frac{4}{3}a$, то 2-е ур.: $a^2 + b^2 \le -8a - 6b$

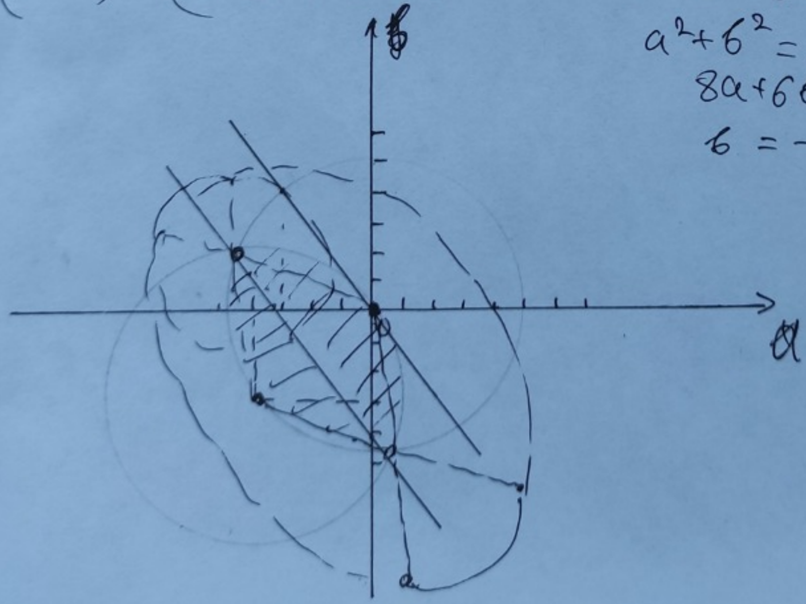
$(a+4)^2 + (b+3)^2 \le 25$

$a^2 + b^2 + 8a + 6b = 0$

$a^2 + b^2 = 25$

$8a + 6b = -25$

$b = -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101137**

ID профиля: **253073**

Вариант 19

Чистовая

4. $\begin{cases} (a,b,c) = 3\cdot 7 \\ [a,b,c] = 3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$

Т.к. $[a,b,c]$ не содержит в качестве сомножителей других простых чисел, кроме 3 и 7, то ни в a, ни в b, ни в c также не присутствуют в разложении на множители другие простые, кроме 3 и 7, потому что в НОК берется макс. степень, с которой входит данное простое в разложение a или b или c, в данном случае для простых, не равных 3 или 7 макс. степень равна 0. Тогда представим a, b, c в виде:

$$\begin{cases} a = 3^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1} \\ b = 3^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2} \\ c = 3^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3} \end{cases}$$

Из опр. НОД и НОК:
$$\begin{cases} \min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 1 \\ \max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 17 \\ \min(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 1 \\ \max(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 15 \end{cases} (1) \Rightarrow$$

1) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 1 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \alpha_1 = 17 \\ \alpha_2 = 17 \\ \alpha_3 = 17 \end{array} \right. \end{cases}$

Выберем $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и найдем количество таких троек

1. В этой тройке есть одна 1 и одна 17: тогда оставшееся число лежит в пределе $[2;16]$

α_1	α_2	α_3
1	17	[2..16
17	1	[2..16
1	[2..16	17
17	[2..16	1
[2..16	1	17
[2..16	17	1

всего получается $15\cdot 6 = 90$ вариантов, т.к. чисел от 2 до 16 всего 15 и получаем кол-во по пр-лу произведения

2. в этой тройке две 1 и одна 17:

α_1	α_2	α_3
1	1	17
1	17	1
17	1	1

всего 3 вар.

3. в тройке две 17 и одна 1

α_1	α_2	α_3
17	17	1
17	1	17
1	17	17

всего 3 вар.

Итого, чтобы выбрать тройку $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, есть $90+3+3 =$
$= 96$ вариантов

2) Из системы (1) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 1 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} \beta_1 = 15 \\ \beta_2 = 15 \\ \beta_3 = 15 \end{array} \right. \end{cases}$. Аналогично теперь выберу тройку $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ и найду кол-во таких троек!

1

чистовик

① в этой тройке одна 1 и одна 15 $\Rightarrow$ оставшаяся степ. лежит в промежутке $[2; 14]$

β_1	β_2	β_3
1	15	[2…14
15	1	[2…14
1	[2…14	15
15	[2…14	1
[2…14	1	15
[2…14	15	1

всего $13 \cdot 6 = 78$ вариантов

(чисел от 2 до 14 13, получаю кол-во по пр-лу произведения)

② в этой тройке две 1 и одна 15

β_1	β_2	β_3
1	1	15
1	15	1
15	1	1

всего 3 вар.

③ в тройке одна 1 и две 15

β_1	β_2	β_3
1	15	15
15	1	15
15	15	1

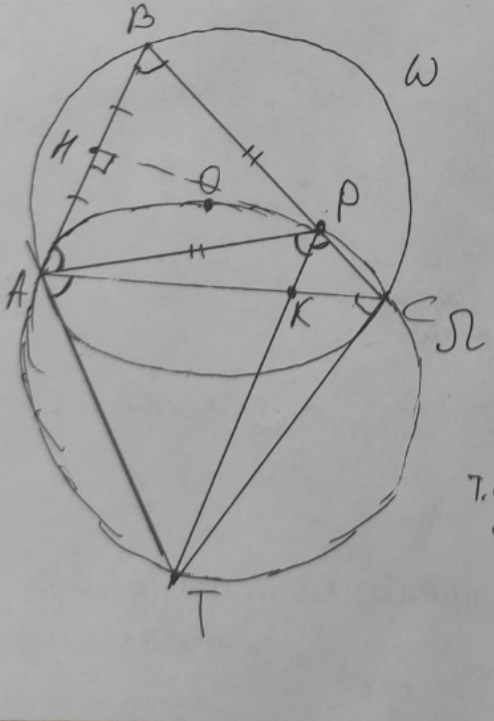
всего 3 вар.

Тогда кол-во способов выбрать тройку $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ равно: $78 + 3 + 3 = 84$

Окончательный ответ получаем по правилу произведения: $96 \cdot 84 = 8064$

Ответ: 8064.

$\boxed{6}$



а) 1) AT, TC − касательные к $\omega \Rightarrow \angle OAT = \angle OCT = \frac{\pi}{2}$, т.к. O − центр $\omega \Rightarrow A, O, C, T$ лежат на одной окр-ти, т.к. $\begin{cases} \angle OAT + \angle OCT = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \\ AC \text{ − лежат по разные стороны от } OT \end{cases}$

Через точки A, O, C можно провести одну и только одну окружность $\Rightarrow$ т.к. по условию P, A, O, C леж. на окр-ти, то и T тоже лежат на этой окр-ти, назову её Ω

12

Чистовик

2) Т.к. AT, TC – касательные, то по теореме об угле между касательной и хордой: $\begin{cases} \angle TAC = \angle ABC = \beta \\ \angle ACT = \angle ABC = \beta \end{cases}$

Т.к. $A, T, P, C \in \Omega$ и A, P лежат по одну сторону от TC, то $\angle TAC = \angle TPC = \beta$, тогда получается $\angle KPC = \angle ABC$, $\angle KPC$, $\angle ABC$ – соотв. при AB и PK $\Rightarrow AB \parallel PK \Rightarrow \angle APK = \angle BAP$, как НЛУ запомним это

$\begin{cases} T, A, P, C \in \Omega \\ C, P \text{ лежат по одну сторону от } TA \end{cases} \Rightarrow \cancel{\angle TAC =} \Rightarrow \angle APT = \angle ACT = \beta$

$\angle APK = \angle APT = \angle BAP = \beta$

3) $\begin{rcases} \angle KPC = \angle ABC = \beta \\ \angle C \text{ – общий для } \Delta PKC \text{ и } \Delta ABC \end{rcases} \Rightarrow \Delta PKC \sim \Delta ABC$ по 2м углам $\Rightarrow$

$k = \frac{AC}{KC}$ – коэф. подобия Δ-в

ΔAPC и ΔPKC имеют общую высоту $\Rightarrow \frac{S_{APC}}{S_{PKC}} = \frac{AC}{KC}$

$$\frac{S_{APC}}{S_{PKC}} = \frac{S_{APK} + S_{PKC}}{S_{PKC}} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} + 1 = \frac{10}{6} + 1 = \frac{8}{3} = \frac{AC}{KC} \quad (0)$$

$$\Delta PKC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = k^2 = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}.$$

$$S_{ABC} = k^2 S_{PKC} = \frac{64}{9} \cdot 6 = \frac{128}{3}. \quad (1)$$

б) 4) в п.2 мы получили, что $\angle BAP = \angle ABP = \beta \Rightarrow \Delta ABP$ – р/б с осн. AB; по теореме о площади Δ-ка:

$S_{APB} = \frac{1}{2} AB \cdot PH$ (PH – высота), $\Rightarrow BH = AH$, т.к. ΔABP – р/б)

$S_{APB} = BH \cdot PH$, $\frac{PH}{BH} = tg\beta = 2 \Rightarrow S_{APB} = 2BH^2$ (2)

$\Rightarrow PH = 2BH$ (3) ($arctg 2 = \beta \Rightarrow tg\beta = 2$)

Чистовик.

$S_{ABP} = S_{ABC} - S_{APK} - S_{PKC} \overset{\text{из (1)}}{=} \frac{128}{3} - 10 - 6 =$

$= \frac{80}{3}$

Подставлю в (2): $S_{ABP} = \frac{80}{3} = 2BH^2 \Rightarrow BH = \sqrt{\frac{40}{3}}$ (4)

5) По теореме Пифагора: $\sqrt{BH^2 + HP^2} = BP \overset{\text{из (3)}}{=} \sqrt{BH^2 + 4BH^2} =$
т.к. BH – высота
$= \sqrt{5}\,BH = \sqrt{\frac{200}{3}} = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$

т.к. $\triangle PKC \sim \triangle ABC$

из 10): $k = \frac{AC}{KC} = \frac{8}{3} = \frac{BC}{PC} \Rightarrow BC = \frac{8}{3}PC$, тогда $BP =$

$= BC - PC = \frac{5}{3}PC \Rightarrow PC = \frac{3}{3}BP$. ~~т.к.~~ $\frac{3}{5}\cdot 10\sqrt{\frac{2}{3}} =$

$= 6\sqrt{\frac{2}{3}}$

Тогда $BC = BP + PC = 10\sqrt{\frac{2}{3}} + 6\sqrt{\frac{2}{3}} = 16\sqrt{\frac{2}{3}}$.

$AB = 2HB \overset{\text{из (4)}}{=} 2\sqrt{\frac{40}{3}} = 4\sqrt{\frac{10}{3}}$

6) ~~По теореме к~~ Из основного тригоном. тождества:

$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1 \Rightarrow 1 + tg^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} \Rightarrow \cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}$

т.к. по условию $\triangle ABC$ – остроуг., то $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. ($arctg\,2 = \beta \Rightarrow tg\beta = 2$)

По теореме кос-в для $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\beta}$

$= \sqrt{\frac{160}{3} + \frac{512}{3} - 2\cdot 4\sqrt{\frac{10}{3}}\cdot 16\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{672}{3} - \frac{2\cdot 4\cdot 16\cdot 2}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{672-256}{3}} = \sqrt{\frac{416}{3}} = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$

Ответ: а) $S_{ABC} = \frac{128}{3}$; б) $AC = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$.

Черновик

$(a,b,c) = 21 = 3\cdot 7$ кол-во (a,b,c) – ?

$[a,b,c] = 3^{17}\cdot 7^{15}$

$(a,b,c)\cdot [a,b,c] = a\cdot b\cdot c$

$abc = 3\cdot 7\cdot 3^{17}\cdot 7^{15}$

$abc = 3^{18}\cdot 7^{16}$

$$\begin{cases} a = 3^{\alpha_1}\cdot 7^{\beta_1} \\ b = 3^{\alpha_2}\cdot 7^{\beta_2} \\ c = 3^{\alpha_3}\cdot 7^{\beta_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 1 \\ \max(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 17 \\ \min(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 1 \\ \max(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = 15 \end{cases}$$

выберем α!

~~хот~~ ≥ 1 из α равно 1

!1: !17:

$\alpha_1 = 1$	2·1	$\alpha_1 = 1$	2·17	$\alpha_1 = 17$
$\alpha_2 = 17$	1·17	$\alpha_2 = 1$	1·1	$\alpha_2 = 17$
$\alpha_3 = [2; 16]$		$\alpha_3 = 17$		$\alpha_3 = 1$
15·6 = 90		3		3

96

всего: 180

для β: $3+3+13\cdot 6 = 84 = 21\cdot 4$

$96 = 4\cdot 24 = 32\cdot 3$

$= 2^2\cdot 2^5\cdot 3\cdot 3\cdot 7 =$

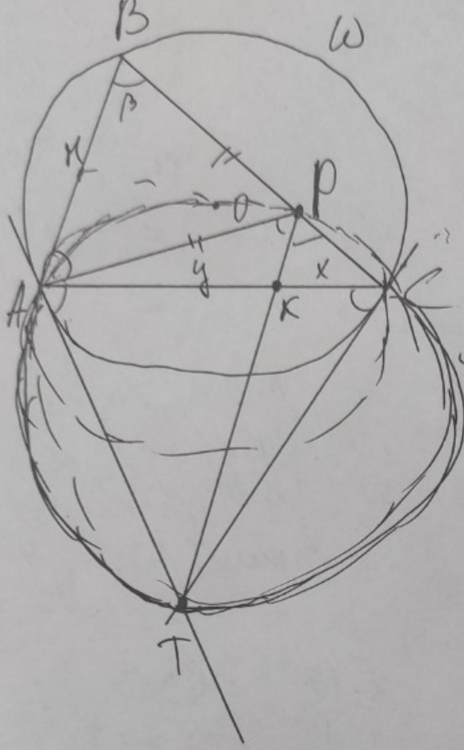
$= 128\cdot 9\cdot 7$

$8400 - 336 = 8064$

Черновик

остроуг. $S_{APK} = 10$ AT, TC – кас.

$S_{CPK} = 6$



а) S_{ABC} – ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$

AC – ?

$P, A, O, C, T \in \Omega$

$\triangle PKC \sim \triangle ABC$

$\frac{x}{y} = \frac{S_{CPK}}{S_{AKP}} = 0{,}6 \Rightarrow$

$y = \frac{5}{3}x \Rightarrow \frac{x}{x+y} =$

$= \frac{x}{x+\frac{5}{3}x} = \frac{3}{8} \Rightarrow S_{ABC} = k^2 \cdot S_{PKC} = \frac{9}{64} \cdot 6 =$

$= \cancel{\frac{54}{6}}\ \frac{27}{32}$

$\frac{64}{9} \cdot 6 =$

$= \frac{128}{3}$

б) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$tg^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{tg^2 x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$S_{ABP} = S_{ABC} - S_{APK} - S_{PKC} = \frac{128}{3} - 10 - 6 =$

$= \frac{128-48}{3} = \frac{80}{3}$

$S_{ABP} = \frac{1}{2} PH \cdot HB = 2HB^2 \Rightarrow HB = \sqrt{\frac{S_{ABP}}{2}} = \sqrt{\frac{40}{3}}$

$\frac{PH}{HB} = tg\beta = 2$

$PH = 2\sqrt{\frac{40}{3}}$

$PB = \sqrt{PH^2 + HB^2} = \sqrt{5}\,HB = \sqrt{\frac{200}{3}} =$

$= 10\sqrt{\frac{2}{3}}$

черновик

$PC = \frac{3}{5} PB = 6\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow BC = 16\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\begin{array}{r} 672 \\ -\,256 \\ \hline 416 \end{array}$$

$AB = 2BH = PH = 2\sqrt{\frac{40}{3}} = 4\sqrt{\frac{10}{3}}$

$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta} = \sqrt{\frac{160}{3} + \frac{512}{3} -}$

$\overline{- 2 \cdot 4\sqrt{\frac{10}{3}} \cdot 16\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{672}{3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 16}{3}} =$

$= \sqrt{\frac{672-256}{3}} = \sqrt{\frac{416}{3}} = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$