Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101049**

ID профиля: **863230**

Вариант 19

Математика 11 кл.

Чистовик.

№1.

Пусть d – разность арифм. прогрессии, тогда

$S = a_1 + (a_1+d) + \ldots + (a_1+13d) = 14a_1 + (1+2+\ldots+13)d =$

$= 14a_1 + \frac{1+13}{2}\cdot 13d = 14a_1 + 91d$

сумм. арифм. прогр.

$a_9 a_{17} = (a_1+8d)(a_1+16d) = a_1^2+24a_1d+128d^2 > S+12.$

$a_{11}a_{15} = (a_1+10d)(a_1+14d) = a_1^2+24a_1d+140d^2 < S+47$

$a_1^2+24a_1d+128d^2 > S+12.$

$< a_1^2+24a_1d+140d^2$

Сложим неравенства:

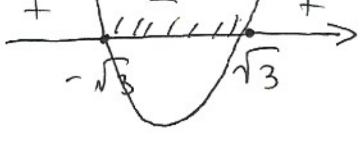
$a_1^2+24a_1d+128d^2+S+47 > S+12+a_1^2+24a_1d+140d^2$

$128d^2+47 > 12+140d^2$

$35 > 12d^2$

$d^2 < \frac{35}{12} < 3$

$d = a_2 - a_1$, члены a_1, a_2 этой прогрессии целые, поэтому d целое, при этом $(d-\sqrt{3})(d+\sqrt{3})<0$



$d \in (-\sqrt{3};\sqrt{3}) \Rightarrow d \in (-2;2)$. d - целое. $\Rightarrow$

$\Rightarrow d=1,\ d=0,\ d=-1.$

По условию, прогрессия возр. $\Rightarrow d>0 \Rightarrow d=1.$

Осталось решить систему.

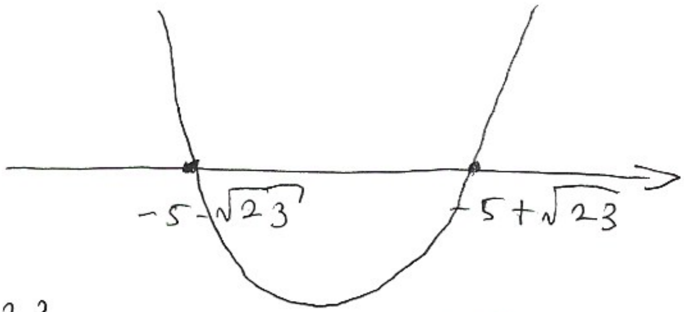
№1 (продолжение)

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 128 > S+12 = 14a_1 + 91 + 12 = 14a_1 + 103. \\ a_1^2 + 24a_1 + 140 < S+47 = 14a_1 + 91 + 47 = 14a_1 + 138 \end{cases}$$

$\cancel{a_1^2+128}$ $\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 & (a_1+5)^2 > 0,\ a_1 \neq -5, \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 & \longrightarrow D = 100 - 4\cdot 1\cdot 2 = 92 \end{cases}$

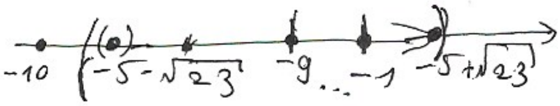
$a_1 = \dfrac{-10 \pm \sqrt{32}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$

$a_1 \in (-5-\sqrt{23},\ -5+\sqrt{23})$ – корни квадр уравнения.



$4 < \sqrt{23} < 5$, т.к. $4^2 = 16 < 23$
$5^2 = 25 > 23$. $\Rightarrow -10 < -5-\sqrt{23} < -9$,
$-1 < -5+\sqrt{23} < 0$

Т.е. $a_1 \in \{-9; -8; -7; \dots -1\}$ т.к. a – целое.



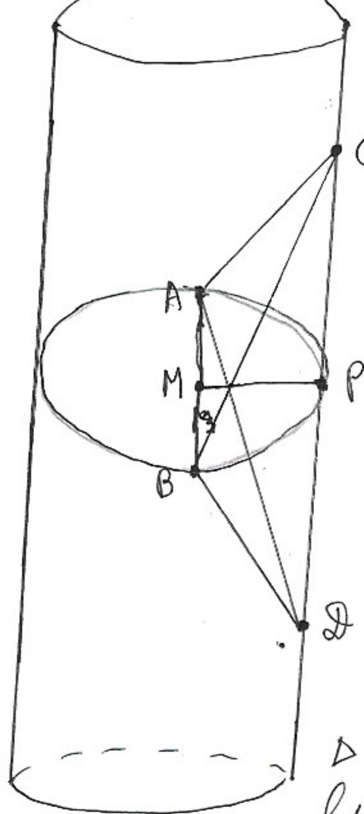
С учетом первого неравенства

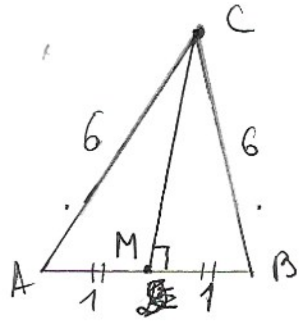
$a_1 \neq -5$

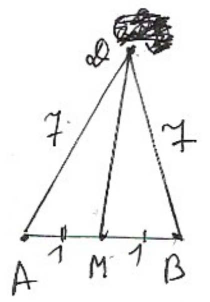
Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Чистовик   Математика, 11 кл.

№2.







Пусть M – середина AB, тогда $AM = MB = 1$. $\triangle ABC$ – р/б. $\Rightarrow$ медиана CM в нем является высотой. $\Rightarrow$

По теор. Пифаг.: $CM = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$

Аналогично, $DM \perp AM$ и $DM = \sqrt{48}$ $AB \perp CM$.

$AB \perp MD$, CM и MD не совпадают, т.к. иначе A, B, C, D лежали бы в плоскости пересечения прямых AB и CM, и ABCD не был бы тетраэдром.

Поэтому $AB \perp (CMD)$, где (CMD) – плоскость, содержащая точки C, M, D;

Пусть P – основание перпендикуляра из M на CD,

тогда $CD \perp AB$. и $CD \perp MP \Rightarrow$

$CD \perp (APB)$ (P не лежит на прямой AB, т.к. иначе A, B, C, D лежали бы в плоскости пересекающихся прямых AB и CD)

№2 (продолжение)

Откуда $AB \perp CD$ и $BP \perp CD$, т.к. AP и BP лежат в (ABP). $CD \perp (ABP) \Rightarrow (ABP)$ перпендикулярна основанию цилиндра. $\Rightarrow$ сечение цилиндра плоскостью (APB) – окружность с радиусом, равным радиусу цилиндра, где AB – хорда этой окружности, поэтому её диаметр не меньше AB, т.е. 2.

Радиус – половина диаметра, т.е. он не меньше 1. (единицы)

Радиус в 1 достижим, что будет видно на примере.

При радиусе 1 AB – диаметр сечения

M – центр окружности. $\Rightarrow$

$\Rightarrow MP = 1$, по теореме Пифагора $PC = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$.

$PD = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$.

В зависимости от того, P лежит на отрезке CD или вне его, $CD = \sqrt{34} + \sqrt{47}$ или

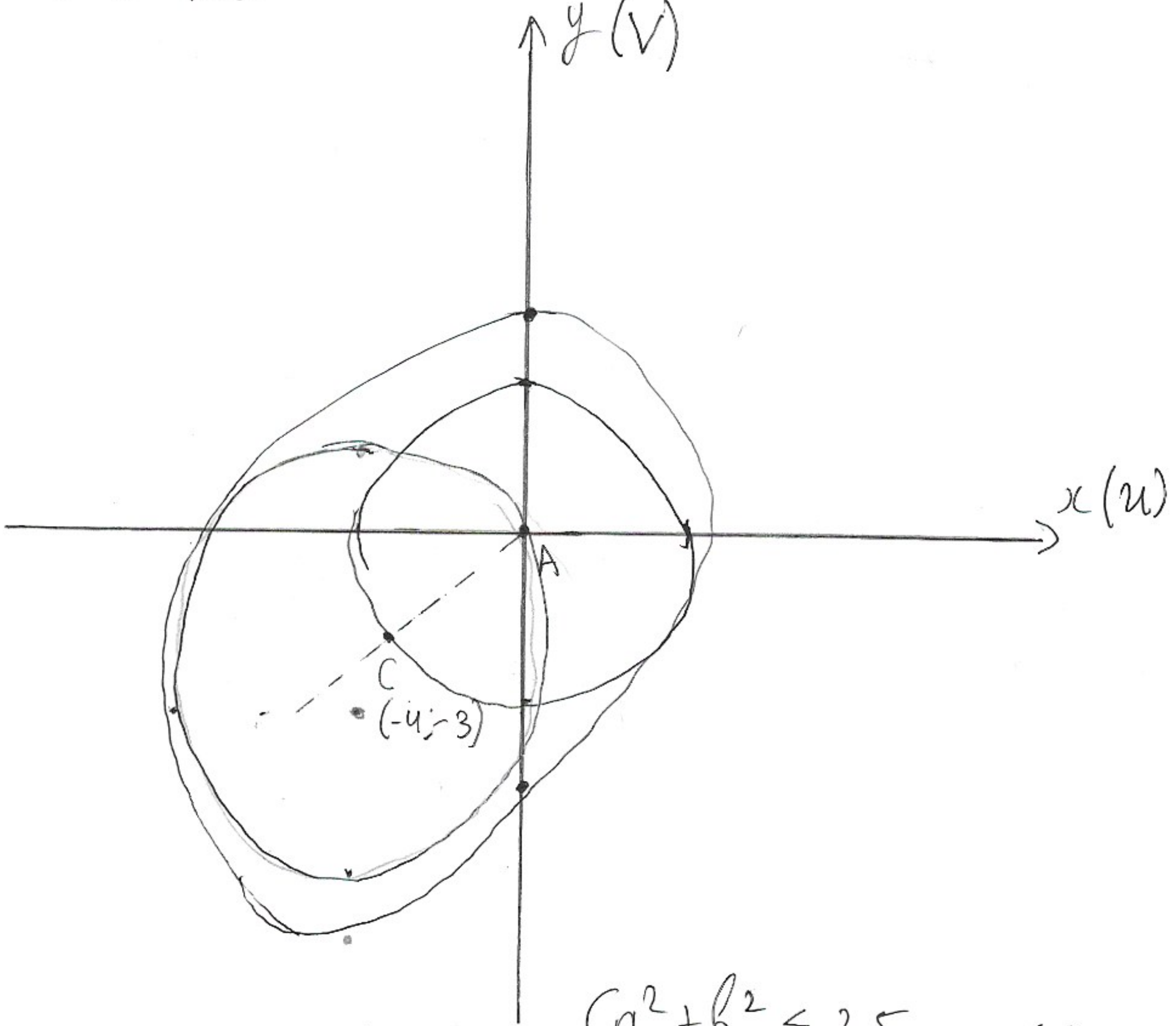
$CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$.

Осталось привести пример, что эти ситуации возм. Введу прямоуг. систему координат, в ней цилиндр с боковой поверхностью $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ -10 \leq +7 \leq 10 \end{cases}$.

$A(1,0,0)$, $B(-1;0;0)$, C

№3. чистовик

Математика, 11 кл.



$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 25. \\ a^2+b^2 \le -8a-6b \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \end{cases}$

Т.е. (a,b) лежит в пересечении кругов $u^2+v^2 \le 25$ и $(u+4)^2+(v+3)^2 \le 25$.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$, т.е. (x,y) удалены от (a,b) не более, чем на 5.

Искомая фигура объединение четырех секторов с центром A и радиусом 10, с центром B и радиусом 5, с центром C и радиусом 10, с центром D и радиусом 5.

√3 (продолжение)

Потому что такие точки удовлетворяют $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$. Точки в секторе с центром С за дугой BAD – т.к. есть точки на отрезке, соединяющем (x, y) и С на расстоянии 5 от x, y и лежащие в N, где N – пересечение $u^2+v^2 \le 25$ и $(u+4)^2+(v+3)^2 \le 25$. – возможные положения a, b.

Точки в секторе с центром В, т.к. есть точки на продолжении xB за В на расстоянии 5 от ~~xB~~ ~~хВ. в~~ Х и в N., где $X=(x, y)$ для секторов с центром А и D аналогично.

Х удалено от Х на $0 \le 5$.

N т.е. на расстояние >5.

$\angle DAB = 120°$. $\angle ABC = 60°$. $\angle BCD = 120°$, $\angle CDA = 60°$.

т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ – равносторонние, все стороны по 5.

Сектора с центром А и С имеют площадь

$$\pi \cdot 0^2 \cdot \frac{120}{60°} = \pi \cdot \frac{100}{3}$$

Сектора с центром В и D $\pi \cdot 5^2 \cdot \frac{60°}{360°} = \pi \cdot \frac{25}{6}$ т.к.

Сектора с центром В и D тоже равны 60°. вертикальные к углу ABC и $\angle ADC$ тоже равны 60°.

$$S_{ABCD} = 2 S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = \frac{5\overset{2}{2}\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cdot \pi \cdot \frac{100}{3} + 2 \cdot \pi \cdot \frac{25}{6} - \frac{52\sqrt{3}}{2} = \pi\left(\frac{200}{3}+\frac{25}{3}\right) - \frac{25\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \pi \cdot 75 - \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $75\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2}$

черновик.

$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{12}+a_{13}+a_{14}=S$ 1.

$$\begin{cases} a_9\cdot a_{17}>S+12 \\ a_{11}\cdot a_{15}<S+47 \end{cases}$$

$a_9=a_8+d=a_7+2d=a_6+3d=a_5+4d=a_4+5d=a_3+6d=a_2+7d=$
$=a_1+8d.$

$a_{17}=a_1+16d.$

$(a_1+8d)(a_1+16d)>S+12$.

$\frac{13(14)}{2}=13\cdot 7=$
$=91.$

$(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)\ldots+\underbrace{(a_{13}+d)}_{a_1+13d}=S$.

$S=a_1(d+2d+3d+4d+5d+6d+7d+\ldots+13d)\Rightarrow$

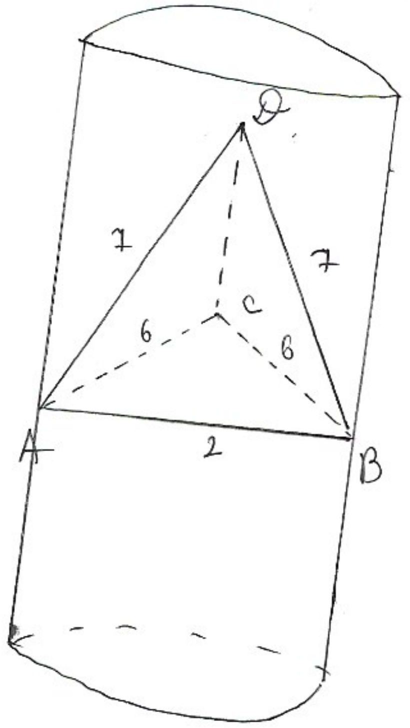
$\Rightarrow S=a_1\cdot(91d).$

$(a_1+8d)\cdot(a_1+16d)>a_1\cdot 91d,$

Математика, 11 кл.

~~Чистовик~~. Черновик.

№2.



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101049**

ID профиля: **863230**

Вариант 19

№4. Математика 11.

чистовик.

НОД$(a, b, c) = 21 = 3^1 \cdot 7^1$

НОК$(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$.

$3^{17} \cdot 7^{15} = a, b, c, \Rightarrow a, b, c$ имеют вид

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$; $b = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$. $c = 3^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$.

НОД$(a, b, c) = 3^1 \cdot 7^1$ и НОК$(a, b, c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow \min\limits_{i=1,2,3} \alpha_i = 1$ $\qquad \min\limits_{i=1,2,3} \beta_i = 1$

$\max\limits_{i=1,2,3} \alpha_i = 17$ $\qquad \max\limits_{i=1,2,3} \beta_i = 15$.

Достаточно найти количество возможных троек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, а затем перемножить результат, т.к. тройке (a, b, c) соответствует пара троек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и наоборот.

Одно из $\alpha_i = 1$, одно $= 17$, а третье может быть от 1 до 17.

Поэтому вариантов, где фиксированные $\alpha_i = 1$ и $\alpha_i = 17$, 17.

Способов выбрать (i, j) шесть – это $(1,2)$ $(1,3)$ $(2,1)$ $(2,3)$ $(3,1)$ $(3,2)$.

$17 \cdot 6 = 102$.

Тройки $(1,1,17)$, $(1,17,1)$, $(17,1,1)$ посчитаны по 2 раза.

√4 (продолж.)

Например, для $(1, 1, 17)$ при $i = 1$, $j = 3$, или $i = 2$, $j = 3$.

Так же $(17, 17, 1)$, $(17, 1, 17)$, $(1, 17, 17)$ посчитаны дважды. Поэтому из 102 нужно вычесть 6, т.е. вариантов троек $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $102 - 6 = 96$.

Аналогично для $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ $15 \cdot 6 - 6 = 84$ вариантов

А для (a, b, c) $96 \cdot 84 = 8064$ вариантов.

Ответ: 8064.

№5 Чистовик Математика 11 кл.

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

Чтобы логарифмы сущ. надо, чтобы $\frac{x}{2}-1>0$,

$x-\frac{11}{4}>0$

$x-\frac{11}{4}\neq 1$, $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$, $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1$.

Обозначим $a=\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$b=\ln\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$ Тогда числа равные

$c=\ln\left(x-\frac{11}{4}\right)$

$\frac{b}{2a}$; $\frac{2a}{\left(\frac{c}{2}\right)}=\frac{2a}{c}$ и $\frac{2c}{b}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, т.к.

Произведение $\frac{b}{2a}\cdot\frac{2a}{c}\cdot\frac{2c}{b}=2$. Пусть 2 из этих чисел равны x, а третье $(x+1)$. Тогда:

$x^2+2x+2=(x+1)^2+1=0$, но $(x+1)^2+1\geq 0.\ 1+0=1>0\Rightarrow$

$\Rightarrow$ остается $x=1$.

Случаи: $\frac{b}{2a}=\frac{2a}{c}=1$ и $\frac{2c}{b}=2$. $\Rightarrow b=2a$. $b=2c$. $\Rightarrow 2a=2c$.

$a=c\Rightarrow\frac{2a}{c}=2$ и $\frac{2a}{c}=\frac{2c}{b}=1$. и $\frac{b}{2a}=2.\Rightarrow$

$\Rightarrow 2a=c.;\ b=2c.\Rightarrow b=2c=4a\Rightarrow\frac{b}{2a}=2$

2 последних случая возможны $\Rightarrow a=c$. и $b=2a$.

или $b=2c=4a$.

№5 (продолжение).

$a = c \Rightarrow \frac{x}{2} - 1 = e^{a} = e^{c} = x - \frac{11}{4} \Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{x}{2}; \ x = \frac{7}{2}.$

Проверим $b = 2a$: $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} = e^{b} = e^{2a} = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2;$

$\left(\frac{\frac{7}{2}}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$

$\left(\frac{\left(\frac{7}{2}\right)}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \neq \frac{3}{2} \Rightarrow$ неверно.

Остается случай $b = 2c = 4a \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = e^{b} = e^{2c} =$

$= \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = x^2 - \frac{11}{2} \cdot x + \frac{121}{4}$

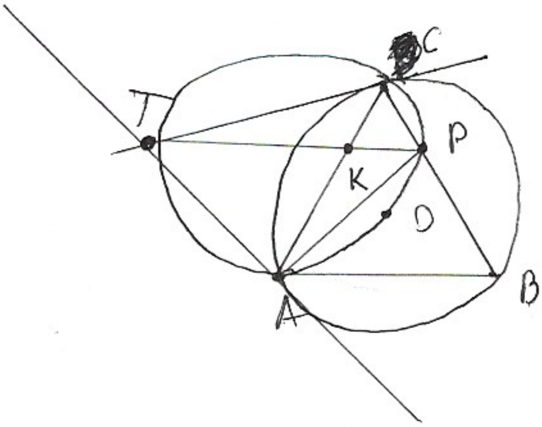
$x^2 - 6x + 30 = 0$

$D = 6^2 - 4 \cdot 30 = 6^2 - 120 = -84 < 0 \Rightarrow$ нет корней.

Поэтому искомых x нет.

Ответ: ~~нет~~ ни при каких действительных x.

№ III.6 чистовик. математика, 11 кл.



Решение:

а) ① $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle PKC}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

$\angle AOT = \angle OCT = 90°$ т.к. AT и CT – касательные $\Rightarrow \angle OAT + \angle OCT = 180$

O, A, T, C лежат на одной окружности $\Rightarrow$

O, A, T, C, P тоже лежат на одной окружности.

$\angle ABC = \angle TAC$ по теор. об угле между касатель-ной AT и хордой AC,

$\angle TAC = \angle TPC$ как вписанные, опирающиеся на дугу TC. Т.е. $\angle ABC = \angle KPC \Rightarrow TP \parallel AB$, т.к. равны соответственные углы $\angle KPC$ и $\angle ABC$. $\Rightarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по двум углам ($\angle ABC = \angle KPC$, $\angle ACB$ – общий),

$S_{\triangle ABC} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 S_{\triangle KPC} = \left(1 + \frac{5}{3}\right)^2 \cdot 6 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 6 = \frac{64}{9} \cdot 6 = \frac{128}{3}$.

б) на обороте.

№6 (продолжение)

б) $AT = CT$ как отрезки касат $\Rightarrow \angle ACT = \angle ATC$ т.к. $\triangle ATC$ – р/б. $\angle APT = \angle ACT$ т.к. они опираются на дугу $AT \Rightarrow \angle APC = \angle KPC = 2\angle ABC = 2\,\mathrm{arctg}\,2$.

Пусть $\angle ABC = \alpha = \mathrm{arctg}\,2 \Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$$= 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{1}{\frac{1}{\cos\alpha}} = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\frac{1}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

$$= \frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{3}$$ т.к. PK – биссектр. в $\triangle APC$.

$$S_{\triangle APC} = 10+6 = 16 = \frac{1}{2}AP\cdot PC - \sin\angle APC =$$

$$= \frac{1}{2}PC\cdot\frac{5}{3}PC\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{3}PC^2$$

$$PC^2 = \frac{3}{2}\cdot 16 = 24, \quad PC = 2\sqrt{6}$$

$$AP = \frac{5}{3}PC = \frac{10}{3}\cdot 2\sqrt{6}, \quad AC = \sqrt{AP^2 + PC^2 - 2AP\cdot PC\cdot\cos\angle APC}$$

по теор. косинусов.

$$AC = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\sqrt{6}\right)^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2 - 2\cdot\frac{10}{3}\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\left(-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{200}{3} + 84 + 80\cdot\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{2080}{15}} = 2\sqrt{\frac{520}{15}} = 4\sqrt{\frac{130}{15}} = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$$

Ответ: $4\sqrt{\frac{26}{3}}$

черновик.

$a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{12}+a_{13}+a_{14}=S$ 1

$\begin{cases} a_9\cdot a_{17}>S+12. \\ a_{11}\cdot a_{15}<S+47 \end{cases}$

$a_9=a_8+d=a_7+2d=a_6+3d=a_5+4d=a_4+5d=a_3+6d=a_2+7d=$
$=a_1+8d.$

$a_{17}=a_1+16d.$

$\frac{13(14)}{2}=13\cdot 7=$
$=91.$

$(a_1+8d)(a_1+16d)>S+12.$

$(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)\ldots+\underbrace{(a_{13}+d)}_{a_1+13d}=S.$

$S=a_1(d+2d+3d+4d+5d+6d+7d+\ldots+13d)\Rightarrow$

$\Rightarrow S=a_1\cdot(91d).$

$(a_1+8d)\cdot(a_1+16d)>a_1\cdot 91d,$

№2 (продолжение)

Откуда $AB \perp CD$ и $BP \perp CD$, т.к. AP и BP лежат в (ABP). $CD \perp (ABP) \Rightarrow (ABP)$ перпендикулярна основанию цилиндра. $\Rightarrow$ сечение цилиндра плоскостью (APB) – окружность с радиусом, равным радиусу цилиндра, где AB – хорда этой окружности, поэтому её диаметр не меньше AB, т.е. 2.

Радиус – половина диаметра, т.е. он не меньше 1. (единицы)

Радиус в 1 достижим, что будет видно на пример.

При радиусе 1 AB – диаметр сечения

M – центр окружности. $\Rightarrow$

$\Rightarrow MP = 1$, по теореме Пифагора $PC = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$.

$PD = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$.

В зависимости от того, P лежит на отрезке CD или вне его, $CD = \sqrt{34} + \sqrt{47}$ или

$CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$.

Осталось привести пример, что эти ситуации возм. введу прямоуг. систему координат, в ней цилиндр. с боковой поверхностью $\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ -10 \le +7 \le 10 \end{cases}$

$A(1,0,0)$, $B(-1;0;0)$, ~~C(0,0,1)~~ $C(0,1,\sqrt{34})$, $D(0;1;-\sqrt{47})$, тогда $CD = \sqrt{34} + \sqrt{47}$

При тех же A, B, C, но $D(0,1,\sqrt{47})$ $CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}$, причем в обоих случаях радиус цилиндра 1.

Ответ: $\sqrt{17} + \sqrt{34}$ или $\sqrt{17} - \sqrt{34}$.