Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100979**

ID профиля: **811260**

Вариант 19

Чистовик Математика, 11кл

№1

$$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S + 12 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 47 \end{cases}$$

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = (2a_1 + 13d) \cdot 7 = 14a_1 + 91d$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > S + 12 \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < S + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

вычтем из второго первое: $12d^2 < 35 \Rightarrow$ $\Rightarrow d = 1$, т. к. по условию $d > 0$ и $d \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 1$

$a_1 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

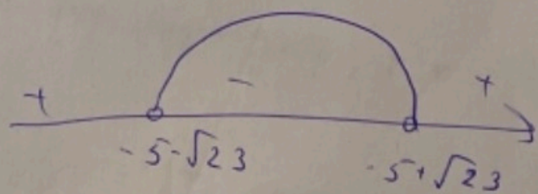
$\cancel{\begin{cases} a \neq -5 \\ a \in R \end{cases}}$ $a \neq -5$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 92$

$$a_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$$



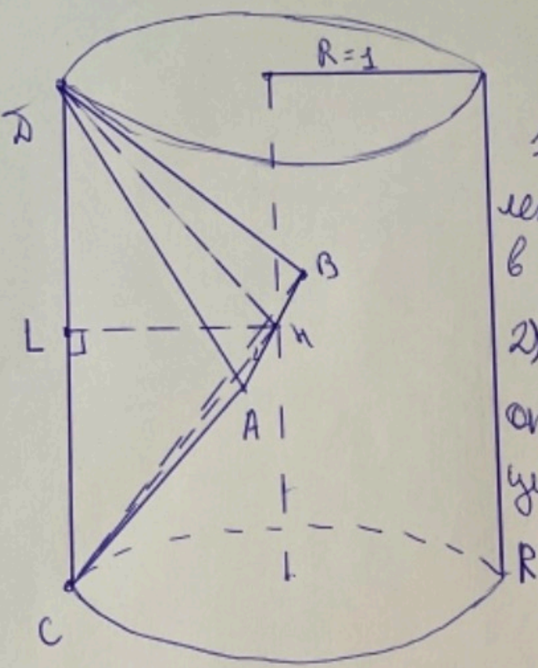
$a_1 \in Z \Rightarrow a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

1

Чистовик Математика, 11 кл

№2



Решение:

1) $CD \parallel$ оси цилиндра; все вершины лежат на бок. стороне, то CD лежит в боковой плоскости $\perp$ основанию

2) Т.к. по условию все вершины опираются на боковую сторону и радиус цилиндра при этом минимальный, тогда $R = \frac{1}{2} AB = 1$

3) В р-б. Δ-ке ADB и ΔCAB опустим 2 высоты DH и CH;
по Т. пифагора: $DH = \sqrt{DA^2 - AH^2} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$;
по Т. пифагора: $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$;

4) Из точки H опустим на CD перпендикуляр; т.к. $CD \perp$ основанию, то $LH \parallel$ основанию $\Rightarrow LH = R = 1$

5) по т. пифагора в ΔDHL; $DL = \sqrt{DH^2 - LH^2} = \sqrt{47}$; $LC = \sqrt{CH^2 - LH^2} = \sqrt{34} \Rightarrow$
$\Rightarrow DC = DL + LC = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{34}$

2

21100979 (U811260 M1304616)

Черновик

$a_9 = a_1 + 8d$ $\qquad$ $a_{17} = a_1 + 16d$

$$\begin{cases} (a_1 + 8d)\cdot(a_1 + 16d) > S + 12 \\ (a_1 + 10d)\cdot(a_1 + 14d) < S + 47 \end{cases}$$

$$a_1^2 + 16da_1 + 8da_1 + 128d^2 > S + 12$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > S + 12 \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < S + 47 \end{cases}$$

$$S_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2}\cdot 14 = (a_1 + a_{14})\cdot 7 =$$

$$= (a_1 + a_1 + 13d)\cdot 7 = (2a_1 + 13d)\cdot 7$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$$12d^2 < 35$$

$d = 0 \qquad d = 1$

$d = 0$

$a_1^2 > 14a_1 + 12$

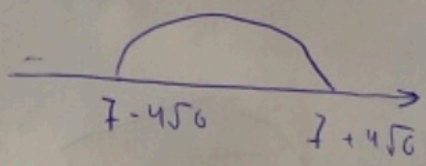
$a_1^2 - 14a_1 - 12 > 0$

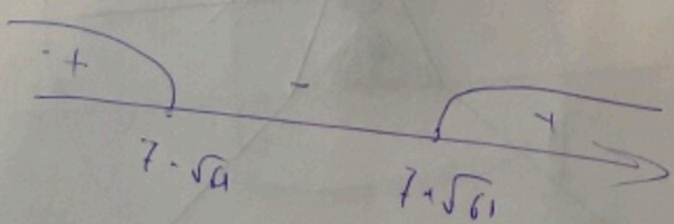
$D = 196 + 48 = 244$

$$a_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{244}}{2} = 7 \pm \sqrt{61}$$

$d = 0$

$a_1^2 < 14a_1 + 47$





$d = 0$

$$a_1 \in (7 - 4\sqrt{6};\ 7 - \sqrt{61}) \cup (7 + \sqrt{61};\ 7 + 4\sqrt{6})$$

$-2; -1$

$d > 0$

15; 16; , но т.к. $d>0$ по условию, то это не подходи.

21100979 (U811260 M1304616)

$d = 1$

Черновик

$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$D = 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

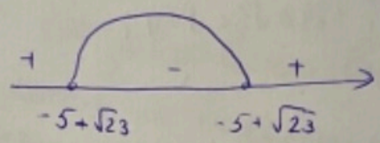
$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in R \end{cases}$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 92$

$a_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$



$-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

21100979 (U811260 M1304616)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100979**

ID профиля: **811260**

Вариант 19

№4

Чистовик

1) $\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$ Числа a, b, c имеют вид: $3^x\cdot 7^y$, где $x\in[1;17]$; $y\in[1;15]$

2) Рассмотрим расположение троек между a, b, c;
3^1; 3^{17}; 3^1; Вариантов расположение $3!=6$;
В одном варианте кол-во комбинаций для $x\in[2;16]=15$; Если $x=1$ или $x=17$, то такие комбинации встр. несколько раз $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Рассмотрим их отдельно: $x\in[2;16]$: $15\cdot 6=90$ вар.
$x=1$: 3 варианта
$x=17$: 3 варианта $\Rightarrow$ всего 96 вариантов

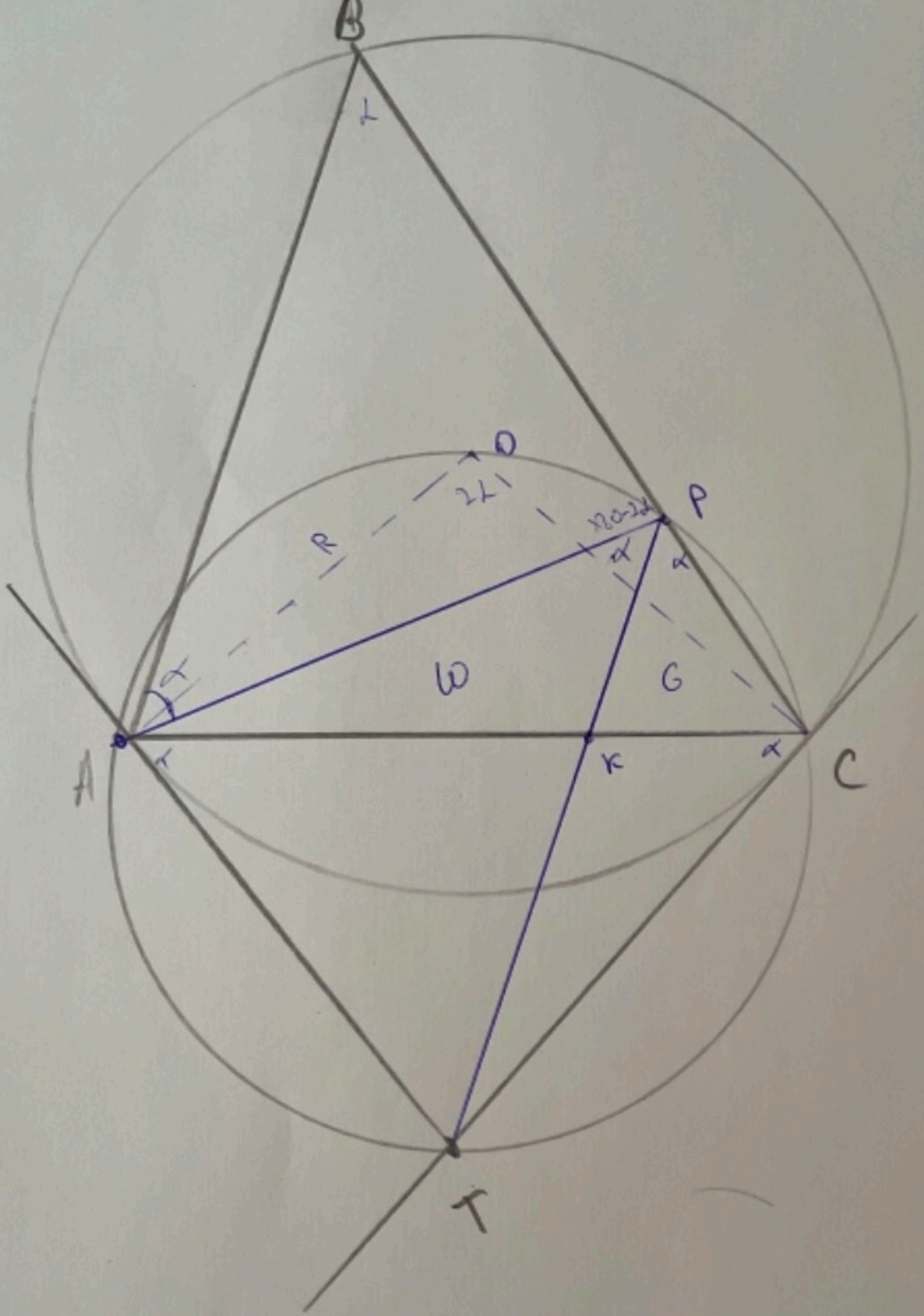
3) Для 7 аналогично: $3!=6$;
$y\in[2;14]\Rightarrow 6\cdot 13=76$; $76+6=84$

4) Всего вариантов: $84\cdot 96=8064$

Ответ: 8064

1

№6 Чистовик



2

21100979 (U811260 M1304617)

№6

а) Решение: Чистовик

1) Т.к. $AT = TC$ (2 кас. из одной точки), то $\triangle ATC$ – р-б $\Rightarrow$ пусть $\angle TAC = \angle ACT = \alpha$; т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, то $\angle AOC + \angle ATC = 180^\circ \Rightarrow$ точки $AOPCT$ лежат на одной окружности, тогда $\angle AOC = 2\alpha$; $\angle ATC = 180^\circ - 2\alpha$

2) $\angle BPA = \angle ATC = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle APT = \angle ACT = \alpha$ (опираются на одну дугу) $\Rightarrow \angle TPC = \alpha$; тогда $\frac{AP}{PC} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle PKC}} = \frac{10}{6} \Rightarrow AP = \frac{5}{3}PC$;

$PC = x \Rightarrow AP = \frac{5}{3}x$, $\angle ABC = \alpha$ ($\angle AOC = 2\alpha$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BAP \sim \triangle ACT$ (по 2 углам) $\Rightarrow BP = AP$;

3) $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{5}{3} \to AK = \frac{5}{3}KC$; $\frac{AC}{KC} = \frac{8}{3}$

$S_{\triangle ABP} = \frac{5}{3}x \cdot \frac{5}{3}x \cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) \cdot \frac{1}{2}$

$S_{\triangle APC} = \frac{5}{3}x \cdot x \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{2} = 16 \Rightarrow S_{ABP} = \frac{5}{3} \cdot S_{APC} = \frac{5}{3} \cdot 16 = \frac{80}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{80}{3} + 16 = \frac{128}{3}$

Ответ: $\frac{128}{3}$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2 = \alpha$; по т. синусов: $AC = 2R \cdot \sin\alpha$;

$\frac{AT}{AO} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{1} \Rightarrow AT = 2AO = 2R$;

$\angle ACP = 90 - \alpha$; $\angle CPK = \alpha \to \angle PKC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow PK$ – высота; т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{1} = \frac{KC}{KP} \Rightarrow KP = \frac{1}{2}KC = x$

$S_{KPC} = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot KC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x = x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6} = KP \Rightarrow AC = \frac{8}{3} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{16\sqrt{6}}{3}$

$\frac{1}{2}KC = \sqrt{6}$, $KC = 2\sqrt{6}$

Ответ: $\frac{16\sqrt{6}}{3}$

3