Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100865**

ID профиля: **361630**

Вариант 19

Черновик Вар. 1 (3)

①. $a_3 \cdot a_{17} = a_3(a_{15}+2d) = a_3 \cdot a_{15} + 2d \cdot a_3 \overset{?}{>} S+12$, где d – разность прогр.

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_3+2d) a_{15} = a_3 \cdot a_{15} + 2d \cdot a_{15} < S+47$

$S+47-(S+12) > a_3 \cdot a_{15} + 2d \cdot a_{15} - (a_3 \cdot a_{15} + 2d \cdot a_3) = 2d(\overset{a_1+14d}{a_{15}} - \overset{a_1+8d}{a_3}) = 12d^2$.

$35 > 12d^2$, т.к. члены прогр. – целые числа, то и d-целое число.

Если $d \geq 2$ то $12d^2 \geq 48 \not< 35$. Значит, $d = 1$ (т.к прогр. возрастающая)

$a_{11} \cdot a_{15} = (a_1+10)(a_1+14) = a_1^2 + 24a_1 + 140 < (2a_1+13)7+47$,

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$, $a_1^2 + 2a_1 \cdot 5 + 25 - 23 = (a_1^2+5)^2 - 23 < 0 \Leftrightarrow$ $\cancel{a_1 \in [-9; -1]}$ $a_1 \in \{-9; -8; \ldots; -1\}$

$a_3 \cdot a_{17} = (a_1+8)(a_1+16) = a_1^2 + 24a_1 + 128 > (2a_1+13)7+12$, $a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$, $(a_1+5)^2 > 0$,

$\Leftrightarrow a_1 \neq -5$. Итак, $\cancel{a_1 \in [-9; -5) \cup -5}$ $a_1 \in \{-9; -8; \ldots; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

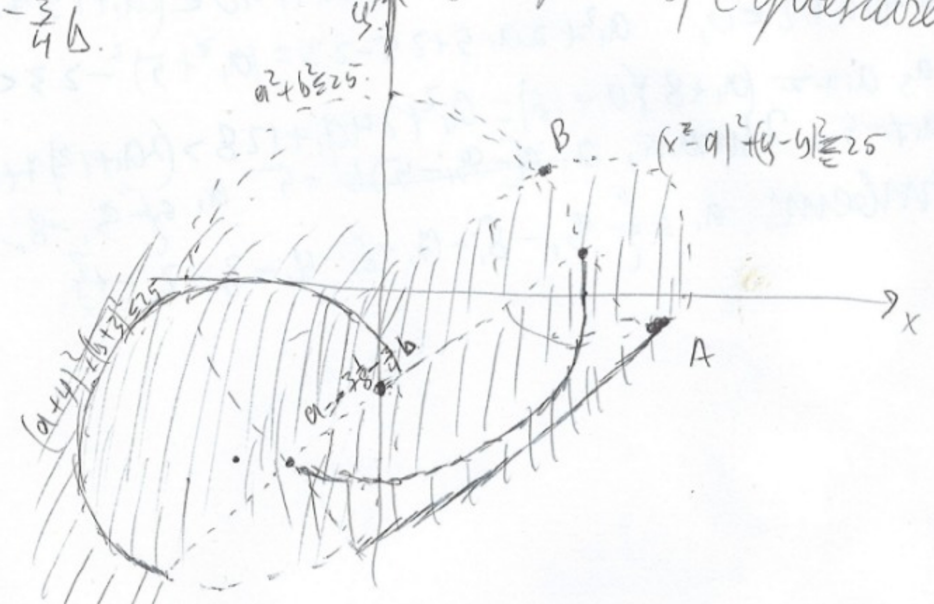
21100865 (U361630 M1302934)

Чистовик. Вар. 19

(3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25, \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)\end{cases}$ Первое ур-е — ур-е круга с центром $(a;b)$ и радиусом 5

Пусть $-8a-6b \geq 25$, тогда $a^2+b^2 \le 25$. В совокупности это ур-е круга с центром $(0;0)$, радиусом 5, ограниченного прямой $a \le -3\frac{1}{8} - \frac{3}{4}b$.

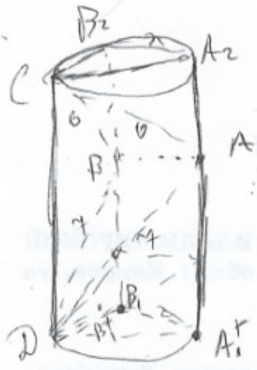
Пусть $-8a-6b \le 25$, тогда $a^2+8a+b^2+6b = (a+4)^2+(b+3)^2-25$, $(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$. Это ур-е круга с центром $(-4;-3)$ и радиусом 5, ограниченного прямой. $a \geq -3\frac{1}{8} - \frac{3}{4}b$.

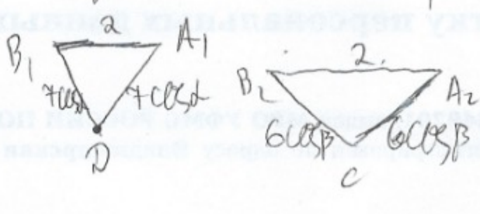


21100865 (U361630 M1302934)

черновик. Вар. 1 ⑨

② 1) Спроецируем A и B на основания цилиндра. Пусть $\angle ADA_1 = \alpha$, а $\angle A_2CA = \beta$. Очевидно, $\alpha = \angle BDB_1$; $\beta = \angle BCB_2$.





У ΔA_2B_2C и ΔDA_1B_1 равный радиус описанной окружности.

2) ~~Т. косинусов~~ и Т. косинусов для ΔA_2B_2C находим, что $\cos\angle B_2CA_2 = \frac{72\cos^2\beta - 4}{2\cdot 36\cos^2\beta}$, по аналогии $\cos\angle B_1DA_1 = \frac{98\cos^2\alpha - 4}{2\cdot 49\cos^2\beta}$. Отсюда

~~$\sin\angle B_2CA_2 =$~~ Понятно, что $\frac{2}{\sin\angle B_2CA_2} = \frac{2}{\sin\angle B_1DA_1} = 2R \Rightarrow 1-\cos^2\angle B_2CA_2 =$

$= 1-\cos^2\angle B_1DA_1$, $\cos^2\angle B_2CA_2 = \cos^2\angle B_1DA_1$, $\left(\frac{(6\cos\beta)^2-4}{2\cdot 6\cos\beta)^2}\right)^2 = \left(\frac{(7\cos\alpha)^2-4}{(2\cdot 7\cos\alpha)^2}\right)^2$;

$7^2\cos^2\alpha = a$; $6^2\cos^2\beta = b$; ~~$(a^4+16-8a)$~~ $(a^4+16-8a)4b^4$

$16\cdot 4a^4 - 8\cdot 4a^4 b = 16\cdot 4b^4 - 8\cdot 4ab^4$, $4a^4 = (a^4+16-8a)4b^4$

$2(a-b)(a+b)(a^2+b^2) - ab(a-b)(a^2+ab+b^2)$, $2(a^4-b^4) - ab(a^3-b^3) = 0$

$2(a+b)(a^2+b^2) > 0$, $(a-b)(2(a+b)(a^2+b^2) - ab(a^2+b^2+ab)) = 0$ т.к. a и $b > 0$, $a^2+b^2+ab > 0$. Значит $a = b$; $6\cos\beta = 7\cos\alpha$.

$CD = AD\sin\alpha + AC\sin\beta = 7\sin\alpha + 6\sin\beta$.

$36 - 36\sin^2\beta = 49 - 49\sin^2\alpha$, $(7\sin\alpha + 6\sin\beta)(7\sin\alpha - 6\sin\beta) = 13$

~~$CD = \frac{13}{7\sin\alpha - 6\sin\beta} \geq \frac{13}{7}$. $CD = \frac{13}{7}$ при $\sin\alpha$~~

$R = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\angle B_2CA_2}}$; т.к. $R \to \min$, то $\cos^2\angle B_2CA_2$ принимает минимальное значение

$\cos^2\angle B_2CA_2 = \left(\frac{b^2-4}{2b^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{b^2}\right)^2$

Черновик

$d>0$

$7\left(\frac{a_1+a_{14}}{2}\right)=S$

$a_9 \cdot a_{17} > S+12$

$a_{11} \cdot a_{15} < S+47$

$a_{11}=a_9+2d$

$a_{17}=(a_{15}+2d)$

$a_9 a_{15}+2a_9 d > S+12$

$a_9 a_{15}+2d a_{15} \leq S+47$

$35 > 2d(a_{15}-a_9)$

d — целое

$17{,}5 > d(a_{15}-a_9)$

$17{,}5 > 6d^2$

$35 > 12d^2$

$a_9 = a_1+8$

$a_{17}=a_1+16$

a_1+14d, a_1+8d

$d=1$ $d=2$

$S=(2a_1+13)7$

$(a_1+8)(a_1+16) > (2a_1+13)7$

$a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+91$

$(a_1+10)(a_1+14) = a_1^2+24a_1+140 < (2a_1+13)7+47$

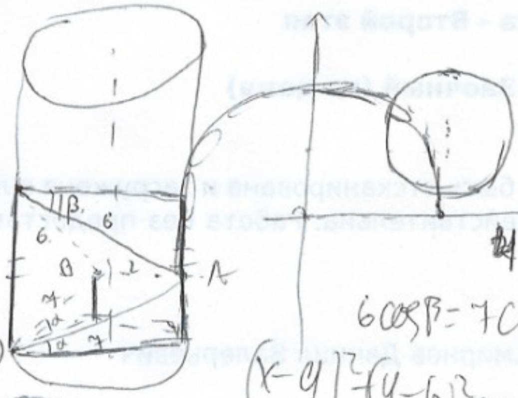
$a_1^2+10a_1+140 < 91+47=138$

$a_1^2+10a_1+2<0$

$D=100-8=92$

$7\cdot 13=91$, $12+91=103$

$a_1^2+2a_1\cdot 5+25-23=(a_1+5)^2-23<0$



$4=2b^2-2b^2\cos x$

$\cos x=\frac{2b^2-4}{2b^2}$

$1-\frac{2}{b^2}=\cos x$

$6\cos\beta=7\cos\alpha$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25$

$a^2+b^2 \leq \min(8a-6b,25)$

$a^2+b^2 \leq -8a-6b$, $a^2+b^2 \leq 25$

$a\in[-5;5]$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9 \leq 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25$

$25 \leq -8a-6b$

$4=2a^2-2a^2\cos x$

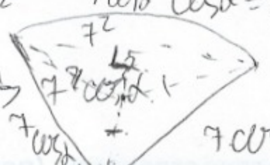
$\cos x = 1-\frac{2}{a^2}$

$CD=6\sin\beta+7\sin\alpha$

$a^2=7\cos\alpha = b^2$

$\frac{1}{1-\cos^2 x}=R$

$\frac{2}{\sin x}=R \Rightarrow \min$



$\left(\frac{a^2-4}{2a^2}\right)^2-8a-6b \geq 25$

$a \geq \frac{25+6b}{8}$

$\alpha+\beta$

$4=49\cos^2\alpha-49\cos^2\alpha\cdot 2\cos x$

$\cos x=\frac{49\cos^2\alpha-4}{2\cdot 49\cos^2\alpha}$

$\sqrt{2a^2-\left(\frac{a^2-4}{2a^2}\right)^2}=R$

$x=49+36-42\cos(\alpha+\beta)$

$x=7\sin\alpha+6\sin\beta$

$\frac{2}{\sin x \sin\beta \sin\alpha}$

$\sin\alpha=\sin x$

$1-\cos^2\alpha=1-\cos^2\beta$

$\beta=0$

$6\sin\beta=7\sin\alpha$

$a\leq 7$, $b\leq 6$

$a^4(9-b^4)=b^4(9-a^4)$

$9a^4-a^4b^4=9b^4-a^4b^4$

$a^4=b^4$

$a\cos\alpha-6\cos\beta=0$

$7\cos\alpha = \pm 6\cos\beta$

$\frac{a+b}{a-b}=\min$

$7^2\cos^2\alpha-6^2\cos^2\beta$

$13=7^2\sin^2\alpha-6^2\sin^2\beta$

$a+b=\min$

$a^2 \to 2$

2100865 (U361630 M1302934)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100865**

ID профиля: **361630**

Вариант 19

Чистовик. Вар. 19

① Ясно, что или a, или b, или c равно 21, иначе НОД $(a;b;c) \geq 21$. Также $a \geq 21$; $b \geq 21$, $c \geq 21$ по тем же причинам. Также и a и b, и c состоят из степеней 3 и 7, иначе НОД $\neq 3^{17} \cdot 7^{15}$ (было бы другое простое число). ~~Способов выбрать a равно $17 \cdot 15$, c — 17 или 15, b — 1. Всего $(17 \cdot 15)^2 \cdot 1 = (17 \cdot 15)^2$.~~ Но также, одно из чисел включает в себя 3^{17}, или 7^{15}, или всё сразу.

~~Пусть Ясно, что числа симметричны друг отн-но друга, поэтому можно два из чисел приравнять к $3^{17} \cdot 7^{15}$ и 21, а другое выбирать~~ Пусть одно из чисел равно $3^{17} \cdot 7^{15}$, а одно другое 21. Тогда таких чисел $17 \cdot 15 \cdot 3$. Пусть в одном числе есть 3^{17}, в другом 7^{15}, а оставшееся равно 21. Тогда таких чисел $14 \cdot 16 \cdot 3$. ~~Т.к. 3^{17} и 7^{15} можно поменять местами.~~ Т.к. $3^{17} \cdot 7^{15}$ или $7^{15} \cdot 3^{17}$ уже были посчитаны, поэтому $(15-1)(17-1) \cdot 3$.

Всего чисел $17 \cdot 15 \cdot 3 + 17 \cdot 15 \cdot 3 - 93 = 6 \cdot 15 \cdot 17 - 93$.

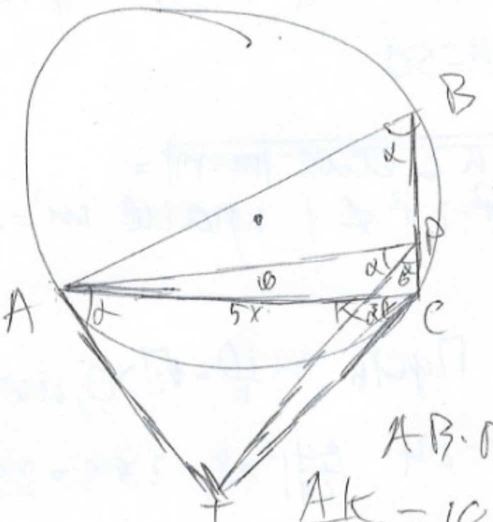
21100865 (U361630 M1302935)

Черновик вар. 19

2) Пусть $\frac{x}{2}-1=a$, $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=b$, $\sqrt{x-\frac{11}{4}}=c$, тогда ~~вместо~~ числа $\frac{1}{2}\log_a b$, $\log_c a$, $4\log_b c$. $\frac{1}{2}\log_a b\cdot\log_c a\cdot 4\log_b c=2$. Пусть одно из чисел равно y, тогда $y^2(y+1)=2$, $y^3+y-2=0$; $(y-1)(y^2+y+1)+y-1=0$; $(y-1)(y^2+y+2)=0$ $\Leftrightarrow y=1$. Отсюда следует, что $\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$, или $\sqrt{x-\frac{11}{4}}=\frac{x}{2}-1$, или $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$. Из 1-го ур-я $x=5$ или $x=1$ но $x>\frac{11}{4}$, значит $x=5$. Из 2-го $x=5$ или $x=3$, ~~Из 3-го~~ При $x=5$ $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{9}{4}\right)^2=2$.
Ясно, что если $x\neq 5$, то $x=3$ ~~иначе~~, т.к. $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\neq 1$, иначе всегда $x=5$. Но при $x=3$ $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{4}}\frac{5}{4}\neq 2$. Значит $x=5$.
Ответ: 5.

21100865 (U361630 M1302935)

(3) Чистовик. Гео. 19



$S_{ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}\sin\alpha$.

$\angle CAT=\angle ACT=\angle ABC=\alpha$.

$\angle APC=\angle ACT=\angle TPC=\angle CAT$ как впис. опир. на одну дугу

$S_{APK}=\frac{AP\cdot PK\cdot\sin\alpha}{2}=10$; $S_{PKC}=\frac{PK\cdot PC\sin\alpha}{2}=6$

$\triangle PKC\sim\triangle BAC$; $\frac{BC}{PC}=\frac{AC}{KC}=\frac{AB}{PK}$

$AB\cdot BC=PC\cdot PK\left(\frac{AC}{KC}\right)^2$; $PC\cdot PK=\frac{12}{\sin\alpha}$

$\frac{AK}{KC}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{AC}{KC}=\frac{8}{3}$

$\frac{AB\cdot BC\sin\alpha}{2}=S_{ABC}=\frac{PC\cdot PK\left(\frac{AC}{KC}\right)^2\sin\alpha}{2}=6\cdot\left(\frac{AC}{KC}\right)^2=6\cdot\frac{64}{9}=\frac{128}{3}$.

Ответ: (а) $\frac{128}{3}$

21100865 (U361630 M1302935)

черновик

Рег. №: М11...

Класс ...

Дата проведения: 2 февраля 2021 г.

Время начала (по московскому времени): ...

Заключительный этап 2021 г.

Анкета участника

Согласие на обработку персональных данных

$a = 2^{\alpha_1}$

$21 = 3\cdot 7$ НОД

НОК $= 3^{17}\cdot 7^{15}$

$a \geq 3\cdot 7$

$\log_a\left(\frac{x}{2}-1\right)^2$ b or $c = 21$, $a \geq 21$, $b \geq 21$, $c \geq 21$

НОД · НОК $= abc$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$

$17 \cdot 15$: $1, 3, 7$

$a \geq 3\cdot 7$, $b \geq 3\cdot 7$, $c \geq 3\cdot 7$

$\frac{x}{2}-1=a$

$\sqrt{\frac{x}{4}-\frac{11}{4}}=b$

$abc = 3^{18}\cdot 7^{16}$

$\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$

$a = 3^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$

$\frac{x}{2}-\frac{11}{4}=c$

$\frac{1}{2}\log_a c$, $\log_{ab} a$

$2\log_c b^2$

$a \geq 21$, $b \geq 21$, $c \geq 21$

$\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 7$

$\frac{AK}{KC}=\frac{5}{3}$

$\alpha_1 \in 1; 17$, $\alpha_2 \in 1; 15$, $\beta_1 \in 1; 15$

$a \leq 3^{17}\cdot 7^{15}$, $b \leq 3^{17}\cdot 7^{15}$, $c \leq 3^{17}\cdot 7^{15}$

$b=21$

$a: 17\cdot 15$, $c: 17\cdot 15\cdot 2$

$\log_{a^2} b^2 = \log_a b$

$\frac{1}{2}\log_{a^2} c = 2\log_c b^2$

$A\cdot B\cdot C = 1$, $A^2 C = 1$

$a = b\cdot c$

$\frac{8}{5}=\frac{PK}{KC}$

$c = b+1$, $c = a+1$

$c = a+b+16$, $S_1 = 10S_2$

$\frac{1}{2}\log_a c$, $\log_{ab} a$, $2\log_c b$

$17\cdot 15\cdot 3\cdot 42 = 1$

$\log_{ab} a = \log_{a^2} c + \log_c b^2$

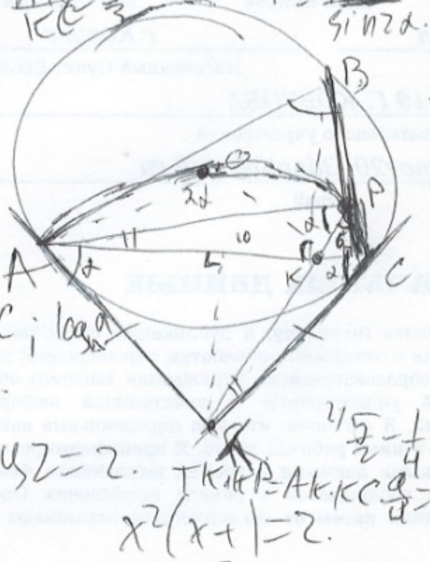
$\log_{a^2} c = \log_c b^2$

$x^2 z = 1$, $R = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$

$z = x+1$, $x^2(x+1)=1$

$x^3+x=1$, $x^3+x-1=0$

$\frac{AK}{KC}=\frac{5}{3}$



$\frac{AC}{PC}=\frac{AK}{KAK}$, $\frac{10}{}$, $\frac{TC}{TK}=\frac{TP}{TC}$

$CT^2 = TK\cdot TP\cdot C$

$\frac{x}{2}=\log_b a$

$\log_{ab} a + \log_{ab} a - 1 = 0$

$\log_b a = \log_{ab}\frac{a}{b}$

$\frac{1}{2}\log_a c$, $\log_{ab} a$, $2\log_c b$

$\frac{AK}{KC}=\frac{5}{3}$

$b = 21$, $a = 3\cdot 7^{17\cdot 15}$

$c = 7^{15}$, $c = 3^{17}\cdot 7^{15}$

$x\cdot 42 = 2$

$TK\cdot KP = AK\cdot KC$

$x^2(x+1)=2$

$x^3+x-2=0$

$\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\frac{S_{ACT}}{S_{ABC}} = AC\cos\alpha$

$x^2 - 4x + 4 = 2x - 1$, $a \geq 21$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x = 5$ или $x = 1$

$x - \frac{11}{4} = \frac{x^2}{4} - x + 1$

$x^2 - 4x + 4 = 4x - 11$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x = 5$ или $x = 3$

$17\cdot 15\cdot 3\cdot 2$

$3^{17}\cdot 7^{15}\cdot 3\cdot 17\cdot 15$

$34^2 = 900 + 16 + 240$

$36^2 = 900 + 36 + 360$

$3\cdot 15\cdot 17$

$\left(\frac{x}{2}-\frac{11}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2$

$x^2 + 5 - 6x = 0$

$125\cdot 16 = 5^3\cdot 2^4$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = x - \frac{11}{4}$

$16x^2 - 88x + 121 = 8x - 4$

$16x^2 - 96x + 125 = 0$

$15\cdot 17\cdot 6$

$1000\cdot 8 = 8000$

$96^2 = (100-4)^2 = 10000 - 800$

21100865 (U361630 M1302935)