Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100849**

ID профиля: **892681**

Вариант 19

Чистовик 1

3) $a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b, 25)$

1) Если $-8a-6b \geq 25$

$a^2+b^2 \leq 25$

Это нерав - круг с цен

2) Если $-8a-6b < 25$

$a^2+b^2 \leq -8a-6b$

$a^2+8a+16-16+b^2+6b+9-9 \leq 0$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25$

это неравенство - также круг с центром в точке $(-4;-3)$ и радиусом 5

Так как необходимо учитывать условие $\min(-8a-6b;25)$, то все решения второго неравенства исходной системы - это пересечение 2-х окружностей радиуса 5 и с центрами в $(0,0)$ и $(-4;-3)$

Теперь решим первое неравенство ~~системы~~ исходной системы

$(x-a)^2+(y-$

Это также круг с центром в $(a;b)$ и радиусом 5. Но решая второе неравенство мы уже получили геометрическое место точек - все возможные решения (a,b)

~~Если для~~ Чистовик 2

Если для каждой такой точки (a, b) нарисовать окружность с центром в ней и радиусом 5, то в результате получится эллипс.

Найдем его полуоси. Обозначим их за A и B

Расстояние между центрами $(0;0)$ и $(-4;-3)$ равно $\sqrt{4^2+3^2}=5$. Тогда для малой полуоси, ~~обозначим их за~~ ~~A~~ B имеем $2B=5+2R=15$, где R это радиус окружности - решений первой системы (а точнее $=5$) Для большей полуоси: $2A=5\sqrt{3}+2R=5(\sqrt{3}+2)$

Откуда $A=\frac{5(\sqrt{3}+2)}{2}$ $B=\frac{15}{2}$

Тогда площадь S полученного эллипса $=\frac{75(\sqrt{3}+2)}{4}$

Ответ: $\frac{75(\sqrt{3}+2)}{4}$

Чистовик 3

Запишем условия как систему уравнений (a_i - i-ый элемент последовательности, d - шаг последовательности, все числа целые и d обязательно положительные по ~~усл~~ условию)

$$\begin{cases} a_9 a_{17} > S+12 \\ a_{11} a_{15} < S+47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > S+12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+(24d)a_1+120d > S+12 \\ a_1^2+(24d)a_1+140d < S+47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+23da_1-S > -120d+12 \\ a_1^2+23da_1-S < -140d+47 \end{cases}$$

Заметим, что слева получились одинаковые выражения, тогда можем домножить второе на -1 и затем сложить их

$$-140d+47 > -120d+12$$

$$20d < 25$$

Тогда в силу условий, получаем, что единственный вариант это $d=1$ и мы можем выразить S через a_1 и d

$$S = \frac{a_1+a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(2a_1+13d)$$

Ответ: -19 и -5

Чистовик (4)

$$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 + 144 > 36 \\ a_1^2 + 24a_1 + 144 < 51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 + 12)^2 > 36 \\ (a_1 + 12)^2 < 51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 12 \quad ((-inf; -6) \cup (6; inf)) \\ a_1 + 12 \quad (-\sqrt{51}; \sqrt{51}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 12 \quad (-inf; -6) \cup (6 + inf) \\ a_1 + 12 \in [-7; 7] \end{cases}$$

Тогда $a_1 + 12 = -7$ или

$a_1 + 12 = 7$

Ответ: -19 и -5

21100849 (U892681 M1295851)

Черновик

1)

S_{19}

$n = 11$

$a_9 \cdot a_{17} > S + 12$

$a_{11} \cdot a_{15} < S + 47$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$(a_1 + d \cdot 8)(a_1 + d \cdot 16) > S + 12$

$(a_1 + d \cdot 10)(a_1 + d \cdot 15) > S + 47$

2)

3) $a_1^2 + 24a_1d + 16d^2 > S + 12$

$a_1^2 + 25a_1d + 10 \cdot 15d^2 > S + 47$

$a_1^2 + 24a_1d + 18 \cdot 16d^2 - 12 > S$

$a_1^2 + 25a_1d + 10 \cdot 15d^2 - 47 > S$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d + 18 \cdot 16d^2 - 12 > \dfrac{19(a_n + a_1)}{2} \\ a_1^2 + 25a_1d + 150d^2 - 47 > \dfrac{19(a_n + a_1)}{2} \end{cases}$

$16 + 16 = 108$

$18 \cdot 16 = 288$

$a_1^2 + 24a_1d + 18 \cdot 16d^2 - 12 > 7a_n + 7a_1$

$a_1^2 + 24a_1d + 288d^2 - 7a_n - 7a_1 - 12 > 0$

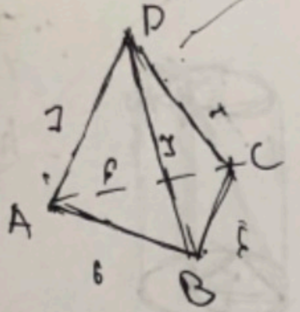
$d(24a_1 + 288d) =$

$a_1^2 + 25a_1d + 150d^2 - 47 >$

21100849 (U892681 M1295851)

черновик

2)



3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2=\min(-8a-6b, 25\end{cases}$

$x^2-2ax+a^2+y^2-2yb+b^2\le 25$

$25 = 9+16$
$16+9$

$(x-a)^2=16$ $\quad (x-a)^2=9$

$(y-b)^2=9$ $\quad (y-b)^2=16$

$(x-a)=\pm 4$ $\quad (x-a)=\pm 3$

$(y-b)=\pm 3$ $\quad (y-b)=\pm 4$

$a^2+b^2=\min(-8a-6b, 25)$

$a^2+b^2=-8a-6b$

$a^2+b^2=25$ $\quad b^2=9$

$a^2=9$ $\quad a^2=16$

$b^2=16$ $\quad b=\pm 3$

$a=\pm 3$ $\quad a=\pm 4$

$b=\pm 4$

$-8a-6b=a^2+b^2$

$-a(8+a)=b(b+6)$

$b(b+6)+a(8+a)=0$

$-4(-4+6)+-3(8-3)=0$

$4(4+6)+-3(8-3)$

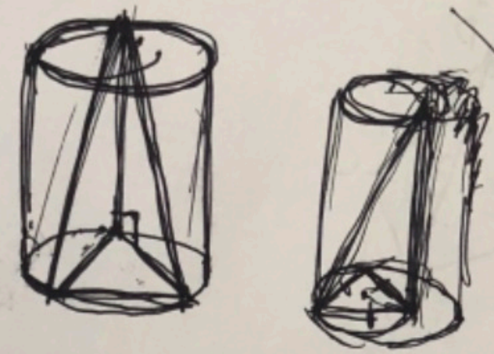
$3(3+6)-4(8-4)$

Черновик

т.у - мин имум

∴ ~~Это н~~

а - положи тельно



1 а положи

$a_3 a_{17} > S+12$ $\quad$ $a_{11} a_{15} < S+47$

$S =$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100849**

ID профиля: **892681**

Вариант 19

(Задание 4)
Чистовик 1

Заметим, что т.к НОК - это произведение 3 и 7, то каждое из чисел представляется в следующем виде:

$$n = 3^a \cdot 7^b$$

Причём у каждого из трёх чисел степени у 3 и 7 не меньше 1 (иначе НОД был бы не равен 21)

Тогда степени у тройки и семерки, которые встречаются в НОК - это максимальные возможные ~~значения~~ степени и хотя бы одно число, у которого в разложении есть такая степень. Аналогично должно быть хотя бы одно число у которого степень при 3 будет 1, и должно быть хотя бы одно, у которого степень 7 будет 1 (не обязательно одно и тоже число)

Посчитаем теперь число вариантов: (выбираем степень тройки).

1) варианты: выбираем число со степенью 1

2) варианты выбрали число со степенью 17 и оставшиеся принимают любое значение от 2 до 16 включительно, также отдельно ~~посчи~~-

~~по~~ Шестовик (2)

(Задание 4 продолжение)

посчитаем случай когда два числа с максимальной степенью или ми- нимальной - это равно числу спосо- бов выбрать два числа из 3, то есть 3 варианта и так будет и для 17 и для 1 => всего 6.

Просуммируем все варианты.

Всего вариантов: выбр. степень для 2: 6 · 16

Аналогично с поправкой на то, что рассматриваемый промежуток от 1 до 15. Можем посчитать варианты для 7: 6 · 14   36 · 16 · 14 = 8064

Ответ: 8064

Чистовик (11)

$= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{4}{5}$

$\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{5}{3}$ т.к PK - биссектриса в $\triangle APC$;

$S_{APC} = 10+6 = 16 = \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin\angle APC = \frac{1}{2} PC \cdot \frac{5}{3} PC \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3} PC^2$; $PC^2 = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$ $PC = 2\sqrt{6}$

$AP = \frac{5}{3} PC = \frac{10}{3} 2\sqrt{6}$

$AC = \sqrt{AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos\angle APC}$

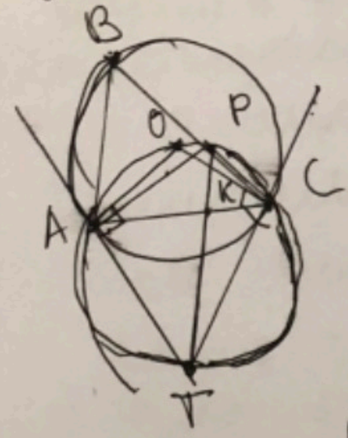
$AC = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\sqrt{6}\right)^2 + (2\sqrt{6})^2 - \left(2 \cdot \frac{10}{3}\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}\right)\left(-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\right)}$

$= \sqrt{\frac{2080}{15}} = 2\sqrt{\frac{52}{15}} = 4\sqrt{\frac{26}{3}}$ $\left(\cos\angle APC = -\frac{3}{5}\right.$, $2\alpha > 90$ ч

Ответ: $4\sqrt{\frac{26}{3}}$

Чистовик 3

Задание 6



а) $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$\angle OAT = \angle OCT = 90°$ т.к AT и CT - касательн =>

$\angle OAT + \angle OCT = 180°$

O, A, T, C лежат на одной окружности => O, A, T, C, P на одной окружности $\angle ABC = \angle TAC$ по теореме об угле между касательной (AT) и хордой (AC), и $\angle TAC = \angle TPC$ как вписанные, ~~опир~~ опирающиеся на одну дугу (TC). т.е $\angle ABC = \angle KPC$ => PT ∥ AB т.к равны соответственные углы KPC и ABC => $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по двум углам ($\angle ABC = \angle KPC$, $\angle ACB$ общий)

$S_{ABC} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 S_{KPC} = \left(1 + \frac{5}{3}\right)^2 \cdot 6 = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 6 = \frac{64}{9} \cdot 6 = \frac{128}{3}$

б) AT = CT как отрезки касательных => $\angle ACT = \angle ATC$ т.к $\triangle ATC$ равнобед. $\angle APT = \angle ACT$ т.к они опираются на дугу AT => $\angle APC = \angle KPC = 2\angle ABC = 2\,\mathrm{arctg}\,2$, пусть $\angle ABC = \alpha = \mathrm{arctg}\,2$ => $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} : 1 : \mathrm{tg}\,\alpha \frac{1}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$

21100849 (U892681 M1295852)

Черновик

5. $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)$; ~~log~~

$\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}(x-\frac{11}{4})^2$

ОДЗ

$\sqrt{x-\frac{11}{4}} \neq 1$ $\quad \frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0$ $\quad x-\frac{11}{4} > 0$

$x-\frac{11}{4} > 0$ $\quad \frac{x}{2} > \frac{1}{4}$ $\quad \frac{x}{2}-\frac{1}{4} \neq 1$

$x > \frac{11}{4}$ $\quad x > \frac{1}{2}$ $\quad x \neq \frac{5}{2}$

$x \neq \frac{15}{4}$

$2\log_{\frac{x}{2}-1}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}) \cdot 2\log_{x-\frac{11}{4}}(\frac{x}{2}-1) \cdot 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})$

$\frac{4\log_{\frac{x}{2}-1}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}{\log_{\frac{x}{2}-1}(x-\frac{11}{4})} \cdot 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}$

log

$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1) = \frac{1}{\log_{x-\frac{11}{4}}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}$

$\log_{x-\frac{11}{4}}(\frac{x}{2}-1) = 1$ $\quad x-\frac{11}{4} = \frac{x}{2}-1$ $\quad x$

$\log_{x-\frac{11}{4}}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}) = 1$ $\quad x-\frac{11}{4} = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ $\quad x$

$4x-11 = 2x-1$

$\log_{(\frac{x}{2}-1)}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}) = \frac{1}{\log_{(\frac{x}{2}-1)}(x-\frac{11}{4})}$ $\quad 4x-11 = 2x-1$

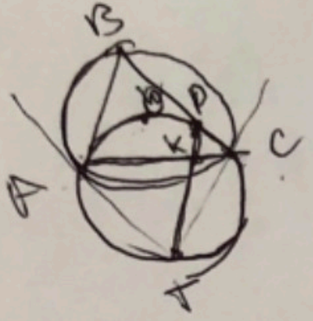
~~log~~ $\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = \frac{x}{2}-1$ $\quad 2x-1 = 2x-4$

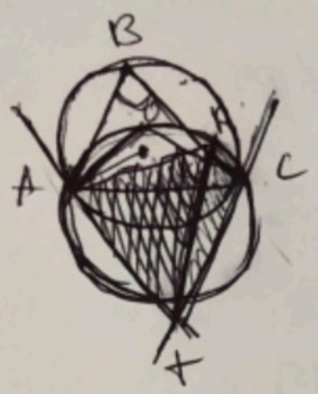
$x-\frac{11}{4} = \frac{x}{2}-1$ $\quad 4x-11 = 2x-4$

$2x-1 = 4x-11$

$x=5$

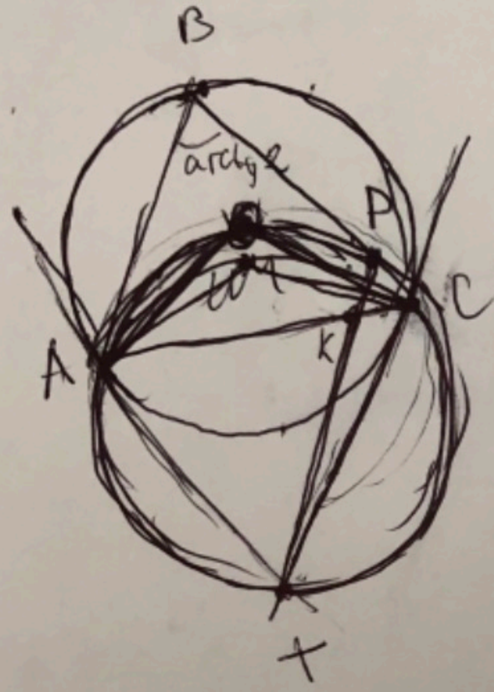
21100849 (U892681 M1295852)





$\triangle APK = 10$

$\triangle CPK = 6$



Черновик

1) $2\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

2) $2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

3) $2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

$\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \quad \frac{}{\log_{\frac{x}{2}-1}(}$

$x > \frac{11}{4} \Rightarrow x$ полож. число

$\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \quad \frac{1}{\log_{\frac{x}{2}-1}\left(x-\frac{11}{4}\right)}$

$\log_{\frac{6}{2}-1}\left(\frac{6}{2}-\frac{1}{4}\right) \quad \frac{1}{\log_{3-1}\left(\frac{13}{4}\right)}$

$\log_2\left(\frac{23}{4}\right) = \frac{1}{\log_2\frac{13}{4}}$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right) = \frac{1}{\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)}$

$\log_{\frac{23}{4}}\frac{13}{4} = \frac{1}{\log_{\frac{23}{4}}2}$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$, log

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right) = 1$

$x-\frac{11}{4} = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$4x-11 = 2x-1$

$2x = 10$

$x = 5$

$\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{1,5}\left(1,5-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{6}{4}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{4}\right)$

1) $\{$ ~~...~~

~~$\log_3$~~

1и2 $\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\log_{\frac{x}{2}-1}\left(x-\frac{11}{4}\right)}$

$\frac{x}{2}-1 = x-\frac{11}{4}$

$2x-4 = 4x-11$

$2x = 7$

$x = 3,5$

$\log_{\frac{7}{4}-\frac{1}{4}}\left(\frac{7}{2}-\frac{11}{4}\right)$

$\log_{\frac{6}{4}}\frac{3}{4}$