Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100649**

ID профиля: **112613**

Вариант 19

Чистовик.

1.

$a_i = a_1 + d(i-1) \quad a_i \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} a_9 a_{17} > S+12 \\ a_{11} a_{15} < S+47 \end{cases}$

$S = \sum_{i=1}^{14} a_i = 7(2a_1 + 13d)$

$d > 0 \ (d \geq 1) \ d \in \mathbb{N}$

$\begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > S+12 = 14a_1 + 91d + 12 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + 24a_1 d + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$

$A = a_1^2 + 24a_1 d - 14a_1 - 91d$

$47 - 140d^2 > A > 12 - 128d^2$

$35 > 12d^2$

$d^2 < \frac{35}{12} < 3$

$\underline{\underline{d = 1}}$

$\begin{cases} a_1^2 + 24a_1 - 14a_1 + 128 - 91 - 12 > 0 \\ a_1^2 + 24a_1 - 14a_1 + 140 - 91 - 47 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$

$\cancel{-23 < a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0}$

$0 < a_1^2 + 10a_1 + 25 < 23$

$0 < (a_1 + 5)^2 < 23$

$a_1 \neq -5 \qquad (a_1 + 5)^2 < 23$

$-5 < -\sqrt{23} < a_1 + 5 < \sqrt{23} < 5$

$-10 < a_1 < 0$ – для всех чисел (кроме -5) от -9 до -1 – подходит

$-9 + 5 = -4$
$-1 + 5 = 4$ $\rightarrow 4^2 = 16 < 23$

$\boxed{\text{Ответ: } \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}.}$

Чистовик

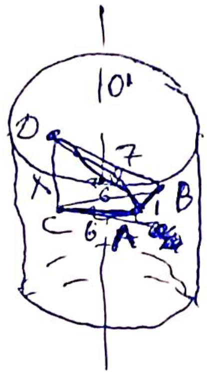
2.

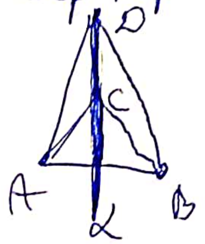
$AB=1$

$AC=CB=6$

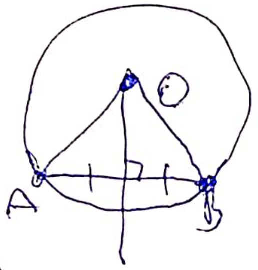
$AD=DB=7$

$CD=x$

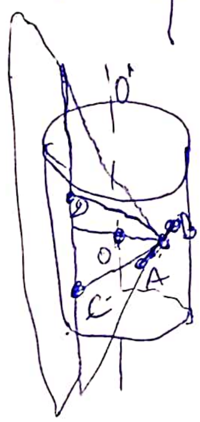


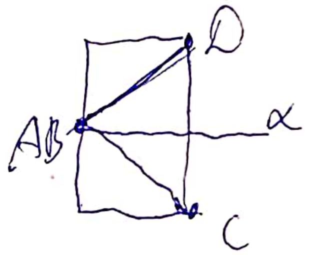


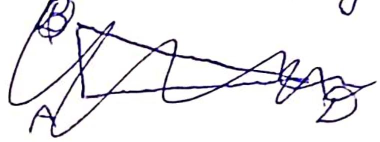
Тэтраэдр сим-н отн-о ~~вертикал~~ сер-пер. пл-ти к AB, т.к. т.C и т.D лежат на серпере к AB $\rightarrow$ CD лежит в такой пл-ти



А т.к. эта пл-ть α прох. ч-з ~~ось цил~~ центр ~~окр~~ окр-ти ω – сечения цил. ~~парал-но~~ перп-но оси ч-з AB, и содерж. $CD \parallel OO'$ – оси цил., то $OO' \in \alpha$, и цил. и вся картинка сим. отн-о α

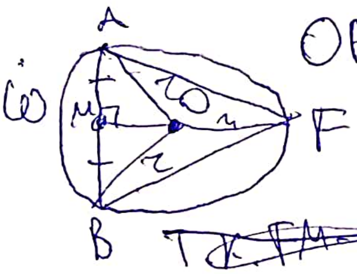


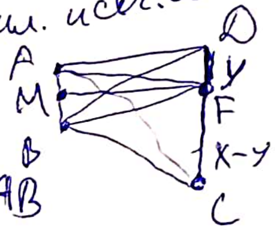




Пусть F – т. пересеч. $\alpha \cap CD$ ($F \in$ цил., т.к. $CD \in$ цил, всё $C, D \in$ цил, и CD – направляющая)

$OF = r$ – радиус цил. и сеч. ω





$y = DF$ ($CF = x-y$)

M – сер. AB

$AF^2+y^2=AD^2$

(сим.) $BF^2 = AF^2 = 49-y^2$

~~т.к. FM – медиана~~,

~~$AM^2+MO^2=AO^2=r^2=OF^2$~~

~~$AM^2+(MO+OF)^2=AF^2$~~

~~по т. сим.: $2r = \frac{AM}{\sin\angle BFA}$~~

~~$2r = \frac{BF}{\sin\angle BAF}=$~~

$AM=MB=\frac{1}{2}$

$AM^2+MF^2=AF^2$

$MF^2=49-y^2-\frac{1}{4}$

$(x-y)^2+AF^2=CA^2=36$

$\underline{(x-y)^2-y^2=-13}$ (1)

по т. синусов в $\triangle ABF$: $2r = \frac{BF}{\sin\angle BAF} = \frac{BF}{\sin\angle MAF} = \frac{BF}{\frac{MF}{AF}} =$ по опред.

$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{4}\frac{(49-y^2)^2}{49-y^2-\frac{1}{4}} \rightarrow r = \frac{1}{2}\frac{(49-y^2)}{\sqrt{49-y^2-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\frac{AF^2}{\sqrt{AF^2-\frac{1}{4}}}$

Илютович

2. (прод.)

$r^2 = \frac{1}{2}\frac{AF^2}{\sqrt{AF^2 - \frac{1}{4}}}$

$y^2 = 49 - AF^2 = 49 - z^2$

Пусть $AF = z$

$(1) \Rightarrow (x-y)^2 - 49 + z^2 = -13$

$(x-y)^2 + z^2 = 36$

$\cancel{x} = x - y + y =$ $\quad (x-y)^2 = 36 - z^2$

$= \sqrt{49 - z^2} + \sqrt{36 - z^2} = x$

$r = \frac{1}{2}\frac{z^2}{\sqrt{z^2 - \frac{1}{4}}}$

Ищем x при $r \to \min$

~~$\rightarrow \min:\ r'_z = \frac{1}{2}$~~

$r = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4z^2}}}$ $\quad \cancel{\alpha} r'_z$

$\begin{cases} 49 \geq z^2 \\ 36 \geq z^2 \end{cases} \Rightarrow z \leq 6$

$r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$1 \geq \frac{1}{4z^2} \Rightarrow 4z^2 \geq 1$

$z \geq \frac{1}{2}$

$r'_z = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot -2\right)z^{-3} = -\frac{1}{8}\cancel{z^{-3}}\left(1 - \frac{1}{4}z^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}$ ~~$\neq 0$~~ ~~(...)~~

$= -\frac{r}{(2z)^3\left(1 - \frac{1}{4z^2}\right)}$

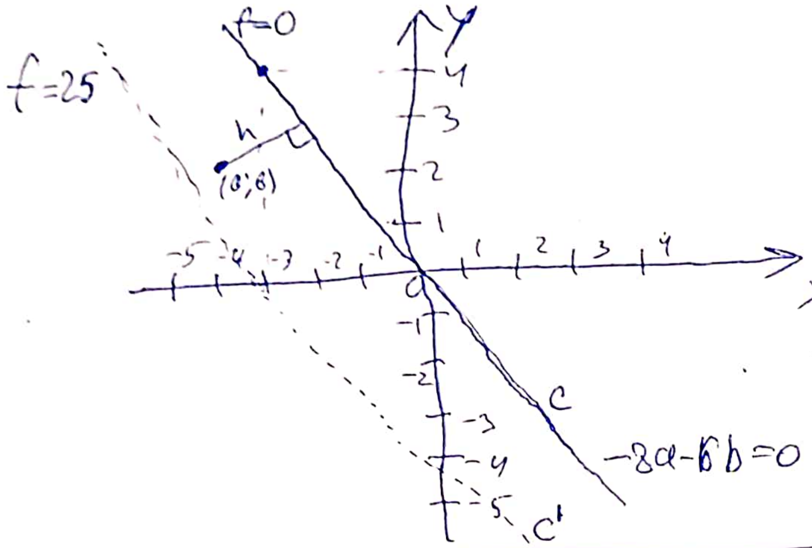
$\cancel{r(z)}:\ \frac{1}{4z^2} \searrow,\ \sqrt{1 - \frac{1}{4z}} \nearrow,\ r \searrow$ — мин. при $z = 6$

Ответ:
$x = \sqrt{13}$

Чистовик

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b,25)\end{cases}$

Рассм. дек. пл-ть, будем отмеч. a на Ox, b — на Oy



$\min(-8a-6b;25)=25$, когда $-8a-6b\ge 25$

Нарисуем прямую C:

$-8a-6b=0$ ~~$-8a-6b=25$~~

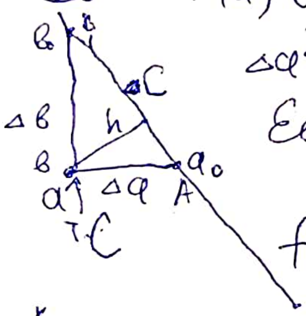
$\Downarrow$

$b=-\frac{4}{3}a$ ~~$b=-\frac{4}{3}a$~~

~~Рассм~~

Пусть $f_{(a,b)}=-8a-6b=-2(4a+3b)$

Для т. $(a;b)$:



$\Delta a^2+\Delta b^2=\Delta c^2$ $\begin{cases}\text{пусть}\\ h>0,\\ \Delta c>0 \text{ при } f>0\end{cases}$

Если $\Delta a=3\Delta t$

$f=-8(a_0+\Delta a)-6b=$
$=-8a_0-6b-8\Delta a=$
$=f(a_0;b)-8\Delta a$

$f=-8a-6(b_0+\Delta b)=$
$=-8a-6b_0-6\Delta b=$
$=f(a;b_0)-6\Delta b$

Но ведь $f(a_0;b)=f(a;b_0)=0$

$f=-24\Delta t$ $\quad -8\Delta a=-6\Delta b$

$\Downarrow$

$-12\Delta t=-3\Delta b$

$\Delta b=4\Delta t$

Пл-дь $\triangle ABC$: $\Delta c=|5\Delta t|$ ($\Delta t<0$ когда $f>0$)

$\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=h\Delta c=\Delta a\Delta b$

$\Downarrow$

$h=\frac{-12}{5}\Delta t$

$f(a;b)=0-6\Delta b=-24\Delta t=10h$

Т.к. $f=-8a-6b=10h$, где h — высота к C (рассм. только $-8a-6b\ge 0$, т.к. иначе должно быть $a^2+b^2<0$, ~~что~~ что невозможно)

$f<25$ при $10h<25\Rightarrow h<2{,}5$

Тогда если c' — прямая $f=25$ ($h<2{,}5$), то для точек м/у C и C' должно вып. $a^2+b^2\le f(a;b)$, а для точек левее и ниже c' — $a^2+b^2\le 25$

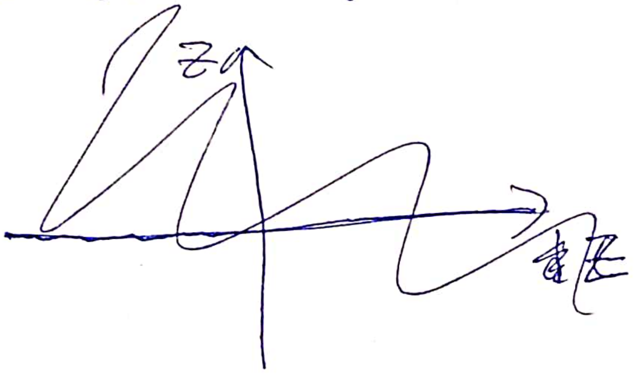
a^2+b^2 назовём $d^2=a^2+b^2$ ~~это квадр~~

Для т. $(a;b)$ назовём C, тогда $d=\rho(C;O)$, где ρ — расст. на пл-ти, O — нач. ко-ат

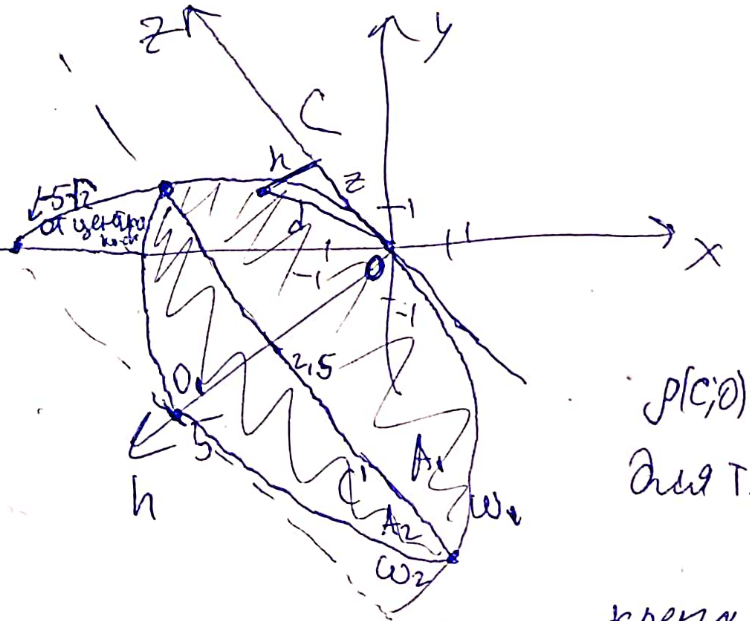
Чистовик

3. (прод.)

Т.е. для т. м/у c и c': $d^2 \le f$



Введём вспом. оси Oz и Oh: ~~совп.~~ ~~с~~
~~($Oc \parallel c$ $Oz \perp Oc$)~~
~~($Oz \parallel Oc$, $Oh \perp Oc$)~~
Oh напр. влево вниз - ~~от~~ к полож. п. h
Oz напр. влево вверх
Oz совпадает с прямой c



Тогда $C = (a; b)$ в сист. ко-ат Oxy
~~в сист~~ в $C = (z; h)$ в сист. ко-ат Ozh

$\rho(C; 0) = d^2 = h^2 + z^2$

для т. м/у c и c': $d^2 \le 10h$

$h^2 + z^2 \le 10h$

Ур-ие ~~окр-ти~~ круга — $z^2 + (h-5)^2 \le 25$

(ц. $(0; 5)$, радус 5)

Т.к. c': $h = 2{,}5$, то ц. этой окр-ти ω_1 — O_1 — явл. точкой, сим. отн-о c' к т. O

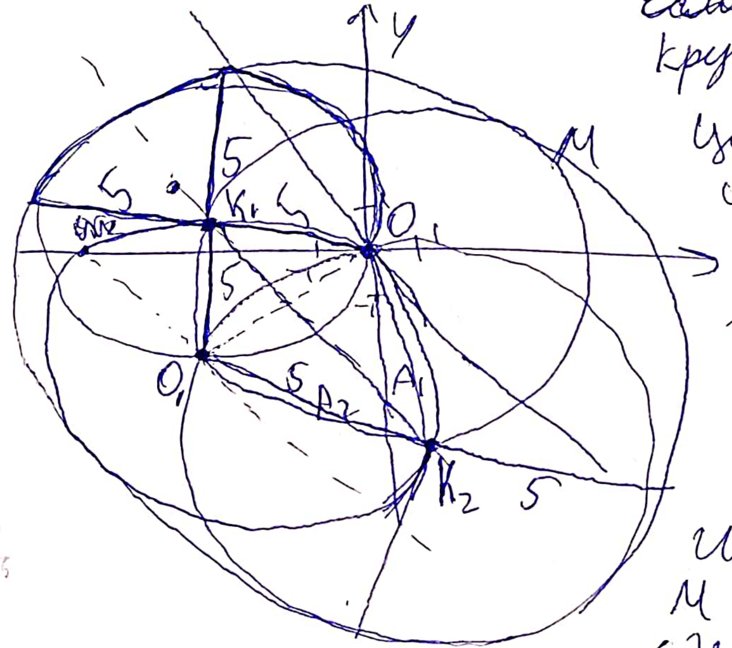
Для точек левее ниже c': $d^2 \le 25$ — ур-ие ~~окр~~ круга ω_2 с ц. O и рад. 5 — симметр. круг к ω_1 отн-о c' — т. пересеч. лежат на c'

Итого, все точки $(a; b)$, лежащие в двух (симметричных) круговых сегментах A_1 и A_2, удов. 2-му уравнению

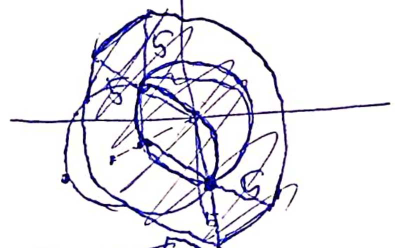
Чистовик.

3. (прод.)

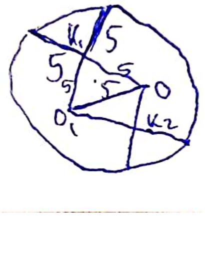
2-ое уравн. не завис. от x, y, поэтому все т. $(x;y)$, удов. системе уравн., будут иметь решения при $(a;b) \in A_1 \cup A_2$, при этом $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 25$ — ур-ие круга радиуса 5 с ц. $(a;b)=C$. Если т. $X=(x;y)$, то $X \in M \Leftrightarrow X$ лежит в одном из кругов рад. 5 с ц. в $C \in A_1 \cup A_2$



Если круги ω_1 и ω_2 содержат целиком A_1 и A_2, поэтому любая т. из M содерж. в круге с центром, лежащим на границе A_1 и A_2 (иначе расст. от X до $A_1 \cup A_2 > 5$, т.е. она не лежит в M). Иначе говоря, граница M получена сдвигом от O_1 радиально на 5 граничной точки A_1 и той же операции с O и A_2, а в т. пересеч. окр. ω_1 и ω_2 лежат две граничн. точки K_1 и K_2, дуги окр-тей из к-рых явл. ~~границ~~ частью границы M, замыкающей её.

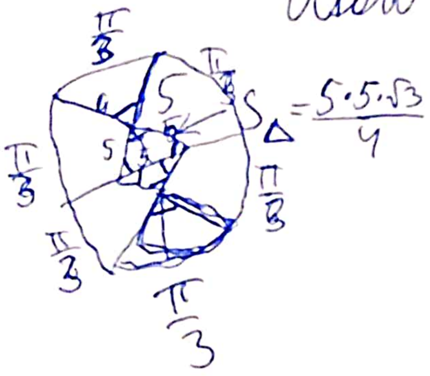


Тогда пл-дь M склад. из 2-х секторов с рад. 10 и углом 120° (OO_1K_1 и OO_1K_2 — равностор. треуг-ки, по 60° угли — $\angle K_1OK_2 = \angle K_1O_1K_2 = 120^\circ$) и пересек. по $\triangle OO_1K_1$ и $\triangle OO_1K_2$, а также из 2-х секторов с рад. 5 и углом 60°



Чистовик.

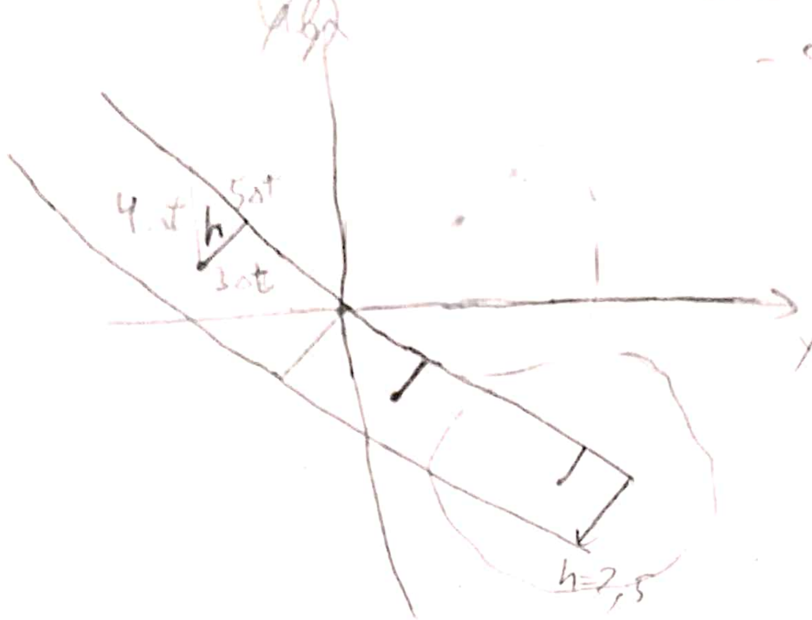
3. (прод.)



Итого: $\cancel{2\pi x}\ 2\cdot 10\frac{2\pi}{3\cancel{6}} - 2\cdot\frac{25\sqrt{3}}{4} + 2\cdot 5\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot 50 - \frac{25\sqrt{3}}{2} \sim$

$\boxed{\text{Ответ: } 25\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

3. черновик



$-8a-6b$

$5h=4\cdot 3$

$-8a-6b\geq 0$

$h=\frac{12}{5}x$

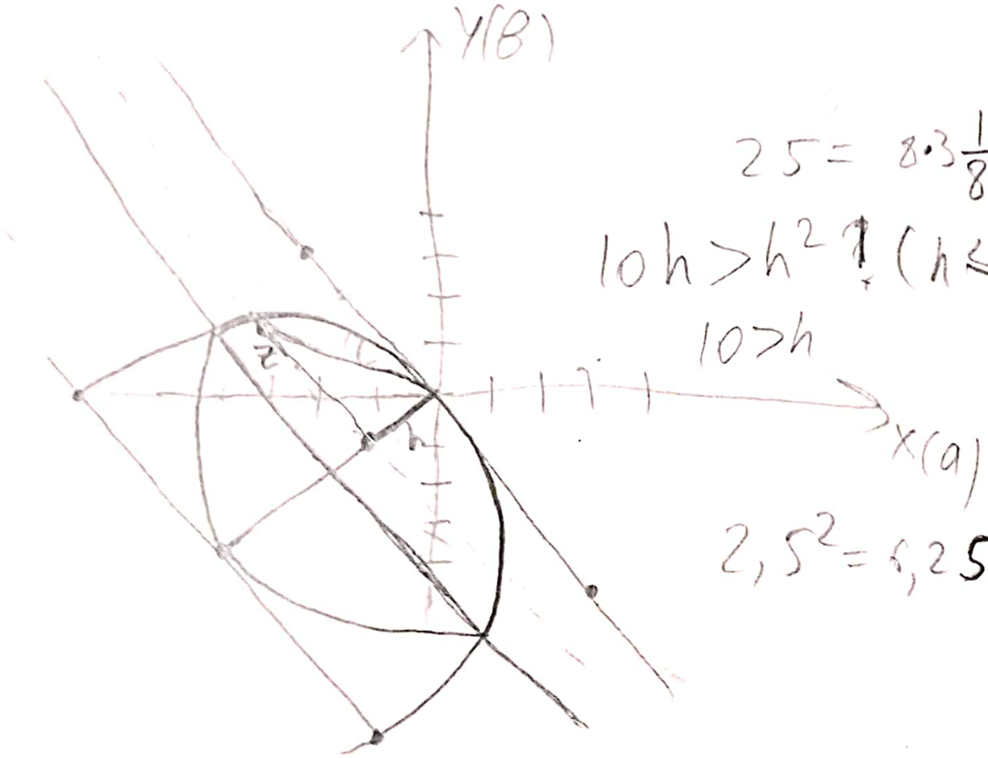
$12x$

$-2(4a+3b)=0$

$b=-\frac{4}{3}a$

x(a) $f=0-8\Delta a=0-24\Delta t=10h$

$h=-\frac{12}{5}\Delta t$



$25=8\cdot 3\frac{1}{8}$

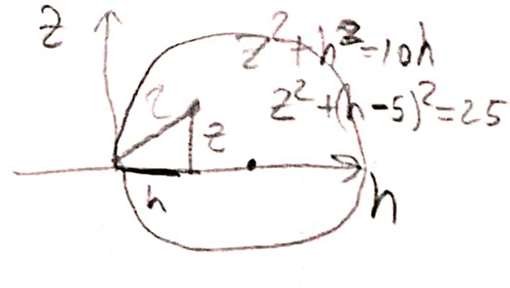
$10h>h^2$! $(h\leq 2,5)$

$10>h$

$z^2+h^2=r^2=10h$

$2,5^2=6,25$

$z=\sqrt{h(10-h)}$



Часть 2

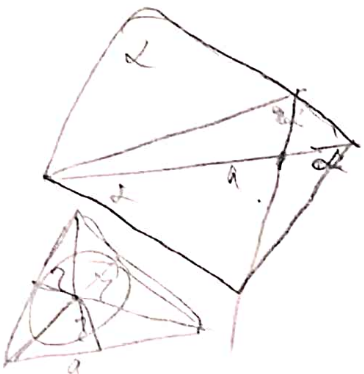
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100649**

ID профиля: **112613**

Вариант 19

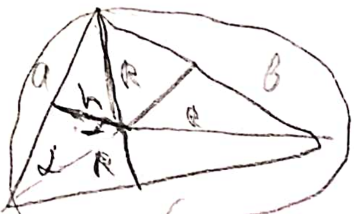
Черновик



$\frac{a}{\sin\alpha} = r$

$\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta))$

$\frac{1-\cos\beta}{2}$ $\sin^2\frac{\beta}{2}$



$\sin\alpha(1 + \cos\beta) +$

$\sin\beta(1+\cos\alpha) =$

$= \sin\alpha \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin\beta \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

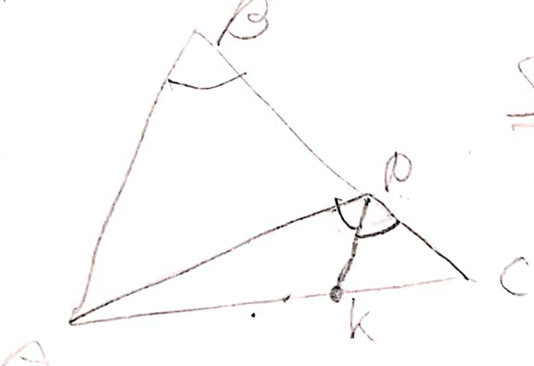
$h_1 = R\sin\alpha = R\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}$

$h_a a + h_b b + h_c c = R(a\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}} + b\sqrt{\ } + c\sqrt{\ }) = \frac{1}{2}(a\sqrt{R-a^2} + \ )$

$2\frac{a^2}{2} + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2$

$S = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{abc}{4R}$

$S = \frac{abc}{4R}$



$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BC}{PC}$

$2R_1 = \frac{c}{\sin\alpha}$

$\cancel{\frac{S_1}{S_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{AB}{C} \ AC}$

$2R_2 = \frac{c}{\sin 2\alpha}$

$\frac{a \cdot b \cdot c}{4R_1} = S_1$

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$

$c^2 \sin 2\alpha$

$S_2 = \frac{t^2 c}{4R_2} = \frac{bc^2 \sin^2\alpha}{2 \sin^2 2}= \frac{c^2}{a^2}S'$

$\frac{S'}{S_2} = \frac{a^2}{c^2}$

$\frac{t}{\sin\alpha} = 2R_2 = \frac{c}{\sin 2\alpha}$

$a^2 = \frac{2S'}{\sin^2}\sin 2\alpha$

Чистовик

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 21 = 3^1 \cdot 7^1 \\ НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$ Пусть t_a, t_b, t_c – степени вхожд. 3 в число a, b, c соотв.;

s_a, s_b, s_c — // — 7 в числа a, b, c соотв.

$(НОД(a;b;c) = (a;b;c)$, $НОК(a;b;c) = [a;b;c])$

Если бы у a, b или c был какой-либо простой делитель кроме 3 и 7, $[a;b;c]$ на него бы делилось. Т.к. это не так,

$a = 3^{t_a} \cdot 7^{s_a}$, $b = 3^{t_b} \cdot 7^{s_b}$, $c = 3^{t_c} \cdot 7^{s_c}$

Т.к. $(a;b;c) = 3^1 \cdot 7^1$, $\min(t_a; t_b; t_c) = 1$ – из опред. НОД. – хотя бы 1 из чисел
$\min(s_a; s_b; s_c) = 1$ имеет ст-нь вхожд. 3 – 1 и 7 – 1, а у ост. они больше

$[a;b;c] = 3^{17} \cdot 7^{15} \Rightarrow \max(t_a; t_b; t_c) = 17$
$\max(s_a; s_b; s_c) = 15$ – из опред. НОК

Значит, среди $t_a; t_b, t_c$ известно 2 числа $t_1 = 1$ и $t_2 = 17$, а третье $t_3 \in [1;17] \cap \mathbb{Z}$

аналогично, $s_1 = 1$, $s_2 = 15$, $s_3 \in [1;15] \cap \mathbb{Z}$

для t есть 17 вар-ов, для s_3 – 15 вар-ов

~~Т.е. есть 17 · 15 вар-ов неупоряд. наборов~~ $\cancel{(t_1; t_2; t_3)}$ ~~и~~ ~~пары мн-в~~ $\cancel{\{s_1; s_2; s_3\}}$

~~прав~~ $\cancel{t_2 <}$ $\cancel{t_1 < t_3 < t_2}$

рассм. вар-ы, где $t_1 < t_3 < t_2$: можно поставить $(t_a; t_b, t_c)$ в соотв. $(t_1; t_2; t_3)$ 6 способами $(3!)$:

3 сп. для a, 2 сп. для b, 1 сп. для c

~~аналогично, если~~ когда же $t_3 = t_1$ или $t_3 = t_2$,

имеем 3 вар-а выбрать букву x, $t_x = t_2$ или $t_x = t_1$, а 2 другие будут одинак.

Чистовик.

2 случ. совп.: t_3 и t_1 / t_3 и t_2

1.(прод.) т.е. имеем в сумме $6\cdot15+2\cdot3=96$ вар-ов

15 случ. для уник. t_1, t_2, t_3

распределить степени вхождения 3 в a, b и c

аналогично для S_1, S_2, S_3: 13 случ. по 6 вар-ов когда $t_3\neq t_1$ и $t_3\neq t_2$

и 2 случ. по 3 вар.: $t_3=t_1$ или $t_3=t_2$

итого: $13\cdot6+2\cdot3=84$ вар-ов распред. ст. вх. 7 в a, b и c

Т.к. это независ. способы, всего есть $96\cdot84$ тройки

$$\begin{array}{r} 8400 \\ -\ 336 \\ \hline 8064 \end{array}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 8064}$

Чистовик.

5.

$a = \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$b = \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$c = \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\alpha = \frac{x}{2}-1$

$\beta = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\gamma = x-\frac{11}{4}$

$\alpha, \beta, \gamma > 0$

$\alpha, \beta, \gamma \neq 1$

$\to$ $a = \log_{\alpha^2}\beta = \frac{1}{2}\log_\alpha \beta$

$b = \log_{\gamma^{\frac{1}{2}}}\alpha = 2\log_\gamma \alpha$

$c = \log_\beta \gamma = \frac{\ln\gamma}{\ln\beta} \to c\ln\beta = \ln\gamma$

$a = \frac{\ln\beta}{2\ln\alpha} \to 2\ln\alpha\, a = \ln\beta$

$b = 2\frac{\ln\alpha}{\ln\gamma} \to b\ln\gamma = 2\ln\alpha$ / $e^\wedge$

2 равны, а 3-й на 1 больше:

~~или~~

1) $a = b = c-1$

2) $b = c = a-1$

3) $a = c = b-1$

$\cancel{\frac{1}{2}\log_\alpha\beta = 2\log_\gamma\alpha = \log_\beta\gamma}$

$\begin{cases}\beta^c = \gamma\\ \alpha^{2a} = \beta\\ \gamma^b = \alpha^2\end{cases}$ $\to \alpha^{2ac} = \gamma$

$\alpha^2 = \alpha^{2abc}$

$\downarrow$

$\boxed{abc = 1}$

Если два числа равны t, а 3-е $t+1$

$t^2(t+1) = 1$

~~1) $\frac{\ln\beta}{2\ln\alpha} = 2\frac{\ln\alpha}{\ln\gamma} = \frac{\ln\gamma}{\ln\beta}$~~ $\to$ $\ln^2\beta = 2\ln\alpha\ln\gamma$

$4\ln^2\alpha = \ln\beta\ln\gamma$

$\ln^2\gamma = 2\ln\alpha\ln\beta$

Т.к. $\ln^2\beta > 0$, $\ln\alpha$ и $\ln\gamma$ 1-го знака

$\ln^2\gamma = 4\ln^2\alpha$

$\pm\ln\gamma = 2\ln\alpha$

$\to$ $\frac{\ln^2\beta}{4\ln^2\alpha} = \frac{2\ln\alpha}{\ln\beta}$

$\ln^3\beta = 8\ln^3\alpha$

$\ln\beta = 2\ln\alpha$

~~$\beta = \alpha^2$~~

$\beta = \alpha^2$

$\gamma = \alpha^{\pm 2} = \beta^{\pm 1}$

2) $2\frac{\ln\alpha}{\ln\gamma} =$

$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2 \overset{?}{=} \frac{x}{2}-\frac{1}{4} = x-\frac{11}{4} \to \frac{x}{2} = \frac{11}{4}-\frac{1}{4}$

$2x = 5$

$\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 \overset{?}{=} \frac{5}{2}-\frac{1}{4}$

~~решение~~

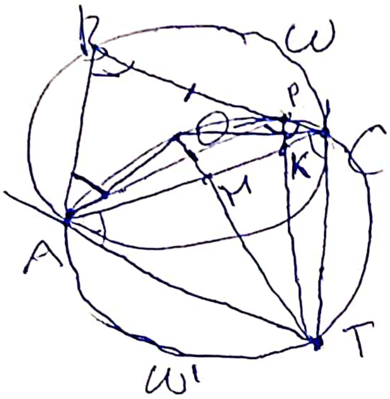
~~$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \overset{?}{=} \frac{9}{4}$ V~~

1) $a = b = c-1 = t$

$\begin{cases}\beta^{t+1} = \gamma\\ \alpha^{2t} = \beta\\ \gamma^t = \alpha^2\end{cases}$ $\to$ ~~$\beta^{t+1} = \gamma$~~ ~~$\gamma^{2} = \beta$~~ $\to \gamma = \alpha^{\frac{2}{t}} \to \beta^{t+1} = \alpha^{\frac{2}{t}}$

Чистовик

6.



Дано:
$S_{\triangle APK}=10$
$S_{\triangle CPK}=6$

Найти:
а) $S_{\triangle ABC}$ - ?
б) $\angle ABC=\operatorname{arctg} 2$
AC - ?

Пусть $\angle ABC=\alpha$

Т.к. он опир на $\smile AC$ в ω: $\smile AC=2\alpha=\angle AOC=$ ~~$\angle APC$~~

ω' - опис. окр $\triangle AOC$:
P опир в ω' на $\smile AC\rightarrow$
$2\angle APC=\smile AC=2\angle AOC=4\alpha$
$\downarrow$
$\angle APC=2\alpha$

Т.к. AT и CT - кас., они ~~$\angle CAT=\alpha$~~
сост. с хордой AC угол, равный $\frac{1}{2}\smile AC=\alpha$

$\angle CAT=\angle ACT=\alpha\rightarrow\angle ATC=\pi-2\alpha$ (в $\triangle TCA$ сумма углов $-\pi$)

Т.к. в 4-угл. AOCT $\angle O+\angle T=\pi$ $(2\alpha+\pi-2\alpha)$, он впис. $\rightarrow$

Т. $T\in\omega'\rightarrow\angle APT=\angle ACT=\frac{1}{2}\smile AT=\alpha$, $\angle PCT=\frac{1}{2}\smile CT=\angle ACT=\alpha$

Т.е. PK - бис-са $\angle APC$ и бис-са в $\triangle APC\rightarrow$ по св-ву бис.

$\frac{AK}{KC}=\frac{AP}{PC}$, но ведь у $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ общ. высота из $P\rightarrow$ на AC

$$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}}=\frac{AK}{CK}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=\frac{AP}{PC}$$

$S_{\triangle APC}=S_{\triangle APK}+S_{\triangle CPK}=16$

$\angle APC$ - внеш. в $\triangle ABP\rightarrow\angle B+\angle BAP=\angle APC$
$\alpha+\angle BAP=2\alpha$
$\angle BAP=\alpha$
$\downarrow$
$\triangle ABP$ - равнобедр., $AP=BP$

$\frac{AP}{PC}=\frac{BP}{PC}=\frac{5}{3}\rightarrow BC=BP+PC=\frac{8}{3}PC$

У $\triangle ABC$ и $\triangle APC$ также общ. выс. из т. A на BC $\rightarrow\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APC}}=\frac{BC}{PC}=\frac{8}{3}$

$\boxed{\text{Ответ: } S_{ABC}=\frac{128}{3}=42\frac{2}{3}}$

Чистовик

6. (прод.)

$\alpha = \operatorname{arctg} 2 \to \operatorname{tg}\alpha = 2$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$ $\to \sin^{-2}\alpha = 1+\operatorname{tg}^{-2}\alpha = 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$ $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{5}=\sin^2\alpha$

Пусть R_1 – рад. ω, R_2 – рад. ω', $t=AT=CT$, $c=AB$, $b=AC$, $a=BC$.

b – ?

OT – ось симметрии ч-уг. $AOCT$, т.к. AT и CT – кас. к ω с ц. в т. O $\to$ ω' также сим. отн-о $OT \to O' \in OT$, где O' – ц. ω' $\to OT$ – диаметр ω'

$t^2+R_1^2=OT^2=(2R_2)^2=4R_2^2$

$AT \perp r$ т.к. это кас-ая к ω

~~$t^2-4R_2^2=R_1^2$ (1)~~

Т. синусов в $\triangle ACT$: $\frac{b}{\sin(\pi-2\alpha)}=\frac{t}{\sin\alpha}=2R_2 \to 2R_2=\frac{b}{\sin 2\alpha}$

$\sin(\pi-2\alpha) = \sin 2\alpha$

$\to t=b\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}$

в $\triangle ABC$: $\frac{b}{\sin\alpha}=2R_1 \to R_1=\frac{b}{2\sin\alpha}$

$S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R_1}=42\frac{2}{3}$

Пусть $PC=p$, тогда $BP=a-p=AP$

$S_{\triangle APC}=\frac{p(a-p)\sin 2\alpha}{2}=16$

$\frac{a-p}{p}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

~~$p^2-ap+\frac{32}{\sin 2\alpha}=0$~~

$a-p=\frac{5}{3}p$

$p^2\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2}=16 \to p=4\sqrt{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{4}}=4\sqrt{\frac{3}{2}}=2\sqrt6$

($\alpha=\operatorname{arctg}2$) ~~$a-p=\frac{10}{\sqrt6} \to a=$~~ ~~$a-p=\frac{20}{\sqrt6}=\frac{10}{3}\sqrt6$~~

$S_{\triangle ACT}=\frac{t^2\sin 2\alpha}{2}=\frac{b^2\sin^2\alpha}{2\sin 2\alpha}=\frac{b^2}{2}$

$a-p=\frac{10}{3}\sqrt6$ $a=\frac{16}{3}\sqrt6$

Т.к. в $\triangle ACT$ и $\triangle PBA$ углы равны (α, α и $\pi-2\alpha$) $\to$ они подобны

$k^2=\frac{S_{\triangle ACT}}{S_{\triangle ABP}}=\frac{b^2}{c^2}$ $S_{\triangle ABP}=\frac{BP}{BA}S_{\triangle ABC}=\frac{5}{8}\cdot\frac{16}{3}\cdot 8=\frac{80}{3}$ $c^2=b^2\frac{S_{\triangle BPA}}{S_{\triangle ACT}}=\frac{160}{3}$

Чистовик

6. (прод.)

$C = 4\sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{30}$ $\quad p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{b+\frac{4}{3}(\sqrt{30}+4\sqrt{6})}{2} = \frac{b}{2} + \frac{2}{3}(\sqrt{30}+4\sqrt{6})$

~~$S_{\triangle ABC} =$~~

$S_{\triangle AOC} = \frac{R_1^2 \sin 2\alpha}{2} = \frac{b^2 \sin 2\alpha}{8\sin^2\alpha} = \frac{b^2}{8}$

$R_1 t = \frac{b^2}{2\sin 2\alpha}$ $\quad H = OT \cap AC$ $\quad b \cdot OH = \frac{b^2}{4}$

$OH = \frac{b}{4}$

$= PK \cdot KT = AK \cdot KC = b^2 \frac{3 \cdot 5}{32}$

Ответ: