Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100611**

ID профиля: **804385**

Вариант 19

11 клас.

Математика.

Чистовик

№1 (продолж.)

$-5+3\sqrt{2} \approx -5+3\cdot 1{,}4 = -0{,}8 \Rightarrow a_1 \in \{-4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a \in \{-9; -8; -6; -7; -4; -3; -2; -1\}$.

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 \text{ — круг.} \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b,\ 25). \end{cases}$$

! $-8a-6b \ge 0$, т.к. $a^2+b^2>0$

Рассмотрим случай, когда $-8a-6b=0$. Тогда $a=0$ и $b=0 \Rightarrow$ первое ~~(ур)~~ неравенство системы — ~~окружность~~ круг с центром в $(0;0)$.

В случае, когда $\min(-8a-6b, 25)=25$. (Тогда $a=-3$; $b=-4$, либо $a=-4$; $b=-3$)

Сумма a^2+b^2 не может превосходить 25, т.к в таком случае $-8a-6b>25$ и $a^2+b^2 \le 25$.

(Тогда ~~граничные~~ значения ~~для a^2+b^2: $[0;25]$~~. ~~Тогда определим границы~~) ~~для центра окр.~~ круга:

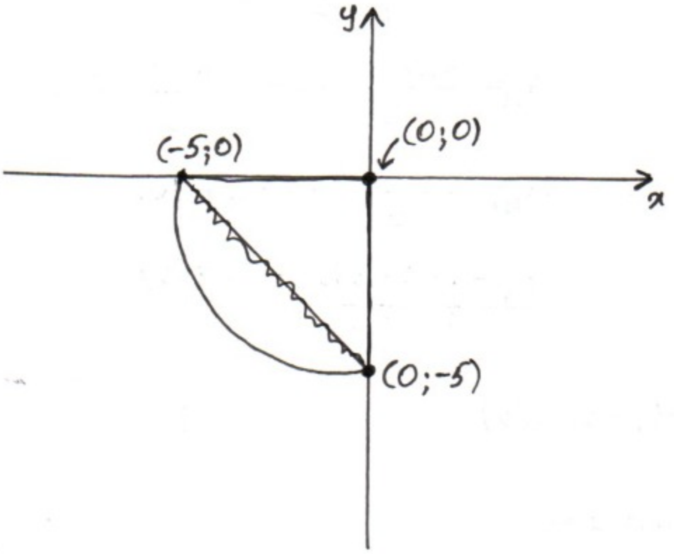
1) $a=0$; $b=0$;

~~2) $a=-5$; $b=0$;~~

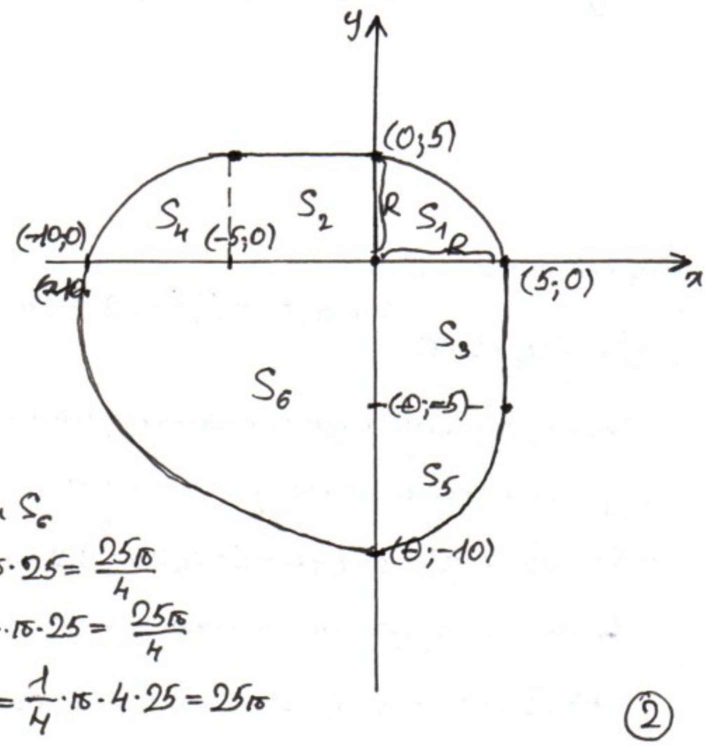
3) $a=0$; $b=-5$

! Тогда $a^2+b^2 \le 25$ — круг, который содержит в себе все вершины круга из первого неравенства.

Визуализируем границы, за которые не выходит центр круга:



Отсюда получаем следующую фигуру:



Посчитаем площади S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 и S_6

$S_1 = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi\cdot 25 = \cancel{(25\pi)}\ \frac{25}{4}\pi$

$S_4 = \frac{1}{4}\cdot\pi R^2 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 25 = \frac{25\pi}{4}$

$S_2 = 5\cdot 5 = 25$;

$S_5 = \frac{1}{4}\cdot\pi R^2 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 25 = \frac{25\pi}{4}$

$S_3 = 5\cdot 5 = 25$;

$S_6 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot(2R)^2 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 4\cdot 25 = 25\pi$

11 класс.

Математика.

Чистовик.

№1

$$S=\frac{a_1+a_1+13d}{2}\cdot 14=7(2a_1+13d)=14a_1+91d$$

$$\begin{cases} a_9\cdot a_{17}>S+12, \\ a_{11}\cdot a_{15}<S+47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d)>14a_1+91d+12, \\ (a_1+10d)(a_1+14d)<14a_1+91d+47 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+24da_1+128d^2>14a_1+91d+12, \\ a_1^2+24da_1+140d^2<14a_1+91d+47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+24da_1-14a_1-91d>12-128d^2, \\ a_1^2+24da_1-14a_1-91d<47-140d^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{matrix} a_1^2+24da_1-14a_1+128d^2-91d-12>0 \\ a_1^2+a_1(24d-14)+128d^2-91d-12>0 \end{matrix} \right)$$

$$\Rightarrow 47-140d^2>12-128d^2$$

$$35>12d^2$$

$$\frac{35}{12}>d^2 \Rightarrow d<\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{12}}$$

$$d<\sqrt{\frac{35}{12}}\approx\sqrt{2{,}9}<\sqrt{3}\Rightarrow$$

$\Rightarrow d=1$, т.к. прогрессия возр.

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1+128>14a_1+91+12, \\ a_1^2+24a_1+140<14a_1+91+47 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+24a_1-14a_1+25>0, \\ a_1^2+24a_1-14a_1+2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+2<0 \end{cases}$$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$D=10^2-4\cdot1\cdot25=0$

$a_1=\frac{-10}{2}=-5 \Rightarrow \underline{a_1\in(-\infty;-5)\cup(-5;+\infty)}$

$a_1^2+10a_1+2<0$

$D=10^2-4\cdot1\cdot2=92$

$a_{1_1}=\frac{-10-\sqrt{92}}{2}=\frac{-10-6\sqrt{2}}{2}=-5-3\sqrt{2}$

$a_{1_2}=\frac{-10+6\sqrt{2}}{2}=-5+3\sqrt{2}$

$\underline{a_1\in(-5-3\sqrt{2};-5+3\sqrt{2})}$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0, \\ a_1^2+10a_1+2<0 \end{cases} \Rightarrow a_1\in(-5-3\sqrt{2};-5)\cup(-5;-5+3\sqrt{2})$$

~~Итого, оценивая целые а получаем, что $a_1=$~~

Оценим возможные значения a_1:

$-5-3\sqrt{2}\approx-5-3\cdot1{,}4=-5-4{,}2=-9{,}2\Rightarrow a_1=-9;\ a_1=-8;\ a_1=-7;\ a_1=-6.$

~~Из них подходит только~~ $\underline{a_1=-6}$.

~~$-5+3\sqrt{2}\approx-5+3\cdot1{,}4=-5+4{,}2=-0{,}8\Rightarrow a_1=-4;\ a_1=-3;\ a_1=-2;\ a_1=-1$~~

~~Подходящих нет.~~

Ответ: $a_1=-6$.

1

11 класс.

Математика.

Чистовик.

№3 (продолж.)

Тогда $S_M = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = \frac{25}{4}\pi + \frac{25}{4}\pi + \frac{25}{4}\pi + 2\cdot 25 + 25\pi = \frac{75\pi}{4} + 25\pi + 50 =$

$= \frac{175 \cdot 3,14}{4} + 50 = 137,375 + 50 = \cancel{187,} \underline{187,375}.$

Ответ: 187,375.

№2

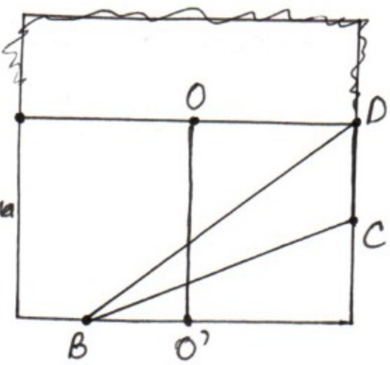
Дано:
$AB=2$;
$AC=CB=6$;
$AD=DB=7$

CD – ?

Решение:

Рассмотрим произвольный ~~...~~ тетраэдр, в который вписали в цилиндр.

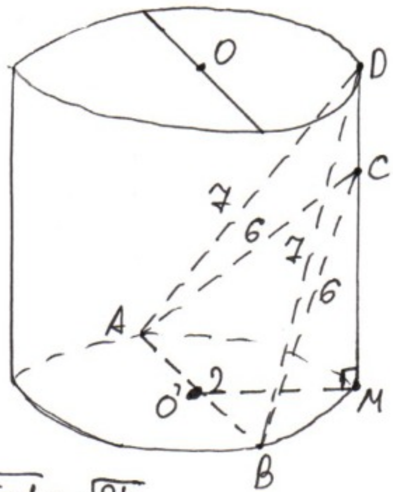
Вид сбоку:



$CD \parallel OO'$;
OO' – ось цилиндра

$AB=2 \Rightarrow$ минимальный радиус цилиндра достигается, если AB – диаметр.

Визуализируем этот случай:



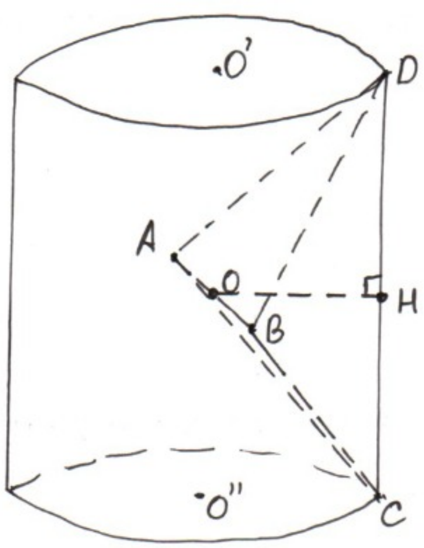
Из неравенства треугольника: $\underline{CD \in (1;13)}$

1. $O'C = \sqrt{CB^2 - O'B^2} = \sqrt{36-1} = \sqrt{35} \Rightarrow CM = \sqrt{35-1} = \sqrt{34}$
2. $DO' = \sqrt{DB^2 - O'B^2} = \sqrt{49-1} = 4\sqrt{3} \Rightarrow OO' \overset{=DM}{=} \sqrt{O'D^2 - OD^2} = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$
3. $\sqrt{47} - \sqrt{34} > 1 \Rightarrow$ нер. сторон $(BC + CD > BD)$ выполняется $\Rightarrow \underline{CD = \sqrt{47} - \sqrt{34}}$

Возможен случай:

11 класс
Математика.
Чистовик.

№ 2 (продолж.)



1. $\cancel{OD=}\ OD=\sqrt{BD^2-OB^2}=\sqrt{49-1}=\sqrt{48}$
2. $DH=\sqrt{OD^2-OH^2}=\sqrt{48-1}=\sqrt{47}$
3. $CO=\sqrt{6^2-1}=\sqrt{35}\Rightarrow CH=\sqrt{CO^2-OH^2}=$
$=\sqrt{35-1}=\sqrt{34}$
4. $CD=DH+HC=\sqrt{34}+\sqrt{47}<13\Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{CD=\sqrt{34}+\sqrt{47}}$

Ответ: а) $\sqrt{34}+\sqrt{47}$;
б) $\sqrt{47}-\sqrt{34}$

№1 Черновик

$(a_1+8d)(a_1+16d)>S+12$ $\qquad a_1^2+16da_1+8da_1+128d^2>S+12$

$(a_1+10d)(a_1+14d)<S+47$ $\qquad a_1^2+14da_1+10da_1+140d^2<S+47$

$a_1^2+24da_1+128d^2>S+12 \Rightarrow a^2+24da_1>S+12+128d^2$

$a_1^2+24da_1+140d^2<S+47 \quad a^2+24da_1<S+47+140d^2$

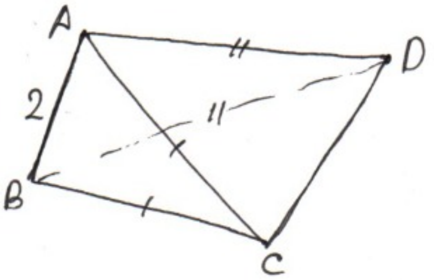
$35+12d^2$

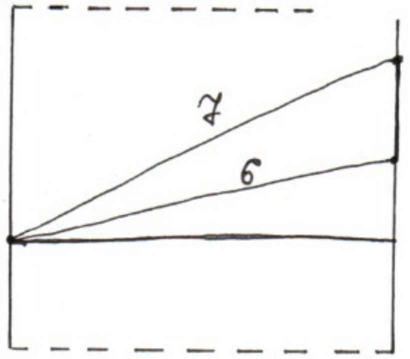
$\cancel{a_1^2+16da_1+}\begin{cases} a_1^2+24da_1+128d^2-12>S \\ a_1^2+24da_1+140d^2-47<S \end{cases}$ $\qquad S=\frac{a_1+(a_1+\overset{3}{\cancel{14}}d)}{2}\cdot 14$

$\begin{cases} a^2+24da+128d^2-12>7(a_1+a_1+\overset{3}{\cancel{14}}d) \\ a^2+24da+140d^2-47<7(a_1+a_1+13d) \end{cases}$

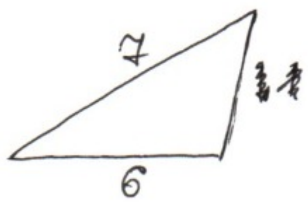
$a^2+24da-14da$

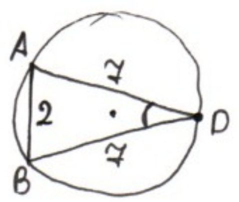
№2



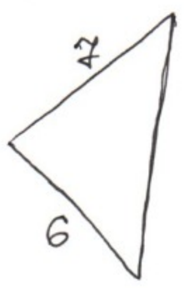


$\cos\angle=\frac{49+49-4}{2\cdot7\cdot7}=\frac{94}{98}$





$6+7=13$ $\qquad CD\in(1;13)$



$175\cdot 3{,}14$: 700, 175, 525 — 549,50

$549{,}5 : 4 = 137{,}375$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100611**

ID профиля: **804385**

Вариант 19

11 класс.
Математика.
Чистовик.

№6 (продолж.)

$$2.\ \cos\alpha = \cancel{AB}\ \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}$$

21100611 (U804385 M1304197)

11 класс

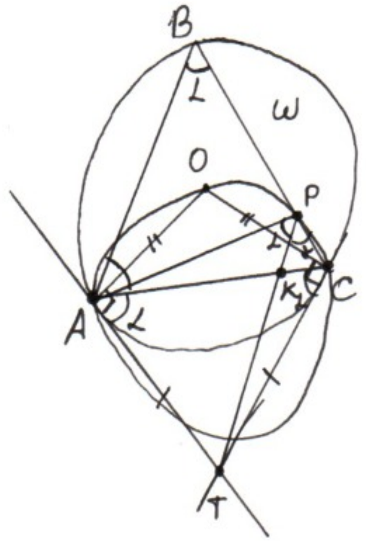
Математика

Чистовик

№6

а) $S_{APK}=10;\ S_{CPK}=6$

Найдём $S_{\Delta ABC}$.



Решение.

1. $S_{\Delta APC}=S_{\Delta APK}+S_{\Delta CPK}=16$
2. $\angle AOC=\angle APC$, т.к опир. на одну дугу
3. $OA\perp AT;\ OC\perp CT \Rightarrow OATC$ – вписанный (сумма пр. углов равна $180°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow PATC$ – вписанный $\Rightarrow \angle APT=\angle ACT$.

4. $S_\Delta APK=\frac{1}{2}\cdot h\cdot AK=10$; $S_\Delta CPK=\frac{1}{2}\cdot h\cdot KC=6$ $\Rightarrow \frac{AK}{KC}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$
5. Пусть $\angle ACT=\alpha \Rightarrow \angle ATC=180°-2\alpha \Rightarrow \angle AOC=2\alpha$, а зн. $\angle ABC=\alpha$.
6. $AB\parallel PT$, т.к $\angle TPC=\alpha$ ($AT=TC$ – равные хорды, стяг. равные дуги) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Фалеса: $\frac{CK}{KA}=\frac{CP}{PB}=\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BC}{PC}=\frac{8}{3}$

7. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta APC}}=\frac{8}{3} \Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{S_{\Delta APC}\cdot 8}{3}=\frac{16\cdot 8}{3}=\frac{128}{3}=42\frac{2}{3}$

Ответ: $42\frac{2}{3}$.

б) $\angle ABC=\operatorname{arctg} 2$

AC – ?

Решение

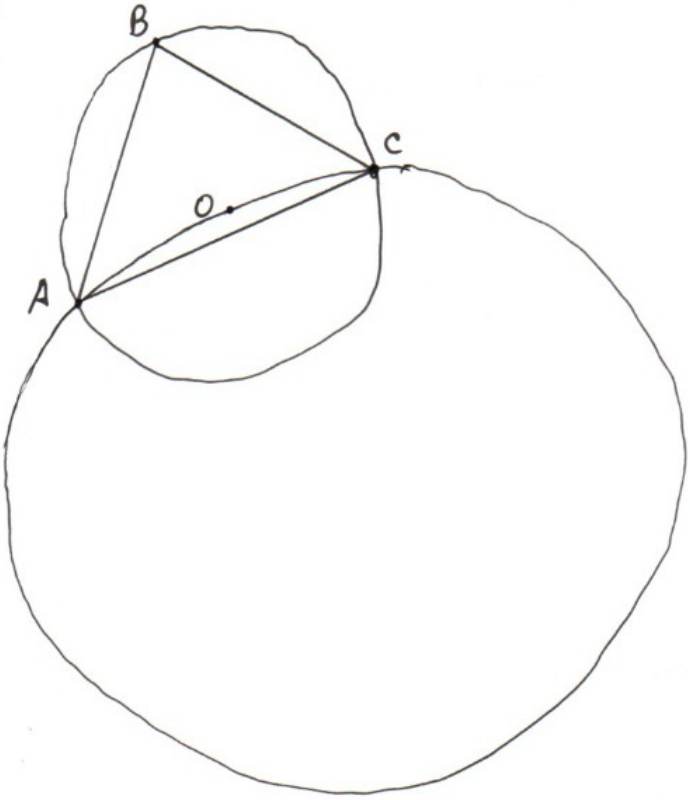
1. $\operatorname{tg}\angle ABC=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2 \Rightarrow \sin^2\alpha=4\cos^2\alpha$

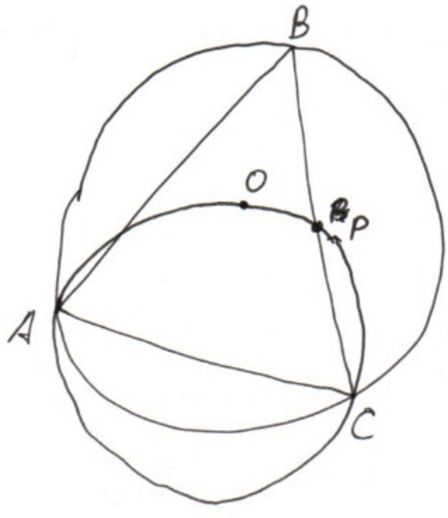
$1-\cos^2\alpha=4\cos^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt5};\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$

11 класс. Черновик.
Математика.
Черновик.

№6

а)





21100611 (U804385 M1304197)

11 класс.

Математика.

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

Известно, что $НОД(a;b;c)\cdot НОК(a;b;c)=a\cdot b\cdot c=3^{18}\cdot 7^{16}$

Т.к. $НОД(a;b;c)$ ~~как~~ $=21$, то каждое число как минимум равно $21 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ макс. степень любого числа: для 3: 16, для 7: 14.

Если определять степени первых двух чисел, то третье определ. однозначно.

Вариантов для a: $16\cdot 14=224$. Однако, чем больше берётся степень у числа a, тем меньше вариантов для b:

$$\left.\begin{matrix} 16 & 14 & - & 1 & 1 \\ 16 & 13 & - & 1 & 2 \\ 16 & 12 & - & 1 & 3 \\ 16 & 11 & - & 1 & 4 \\ 16 & 10 & - & 1 & 5 \\ & & \dots & & \\ 16 & 1 & - & 1 & 14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$ Посчитаем эти варианты: 14.

~~$(16\cdot 14\cdot 1 + 16\cdot 13\cdot 2 + 16\cdot 12\cdot 3+\dots+16\cdot 8\cdot 7)\cdot 2=$~~
~~$=32(14+13\cdot 2+12\cdot 3+11\cdot 4+10\cdot 5+9\cdot 6+8\cdot 7)=$~~
~~$=32(14+26+36+44+50+54+72)=$~~
~~$=32(50+80+50+116)=32(180+116)=$~~
~~$=32\cdot 296$~~

~~296×32: 592, 888, 9472~~

~~(Для 15: $2\cdot 15\cdot(14\cdot 2+13\cdot 2\cdot 2+12\cdot 2\cdot 3+\dots+8\cdot 7\cdot 2)=$~~
~~$=4\cdot 15\cdot 296=60\cdot 296$.)~~

Аналогично рассмотрим, когда для a: 15; 14 и т.д.

вариантов при фикс. c(1;1): 224

Если же b и c оставить „плавающими" то с каждым уменьш. ст. 3 для a число вариантов увелич. $\Rightarrow$ число вариантов:

$16\cdot 14+16\cdot 14\cdot 2+16\cdot 14\cdot 3+\dots+16\cdot 14\cdot 16=16\cdot 14(1+2+3+\dots+16)=$

$=224\cdot\frac{1+16}{2}\cdot 16=224\cdot 17\cdot 8$

21100611 (U804385 M1304197)

Однако из этого кол-ва вариантов надо вычесть линейку повтор.

Каждое увелич. варианта для b сохр. прошлую линию +1 новая $\Rightarrow$

11 класс

Математика

Чистовик.

№4 (продолж.)

Число вариантов: $224\cdot 17\cdot 8-14(1+2+3+\ldots+15)=224\cdot 17\cdot 8-14\cdot\frac{1+15}{2}\cdot 15=$

$=224\cdot 17\cdot 8-14\cdot 8\cdot 15=14\cdot 8(16\cdot 17-15)=\underline{28784}$

Ответ: 28784.

21100611 (U804385 M1304197)

11 класс

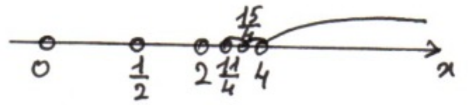
Чистовик

Математика.

№5

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}),\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1),\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2$

Ограничения: $\begin{cases} (\frac{x}{2}-1)^2>0, \\ (\frac{x}{2}-1)^2\neq 1, \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0, \\ x-\frac{11}{4}>0, \\ \sqrt{x-\frac{11}{4}}\neq 1, \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0, \\ \frac{x}{2}\neq 1, \\ (x-\frac{11}{4})^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 2, \\ x\neq 0, \\ x\neq 4, \\ x>\frac{1}{2}, \\ x>\frac{11}{4}, \\ x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 2, \\ x\neq\frac{15}{4}, \\ x\neq\frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow \cancel{x\in(\frac{1}{2};}$



$x\in(\frac{11}{4};\frac{15}{4})\cup(\frac{15}{4};4)\cup(4;+\infty).$

Нужно решить три системы и соединить их решения:

1) $\begin{cases} \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1) \\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2=\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})+1 \\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}(x-\frac{11}{4})^2=\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}(\frac{x}{2}-1)+1 \end{cases}$

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})=2\log_{x-\frac{11}{4}}(\frac{x}{2}-1)$

$\cancel{\text{Пусть } t=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}$

$\cancel{\frac{1}{2}\log_{t-\frac{3}{4}}t=2\log_{t-\frac{10}{4}}(t-\frac{3}{4})}$

$\log_{\frac{x}{2}-1}(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})-4\log_{x-\frac{11}{4}}(\frac{x}{2}-1)$

$\cancel{24}$ 60

296

60

13 3 3 11

39 33

Черновик

№5

$$\begin{cases} \log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right) \\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$НОД(a,b,c)=21$

$НОК\cdot НОД=a\cdot b\cdot c=3^{16}\cdot 7^{16}=$

$3\cdot 7 \quad 3\cdot 7 \quad 3^{16}\cdot 7^{14}$

224

$3^n\cdot 7^k \quad 3^{(16-n)}\cdot 7^{(14-k)}\cdot 1$

16

16 троек

14 семёрок

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 14 \\ \hline 64 \\ +\ 16 \\ \hline 224 \end{array}$$

1−16

1−14

$16\cdot 14=224$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 16 \\ \hline 102 \\ +\ 17 \\ \hline 272 \end{array}$$

$272-15=257$

$$\begin{array}{r} 257 \\ \times\ 8 \\ \hline 2056 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2056 \\ \times\ 14 \\ \hline 8224 \\ +\ 2056 \\ \hline 28784 \end{array}$$