Часть 1

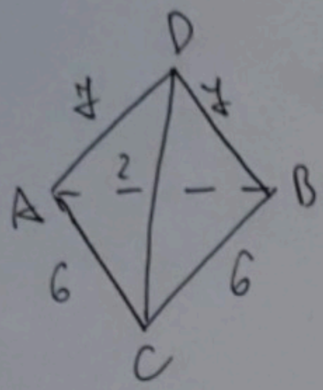
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

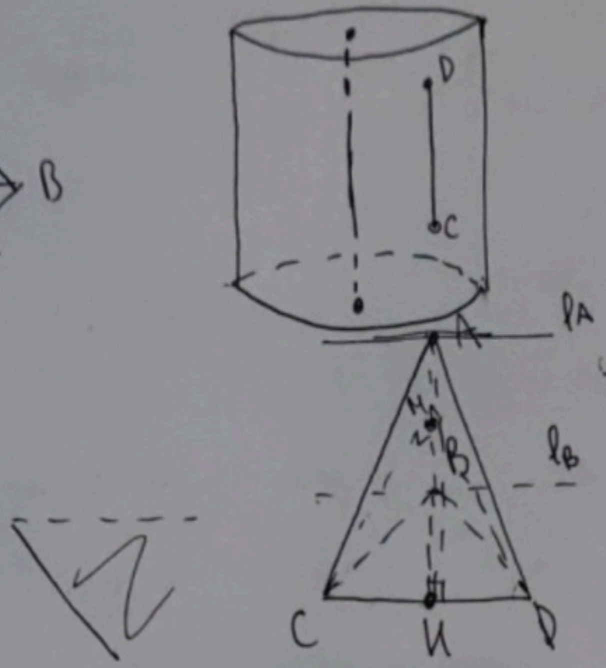
Шифр: **21100572**

ID профиля: **284497**

Вариант 19

Черновик.





Заметим, ΔABC и ΔABD – р/б
$\Downarrow$
$CM \perp AB$, $DM \perp AB$,
M – ср. AB.
высота и медиана
CM и DM.

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp CM \\ AB \perp DM \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (CMD)$$

Рассмотрим прямые l_A и l_B: $A \in l_A$; $B \in l_B$
$l_A \parallel CD$; $l_B \parallel CD$

Видим, что l_A и l_B – образующие цилиндра т.к. его ось им параллельна и точки A, B лежат на боковой грани. $\exists H$ – основание высоты BH в ΔCBD.

$$\underbrace{BH \perp CD;\ AB \perp (CMD)}$$
$$\Downarrow$$
$$\left.\begin{array}{l} AB \perp CD \\ BH \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow (ABH) \perp CD \Rightarrow$$

$\Rightarrow (ABH) \parallel$ основанию цилиндра $\rightarrow$ $R_{\text{опис.окр. около }(ABH)} = R_{\text{осн. цилиндра}}$
(т.к. 3 точки: A, B, H на боковой грани цилиндра)

(по 3 сторонам)
$\Delta ACD = \Delta BCD$
$$\left.\begin{array}{l} AH \perp CD \\ BH \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow AH = BH \Rightarrow \Delta AHB - р/б. \quad AB = 2. \Rightarrow$$
$\Rightarrow R_{\text{опис. окр. } \Delta AHB} \geq \frac{AB}{2} = 1$. $R = 1$ достигается в случае ΔAHB – прямоугольный

Черновик.

$S = \sum_{i=1}^{14} a_i$ $\qquad a_1 < a_2 < \ldots < a_9 < \ldots < a_{17}$

$a_i \in \mathbb{Z}$ $\qquad a_1 = ?$ — наименьшее значение.

a_i — целые числа

$$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > a_1 + \ldots + a_{14} + 12 \\ a_{11} \cdot a_{15} < \underbrace{a_1 + \ldots + a_{14}}_{S} + 47 \end{cases}$$

$a_9 \cdot a_{17} > S + 12$

$a_{11} \cdot a_{15} < S + 47$.

$\cancel{a_{11} \cdot a_{15} - a_9 \cdot a_{17}}$

$a_{11} > a_9$ $\qquad a_1 + \ldots + a_{14} = S.$ $\qquad 1 + 2 + \ldots + k = \frac{1+k}{2} \cdot k$

$a_{15} < a_{17}$

$\exists\, d = a_{i+1} - a_i.$

$\cancel{a_1 + \ldots + a_{14} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14}$ $\qquad a_1 + (a_1 + d) + \ldots + (a_1 + 13d) =$

~~Сумма арифм. прогр~~ $\cancel{= \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$ $\qquad = \frac{a_1 + a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 7(2a_1 + 13d) =$

$= 14a_1 + 91d$

$\cancel{\frac{1}{1}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{3}\ \frac{7}{4}\ \frac{9}{5}\ \frac{11}{6} = 14 + 91.}$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$a_2 = a_1 + d$ $\qquad a_n = a_1 + d(n-1) = a_1 + dn - d.$

$a_3 = a_1 + 2d$ $\qquad a_1 + a_n = 2a_1 + dn - d$

$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + dn - 2d + a_1 = 2a_1 + dn -$

$$\boxed{\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

$S = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(a_1 + a_{14}) = 7(a_1 + a_1 + d(13)) =$

$= 7(2a_1 + 13d) = 14a_1 + 91d;$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{17} = a_1 + 16d$

$$\begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 91d + 12 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

21100572 (U284497 M1304878)

Чистовик

№1.

Обозначим за a — a_1 $(a = a_1)$. $\exists k$ — шаг прогрессии $(k \neq 0)$ (т.к. последовательность возрастающая) $k > 0$ $a_n = a + k(n-1)$.

① $a_9 \cdot a_{17} = (a+8k)(a+16k) = a^2 + 24ak + 128k^2$

② $a_{11} \cdot a_{15} = (a+10k)(a+14k) = a^2 + 24ak + 140k^2$

$$\begin{cases} ① \; a_9 \cdot a_{17} > S + 12; \\ ② \; a_{11} \cdot a_{15} < S + 47. \end{cases} \quad \begin{cases} ① \; a^2 + 24ak + 128k^2 > S + 12 \\ ② \; a^2 + 24ak + 140k^2 < S + 47 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \; a_{11} \cdot a_{15} - 47 < S < a_9 \cdot a_{17} - 12 \Rightarrow a_{11} \cdot a_{15} - 46 \leq S \leq a_9 \cdot a_{17} - 13$
т.к. $a_i \in \mathbb{Z}$

$140k^2 - 46 \leq 128k^2 - 13; \; 12k^2 \leq 33;$

$k^2 \leq \frac{33}{12} = 2\frac{9}{12} = 2\frac{3}{4}$

$k > 0, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 14a + 1 + 2 + \ldots + 13 = 14a + 91$

1) $a_9 \cdot a_{17}$ [redacted] $= a^2 + 24a + 128 > S + 12 = 14a + 103$

$a^2 + 10a + 25 > 0 \Leftrightarrow (a+5)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq -5 \; (*)$

2) $a_{11} \cdot a_{15} = a^2 + 24a + 140 < S + 47 = 14a + 138$

$a^2 + 10a + 2 < 0 \Leftrightarrow (a+5)^2 < 23 \Leftrightarrow$ $(a+5 \in \mathbb{Z})$ $|a+5| \leq 4 \Rightarrow$

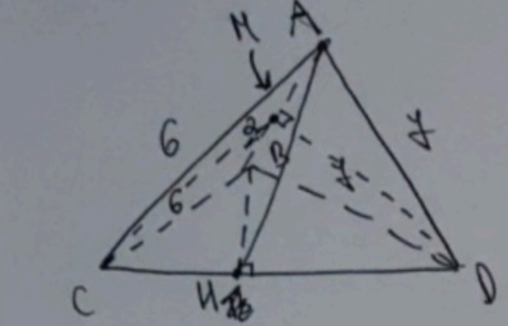
$\Rightarrow \; -9 \leq a \leq -1 \; (**)$

Из $(*)$ и $(**)$: $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

Чистовик

№2.



$\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ – равнобедренные

$\Downarrow$

$CM \perp AB$, $DM \perp AB$, где M – середина AB

т.к. CM и DM – медианы и высоты одновременно.

$\left.\begin{matrix} AB \perp CM \\ AB \perp DM \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (CMD)$

Рассмотрим прямые l_A и l_B такие, что $A \in l_A$; $B \in l_B$ и $l_A \parallel l_B \parallel CD$. Тогда, l_A и l_B – образующие цилиндра т.к. его ось параллельна CD (по условию), а также A, B лежат на боковой грани.

$\exists H$ – ~~осн~~ основание высоты из B к CD в $\triangle CBD$

$\underbrace{BH \perp CD;\ AB \perp (CMD)}$

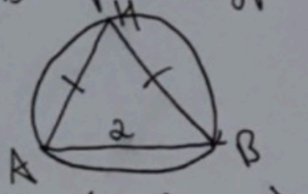
$\Downarrow$

$\left.\begin{matrix} BH \perp CD \\ AB \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow (ABH)$ параллельна основаниям цилиндра.

Тогда, $R_{\text{опис. окр. около } \triangle ABH} = R_{\text{осн. цилиндра}}$.

$\triangle ACD = \triangle BCD$ (по 3м сторонам)

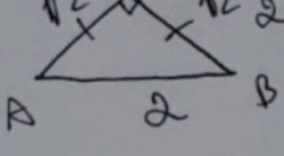
$\left.\begin{matrix} AH \perp CD \\ BH \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH = BH \Rightarrow \triangle AHB$ – равнобедренный.
(высоты равных $\triangle$)



$\left(\frac{AB}{2\sin H} = R\right)$

$AB = 2 \Rightarrow R_{\text{опис. окр. } \triangle ABH} \geq \frac{AB}{2} = 1$

$R = 1$ достигается в случае, когда $\triangle AHB$ – прямоугольный ($\sin H = 1$).



$2AH^2 = 2^2$; $AH = \sqrt{2}$

$HD = \sqrt{\underset{\sqrt{BD^2 - BH^2}}{\underset{\shortparallel}{49 - 2}}} = \sqrt{47}$

$CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{36 - 2} = \sqrt{34}$.

$\Rightarrow R_{\text{мин. цил.}}$ при $CD = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{34}$

2

21100572 (U284497 M1304878)

Чистовик

№3

Преобразуем множество точек M:

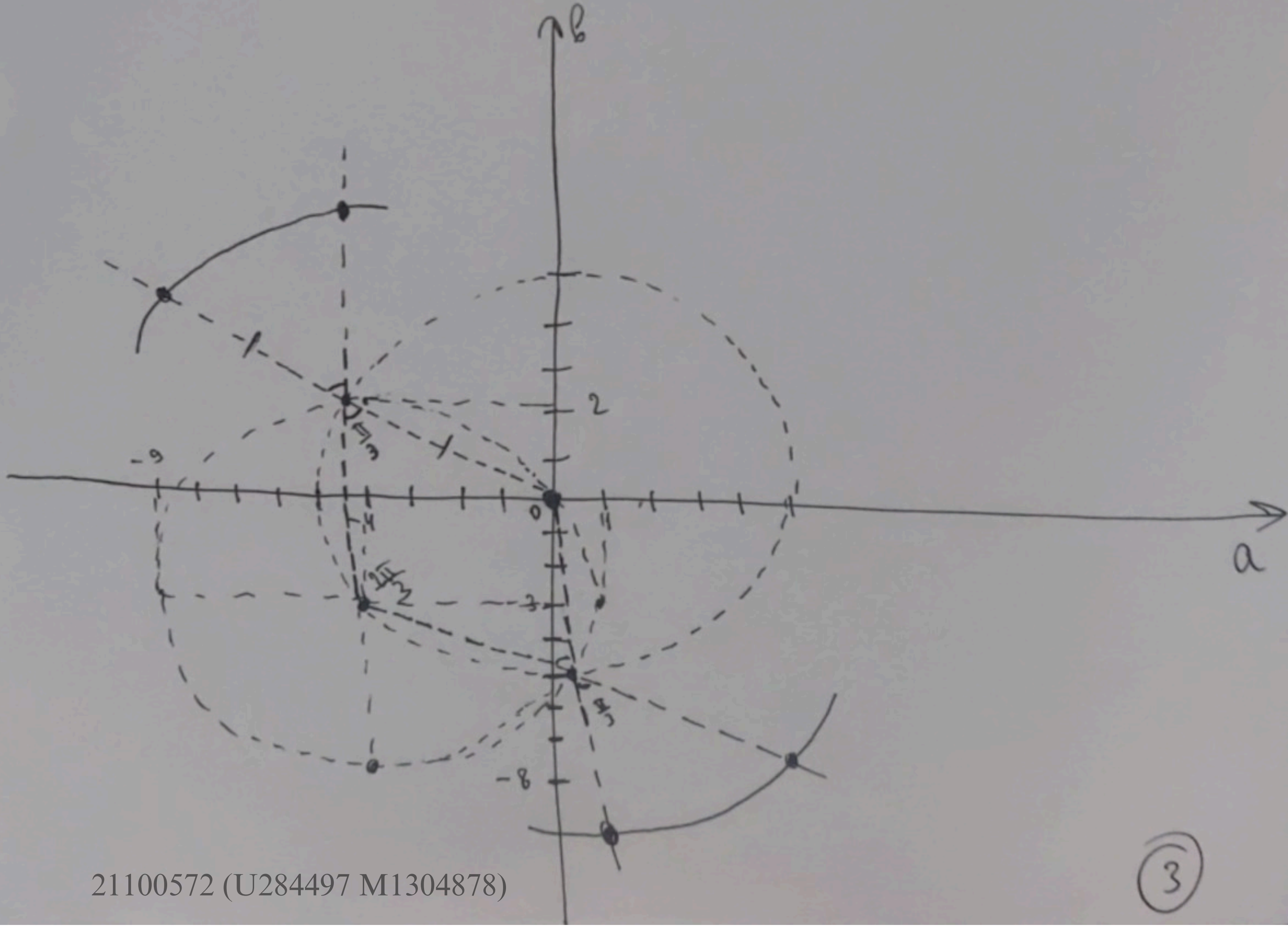
Для пары $(a;b)$: $a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$ и для пары (x,y): $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$.

1) Заметим, что для пар вида (x,y): $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$ — круг с центром $(a;b)$ и радиусом 5.

2) С другой стороны возьмём множество $N = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid \min(-8a-6b,25)$

$a^2+b^2 \le 25$ — круг с центром $(0;0)$ и радиусом 5. $(25 \le -8a-6b)$

$a^2+b^2 \le -8a-6b$; $a^2+8a+b^2+6b \le 0$; $(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$ — круг с центром $(-4;-3)$ и радиусом 5. $(-8a-6b \le 25)$.



то есть. $AH = \sqrt{2}$.

$$HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$$
$$CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$$
$\Rightarrow$ R мин цилиндра при $CD = \sqrt{34} + \sqrt{47}$

Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 25, \\ a^2 + b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \end{cases} \quad S(M).$$

~~M - множество~~ Зададим M по-другому:

Для пары (a, b): $a^2 + b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$.

Построим множество точек $(x; y)$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 25$. После объединим все полученные множества;.

Заметим, что (множество) точки с $(x; y)$: $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 25$;

это круг в центром в $(a; b)$ и $r = 5$.

Теперь, зададим множество ~~множество~~ ~~$N = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$~~ ~~$\{a, b \in \mathbb{R}^2 \mid \min(-8a-6b, 25)\}$~~

$$N = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid \min(-8a-6b, 25)\}.$$

$$a^2 + b^2 \le \min(-8a-6b, 25) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 + b^2 \le 25 \\ 25 \le -8a-6b \end{cases} \\ \begin{cases} -8a-6b \le 25 \\ a^2 + b^2 \le -8a-6b \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(a+4)^2 + (b+3)^2 = a^2 + b^2$$

Мы знаем, что множество точек (a, b): $a^2 + b^2 \le 25$ — круг с центром $(0; 0)$ и $r = 5$;

Теперь найдём точки, удовлетворяющие 2-му неравенству:

$a^2 + b^2 \le -8a - 6b$; $a^2 + 8a + b^2 + 6b \le 0$; $(a+4)^2 + (b+3)^2 \le 25$; круг с центром $(-4; -3)$ и радиусом $r = 5$.

21100572 (U284497 M1304878)

$$\begin{cases} a_1^2+16a_1d+8a_1d+128d^2>14a_1+91d+12 \\ a_1^2+14a_1d+10a_1d+140d^2<14a_1+91d+47 \end{cases}$$

Черновик

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1d+128d^2>14a_1+91d+12 \\ a_1^2+24a_1d+140d^2<14a_1+91d+47 \end{cases}$$

$12d^2<35$

$d^2<\frac{35}{12}$ $\quad d<\sqrt{\frac{35}{12}}=\sqrt{2\frac{11}{12}}$

$d=1$

$a=\frac{-5\pm\sqrt{23}}{2}$

$$\begin{cases} a_1^2+24a_1+128>14a_1+\underbrace{91+12}_{103} \\ a_1^2+24a_1+140<14a_1+\underbrace{91+47}_{138} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+2<0 \end{cases} \quad \begin{cases} t+25>0 \\ t+2<0 \end{cases} \quad \begin{cases} t>-25 \\ t<-2 \end{cases}$$

$(a_1+5)^2>0$ $\quad a_1\neq-5$

$a_1^2+10a_1+2<0$ $\quad a_1\in[-9;-1]$

$a_1=-5\pm\sqrt{25-2}=-5\pm\sqrt{23}$ $\quad a_1\in(-5-\sqrt{23};-5+\sqrt{23})$

$-5-\sqrt{23}$

$-\sqrt{23}\geq-5$

$\frac{-5-\sqrt{23}}{2}\geq-4$

$-5-\sqrt{23}\geq-8$

$4<\sqrt{23}<5$

$\frac{-5-\sqrt{23}}{2}$ $\quad -1 \quad \frac{-5+\sqrt{23}}{2}$

$-5 \quad -4 \quad 0$

$\boxed{a_1\in\{-4;-3;-2;-1\}}$

$\frac{-5+\sqrt{23}}{2}<0$

$\frac{-5+\sqrt{23}}{2}\geq-1$

$-5+\sqrt{23}\geq-2$

$\sqrt{23}\geq3$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100572**

ID профиля: **284497**

Вариант 19

Черновик

$НОД(a;b;c) = 21; = 3 \cdot 7.$

$НОК(a;b;c) = 7^{17} \cdot 7^{15}$

$НОД(a;b;c) = 3 \cdot 7$

$НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$

① $\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, ② $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$,

③ $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

$\frac{x}{2} > 1$; $x > 2$, $x \neq 4$

$\frac{x}{2} \neq 2$

$\frac{x}{2} > \frac{1}{4}$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 0$; $x > \frac{1}{2}$

$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \neq 1$; $x \neq \frac{5}{2}$

$x - \frac{11}{4} > 0$; $x > \frac{11}{4}$; $x > \frac{11}{4}$

$x - \frac{11}{4} \neq 1$; $x \neq \frac{15}{4}$

ОДЗ: $\boxed{x \in (2\tfrac{3}{4}; +\infty),\ x \neq 4;\ x \neq 3\tfrac{3}{4};\ x \neq 2{,}5;}$

①

$2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$.

②

$\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

③

$2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$

$\log_a(b) = \log_b c$;

$\log_b(c)$

$\log_c(a)$

$\log_a b$ ~~log~~

$\log_a(b) = \log_c(a)$

$\log_a b = \frac{\log_a a}{\log_a c}$

$\log_a b \cdot \log_a c = \log_a a$

$\log_a b \cdot \log_a c = 1$;

$\log$

$a = 3 \cdot 7 \cdot 3^{a'} \cdot 7^{b'}$

$b = 3 \cdot 7 \cdot 3^{c'} \cdot 7^{d'}$

$c = 3 \cdot 7 \cdot 3^{k'} \cdot 7^{d'}$

$a = 3^c \cdot 7^e$

$b = 3^k \cdot 7^l$

$c = 3^m \cdot 7^n$

$a = 3 \cdot 7^e$

$b = 3^k \cdot 7$

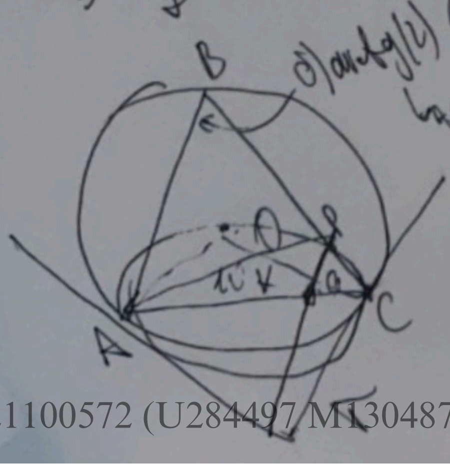
$c = 3^m \cdot 7^n$

$НОК = 3^{max(k,m)} \cdot 7^{max(l,n)}$

$k/m = 17$

$l/n = 15$.

Ответ: 4?



$\frac{AK}{KC} = \frac{10}{6}$; $\angle AK = \angle AKC$

$3AK = 5KC$

$t^3 + t^2 = 1$

$t^3 + t^2 - 1 = 0$

$7020 - 468$

$7488 + 576 = 8064$

$15 \times 13 = 45,\ 15,\ 195$

$39 \times 12 = 78,\ 39,\ 468$

$78 + 390 = 468$

Чистовик

№5

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right),\ \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right),\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2.$$

$$\text{ОДЗ:}\begin{cases}\frac{x}{2}-1\neq 0;\ x\neq 2;\\ \left(\frac{x}{2}-1\right)^2\neq 1;\ x\neq 4;\ x\neq 0;\\ x-\frac{11}{4}>0;\ x>2\frac{3}{4};\\ x-\frac{11}{4}\neq 1;\ x\neq\frac{15}{4}=3\frac{3}{4};\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0;\ x>\frac{1}{2};\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1;\ x\neq\frac{5}{2};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 4;\\ x>\frac{11}{4};\\ x\neq\frac{5}{2};\\ x\neq\frac{15}{4}.\end{cases}$$

(работаем в D)

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right);$$

$$\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right);$$

$$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right);$$

Заметим, что их произведение равно:

$$2\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=2\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)\cdot\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2;$$

То есть $t^2\cdot(t+1)=2$, ~~[illegible]~~ где за t обозначены равные числа

$t^3+t^2=2$; тогда $t^3+t^2-2=0$;

$(t-1)(t^2+2t+2)=(t-1)((t+1)^2+1)=0$

$t=1$

$t+1=2$

Рассмотрим 3 случая: 1) $\begin{cases}\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=2\cdot\log_{\left(x-\frac{11}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-1\right)=\\ 2\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)=2.\end{cases}\Leftarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4}\Leftrightarrow x=5$

подставим в 1. равенство системы

Чистовик

~~№~~ Задача № 5 (продолжение)

$\frac{1}{2}\log_{1,5} 2{,}25 = 1$ (верно)

$2 \cdot \log_{\frac{9}{4}} 1{,}5 = 1.$ (верно)

2 случай: $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = 2\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right) = 1; \\ 2\cdot\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x-\frac{11}{4} = \frac{x}{2}-1 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

проверим 1 равенство: $\frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{3}{4}}\frac{3}{2} = 1$ (неверно)

3 случай: $\begin{cases} 2\cdot\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2\cdot\log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right) = 1; \\ \frac{1}{2}\log_{(\frac{x}{2}-1)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right) = 2. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \log_{(\frac{x}{2}-\frac{1}{4})}\left(x-\frac{11}{4}\right);$

$\log_{(x-\frac{11}{4})}\left(\frac{x}{2}-1\right) = \frac{1}{2};$ ~~...~~ $\sqrt{x-\frac{11}{4}} = \frac{x}{2}-1;$

$x-\frac{11}{4} = \frac{x^2}{4}-x+1;$ $\frac{x^2}{4}-2x+\frac{15}{4}=0;$ $x^2-8x+15=0,$ $(x-5)(x-3)=0$

Проверим $x=5$ и $x=3$: 1) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{4} = 4$ (неверно) $\leftarrow x=3$

(но оно уже было и подходило)

2) $\log_{\frac{3}{2}}\frac{9}{4} = 4$ (неверно) $\leftarrow x=5.$

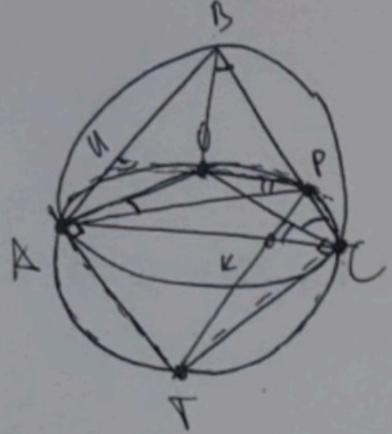
Т.о., что мы имеем: $x=5$

Ответ: $\{5\}$.

21100572 (U284497 M1304879)

Чистовик

№ 6.



Центр внутри △ABC

(т.к. TC и AT - касательные)

заметим, что угол OCT равен ~~[illegible]~~ углу OAT и равен 90° ⇒

⇒ AOCT - вписанный четырех-к ⇒ T принадлежит второй окружности

O - центр описанной окружности ⇒

⇒ $\underbrace{\widehat{OBC} = \widehat{OCB}}_{\text{опираются на равные дуги}} = \underbrace{\widehat{OCP} = \widehat{OAP}}_{\text{опираются на равные дуги}}$ ~~[illegible]~~.

$\widehat{OPB}$ - внешний к углу $\widehat{OPC}$ ⇒ угол $\widehat{OPB} = 180^\circ - \widehat{OPC} =$

$= \widehat{CAO}$ ($\widehat{AOPC}$ - вписанный).

Угол $\widehat{CAO} = \widehat{ACO}$ т.к. $AO = OC$ - радиусы, угол $\underbrace{\widehat{ACO} = \widehat{APO}}_{\text{опираются на равные дуги}}$ ~~[illegible]~~

~~вписанные~~ ~~AOPC~~

Тогда $\widehat{OPB} = \widehat{CAO} = \widehat{ACO} = \widehat{APO}$;

~~Угол $\widehat{OAP} = \widehat{OPB}$; $\widehat{AOB}$ $\widehat{AOP} = \widehat{OPB}$~~ ~~⇒ $\widehat{AOP} = \widehat{POB}$ PO - общая $\widehat{APO} = \widehat{BOB}$~~ ~~[illegible]~~ ⇒

общая дуга

⇒ $\widehat{AOP} = \widehat{BOP}$ ⇒ △APB - р/б.

TAPC - вписанный ⇒ угол $\widehat{TPA} = \widehat{TCA}$

угол $\widehat{TCA} = \widehat{TAC}$ т.к. T - пересечение касательных.

$\widehat{TAC} = \widehat{TPC}$ ⇒ $\widehat{APT} = \widehat{TPC}$. $\left.\begin{array}{l} S(CPK) = \frac{1}{2} \cdot \sin\widehat{KPC} \cdot KP \cdot PC \\ S(APK) = \frac{1}{2} \cdot \sin\widehat{APK} \cdot KP \cdot AP \end{array}\right\} \Rightarrow$

Чистовик

№6 (прод-ие)

$\Rightarrow \frac{S(CPK)}{S(APK)} = \underbrace{\frac{\sin \widehat{KPC}}{\sin \widehat{APK}}}_{=1} \cdot \frac{PC}{AP} \Rightarrow \frac{PC}{AP} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5PC = 3AP;$

$\triangle APB$ – равнобедренный $\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{S(APC)}{S(APB)} = \frac{CP}{PB} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow S(APB) = \frac{5}{3} S(APC) = \frac{5}{3} \cdot 16 \Rightarrow S(ABC) = S(APC) + S(APB) = 16 \cdot \frac{8}{3} =$

$= \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}$

Ответ: а) $42\frac{2}{3}$.

б) PO – биссектриса равно-го $\triangle APB \Rightarrow PO \perp AB$.

IH – осн. высота. 3 $AB = 2x \Rightarrow HB = x \Rightarrow PH = HB \cdot tg\,\widehat{ABC} = 2x;$

$PB = \sqrt{PH^2 + HB^2} = x\sqrt{5}$

$AP = PB \Rightarrow AP = x\sqrt{5}$.

$\frac{AP}{PC} = \frac{5}{3} \Rightarrow PC = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot x$

$PH = 2x,\ AB = 2x \Rightarrow S(APB) = 2x^2$

$S(APB) = \frac{80}{3}$, то $2x^2 = \frac{80}{3}$; $x^2 = \cancel{16}\ \frac{40}{3}$; $x = \sqrt{\frac{40}{3}} = \frac{2\sqrt{30}}{3}$;

$AP = PB = \frac{10\sqrt{6}}{3}$; $CP = 2\sqrt{6}$; $S(ABC) = \frac{1}{2} \sin \widehat{APC} \cdot AP \cdot PC \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \widehat{APC} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \widehat{APC} = \pm \frac{3}{5}$.

21100572 (U284497 M1304879)

Чистовик

№ 4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21; \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15}. \end{cases}$$

$НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \Rightarrow$ в составе разложения простые делители (чисел a, b, c) только 3 и 7.

Пусть $a=3^{a_1}\cdot 7^{a_2}$; $b=3^{b_1}\cdot 7^{b_2}$; $c=3^{c_1}\cdot 7^{c_2}$;

$НОД(a;b;c)=3\cdot 7 \Rightarrow$ все показатели хотя бы 1.

Хотя бы одно из чисел a_1, b_1, c_1 равно единице т.к. иначе $НОД(a;b;c)$ делился бы на 9. С другой стороны одно из них равно 17, т.к. $НОК(a;b;c) \vdots 3^{17}$ и $НОК(a;b;c) \not\vdots 3^{18}$, то $(a_1, b_1, c_1)=(1, t, 17)$ где $t\in[1;17]$. Абсолютно аналогично можно показать, что $(a_2, b_2, c_2)=(1, K, 15)$, где $K\in[1;15]$.

Если $\begin{cases} t\neq 1 \\ t\neq 17 \\ K\neq 1 \\ K\neq 15 \end{cases}$, то количество способов для фиксированных t и K равно: $(3!)^2$, потому что мы независимо выбираем степени вхождения 3 и 7 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего способов $15\cdot 13\cdot (3!)^2$, т.к. t принимает 15 ~~2~~ раз п значений, K — 13.

Если $\begin{cases} t=1 \text{ или } t=17 \\ K\neq 1 \text{ и } K\neq 15 \end{cases}$: способов $3\cdot 3!$, то есть всего способов:

$2\cdot 13\cdot 3\cdot 3!$

т.к. $\left[\begin{matrix} t=1; \\ t=17. \end{matrix}\right.$ $\quad \underbrace{K\in[2;14]}_{13 \text{ значений}}$

$$\begin{array}{r} 53 \\ \times 195 \\ 36 \\ \hline 1170 \\ 585 \\ \hline 7020 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Посчитаем: } 15\cdot 13\cdot (3!)^2 = 195\cdot 36 = 7020 \\ &2\cdot 13\cdot 3\cdot 6 = 12\cdot 39 = 468 \end{aligned}}$$

Если $K=1$ или $K=15$ и $\begin{cases} t\neq 1 \\ t\neq 17 \end{cases}$: способов всего $15\cdot 2\cdot 3!\cdot 3$

$t\in[2;16]$ $\quad K$

Если $t=1 / t=17$ и $K=1/K=15$: способов: $2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$

$t \quad K$

Суммарно: $7020+468+\underbrace{15\cdot 2\cdot 3!\cdot 3}_{540}+\underbrace{2\cdot 2}_{36}\cdot 3\cdot 3 = 8064$

Ответ: 8064 ①