Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100551**

ID профиля: **289374**

Вариант 19

Чистовик В-19
№1

1) посл. возр-я $\Rightarrow d>0$. Содержит только целые числа $\Rightarrow$ $a_1; d \in \mathbb{Z}$;

2) Для прогрессии $a_i = a_1 + d(i-1)$

$$S_i = \frac{(2a_1 + d(i-1))i}{2} \Rightarrow S = \frac{(2a_1+13d)\cdot 14}{2} = 14a_1 + 91d$$

$\Rightarrow a_9 a_{17} = (a_1+8d)(a_1+16d) = a_1^2 + 24da_1 + 128d^2$

$a_{11}a_{15} = a_1^2 + 24da_1 + 140d^2$

$\Rightarrow \begin{cases} a_9 a_{17} > S+12 \\ S+47 > a_{11}a_{15} \end{cases} \Rightarrow$

$a_9 a_{17} + \cancel{S} + 47 > a_{11}a_{15} + \cancel{S} + 12$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{24da_1} + 128d^2 + 35 > \cancel{a_1^2} + \cancel{24da_1} + 140d^2$

$12d^2 < 35$

$d^2 < \frac{35}{12}$. Но $d>0 \Rightarrow d < \sqrt{\frac{35}{12}} < \sqrt{\frac{36}{12}} = \sqrt{3} \Rightarrow d < \sqrt{3} \approx 1{,}7$.

$\Rightarrow$ учитывая $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{d=1}$

$\Rightarrow$ 3) $a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91\cdot 1 + 12$

$a_1^2 + 10a + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z} / \{-5\}$

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$(a_1+5)^2 < 23 \Rightarrow a_1 \in \{-9; -8; -7; \dots -1\} \Rightarrow$

1

21100551 (U289374 M1297023)

Чистовик

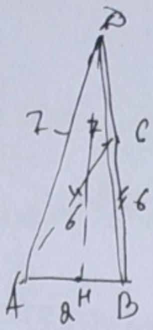
Ответ $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

2

21100551 (U289374 M1297023)

Чистовик В-19

№2



Пусть H - середина AB.

Т.к. $\triangle ABC$ - равнобед ($AC=BC$)

и $\triangle ABD$ равнобед ($AD=BD$)

$\Rightarrow DH$ и CH - медианы, высоты, и бис-сы соотв $\triangle \Rightarrow$

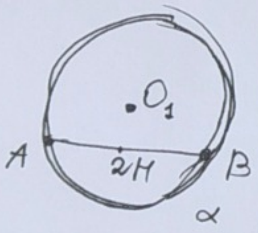
$DH \perp AB$, $CH \perp AB \Rightarrow DC \perp AB$ по теореме о 3-х пер-х.

И вообще DCH - плоскость симметрии данного тетраэдра.

2) Пусть OO' - ось цилиндра. т.к $CD \parallel OO' \Rightarrow AB \perp OO'$

$\Rightarrow$ рассмотрим сечение (α) цилиндра $\perp OO'$, содержащее AB

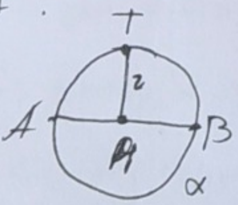
(Оно есть т.к. $AB \perp OO'$) $\Rightarrow$



Заметим, что радиус цилиндра в таком случае $\geq \frac{AB}{2}$ иначе такой хорды быть не может. т.к. диаметр - наиб хорда.

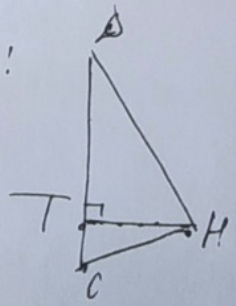
$\Rightarrow$ Если радиус цилиндра наименьший, то AB - диаметр.

и $r = 1$!



Пусть $T = \alpha \cap CD$. т.е. HT - общий перпендикуляр между скрещ прямыми CD и AB.

Рассмотрим $\triangle DCH$!



Получаем, из ~~равнобед~~ прямоуг. $\triangle A\cancel{B}C \Rightarrow CH = \sqrt{A\cancel{B}^2 - AH^2}$ (т. Пифагора)

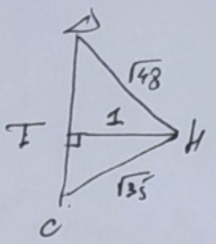
$= \sqrt{36-1} = \sqrt{35}$

Аналогично $\cancel{AH} \cdot D = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$.

Чистовик

Заметим, что существуют 2 случая!

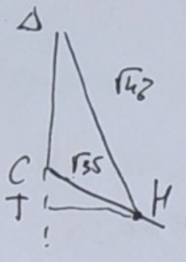
а)



$\triangle DHT$ — прямоуг $\Rightarrow DT = \sqrt{(\sqrt{48})^2-1} = \sqrt{47}$

аналогично $\Rightarrow CT = \sqrt{34}$

б)



а) $CD = DT + TC = \boxed{\sqrt{34}+\sqrt{47}}$

б) $CD = DT - TC = \boxed{\sqrt{47}-\sqrt{34}}$

Ответ $\sqrt{47}-\sqrt{34}$ и

$\sqrt{47}+\sqrt{34}$

Покажем, ... области ... ьных ... r(ω) с центром на ...

Чистовик В-19

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b;25) & (2)\end{cases}$$

Разберемся со 2-м н-ем

(2)=> а) $-8a-6b\le 25$ =>

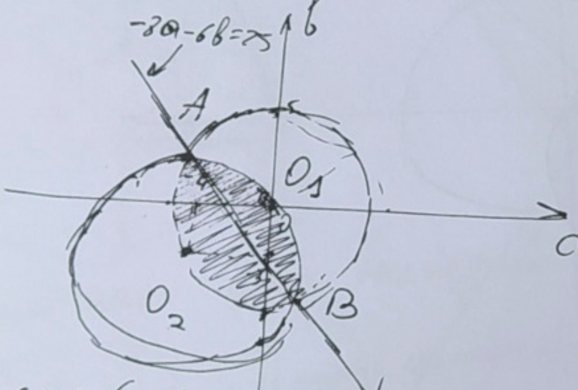
$a^2+b^2\le -8a-6b$

$(a+4)^2+(b+3)^2\le 25$

б) $-8a-6b\ge 25$

$a^2+b^2\le 25$

Изобразим это на п-ти b(a)



Заметим, что (a;b) удовлетворяющие этому н-ву существуют только в области пересечения 2-х окт-ей с

1) центр(0;0) r=5

2) центр(-4;-3) r=5, а прямая $-8a-6b=25$ -> их рад. ось

(Действительно, рад ось => ГМТ, что степень точки (a;b) отн 2-х окт-ей равны: $d_1^2-r_1^2=d_2^2-r_2^2$

$(a+4)^2+(b+3)^2-25$ -> степень отн 2-ой

a^2+b^2-25 -> отн 1-ой

=> $\boxed{8a-6b=25}$)

Тогда разберемся как получить M: для всех пар (a;b) удовл. (2) найдем все (x;y) удовл. 1.

5

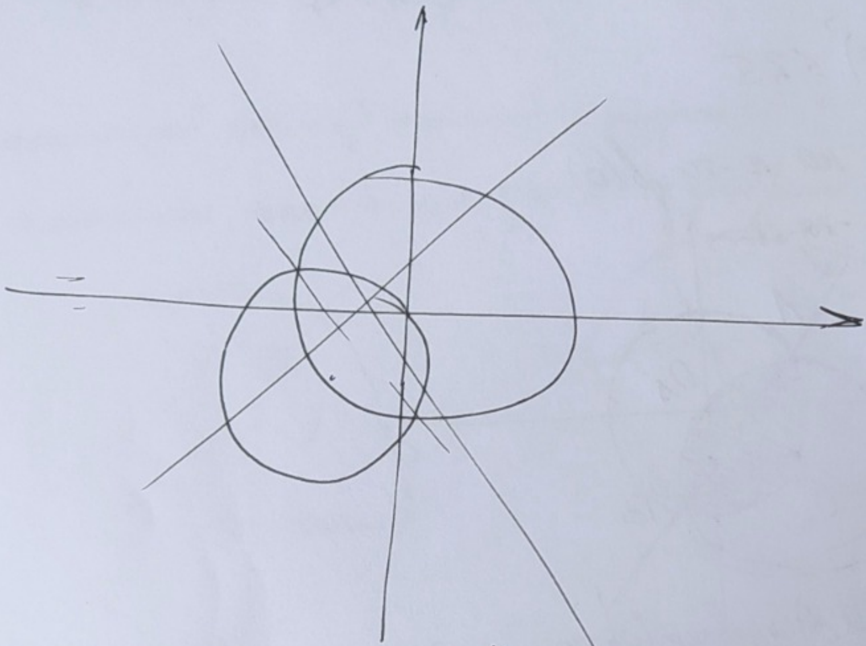
21100551 (U289374 M1297023)

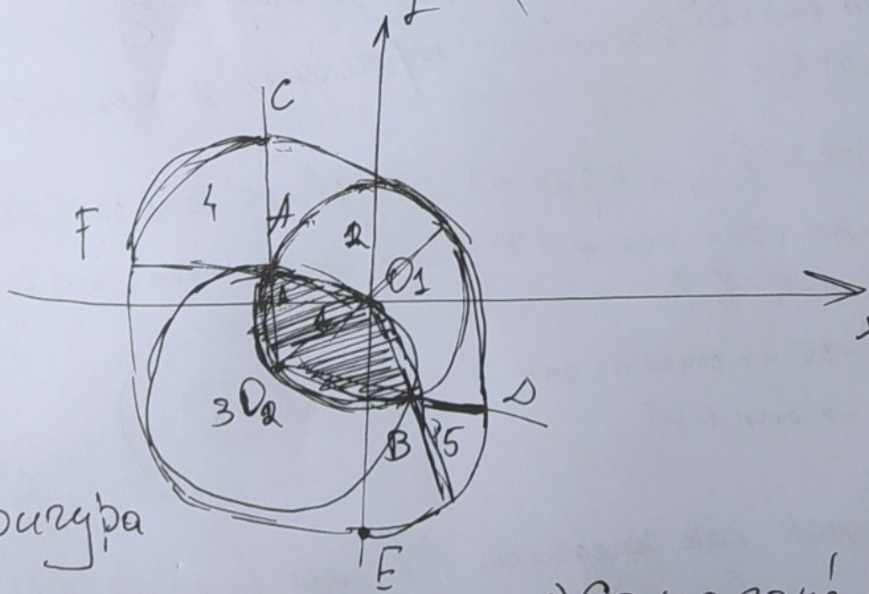
Чистовик

3

Заметим, что $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$ — ур-е ~~ок-ти~~ круга с $r=5$ и центров в $C(a;b)$.

То есть т.к мы нашли все $(a;b)$, то на п-ти $y(x)$ ~~о~~ гмт центров ок-тей будет совпадать с фигурой в п-ти $b(a)$. Тогда нам надо найти объединение всех кругов радиуса 5 с центров в закр. области. (3)





Эта фигура состоит из 5-ти частей 1) Сама закр. область
2) сектор круга радиуса 10 с центром в O_2 Ω_2 ограничен $C: (O_2+2\overrightarrow{O_2A})$ и $D(O_2+2\overrightarrow{O_2B})$

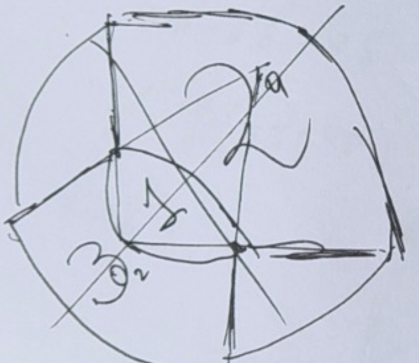
Покажем, что это ~~чистовик~~ действ. так

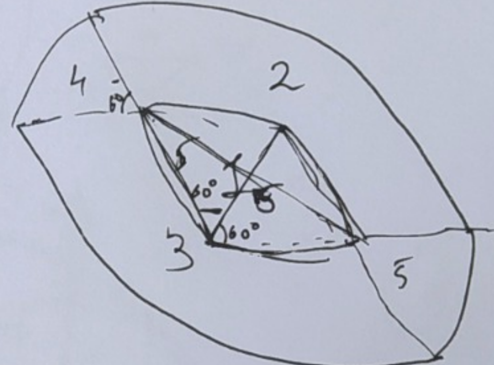
а) ~~рассмотрим произвольных кругу~~ круг → области $r(\omega)$ с центром на дуге $\overset{\frown}{AO_1B}$. пусть c' его центр., заметим, что $c'O_2 = 5 \Rightarrow$ круг касается большого (Ω_2) ~~т.к. ω~~ ~~∀ω, удовл. (3)~~ а значит все его точки внутри большого

б) точка → круг. пусть T – произв. точка в области, тогда найдем круг: пусть $O' = TO_2 \cap \overset{\frown}{AO_1B}$. т.к. $TO_2 \leq 10 \Rightarrow O'O_2 = 5$
$\Rightarrow TO' \leq 5 \Rightarrow T \in$ круг с центром в O_2 и $r = 5$

3) Аналогичный сектор только с центром O_1, $r = 10$, ограничен FE.

4, 5) оставшиеся сектора для кругов с центрами в A и B





Схематично это выглядит так!

Считаем $S = \sum_{i=1}^{5} S_i$. Площадь сектора круга: $S_{сек} = \frac{\alpha r^2}{2}$

$S_1 = \cancel{2 \cdot \left(\frac{\frac{2\pi}{3}5^2}{2}\right)}$ – площадь пересечения кругов:

$$S_1 = 2\left(\frac{\frac{2\pi}{3}r^2}{2} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = 25\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$S_2 = S_3 = \frac{\frac{2\pi}{3}\cdot(10^2 - 5^2)}{2} = \frac{\pi}{3}\cdot 75 = 25\pi$$

$$S_4 = S_5 = \frac{\frac{\pi}{3}\cdot 5^2}{2} = \frac{25\pi}{6}$$

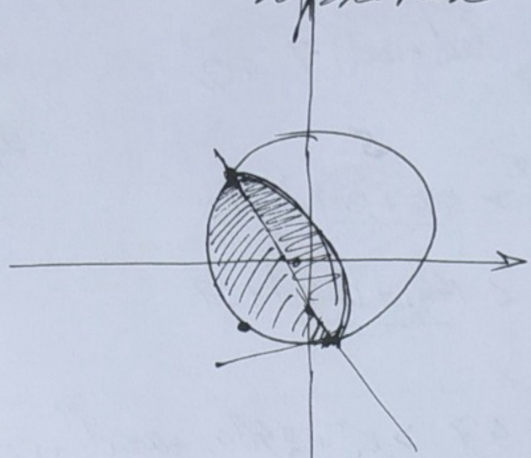
Ответ! ↓

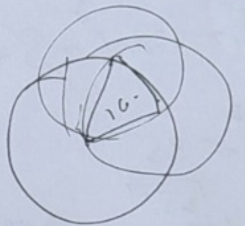
$$S = \frac{50\pi}{6} - \frac{25\sqrt{3}}{2} + 50\pi + \frac{50\pi}{6} = \boxed{\frac{200\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}}$$

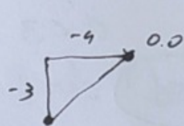
7

21100551 (U289374 M1297023)

Чернетка







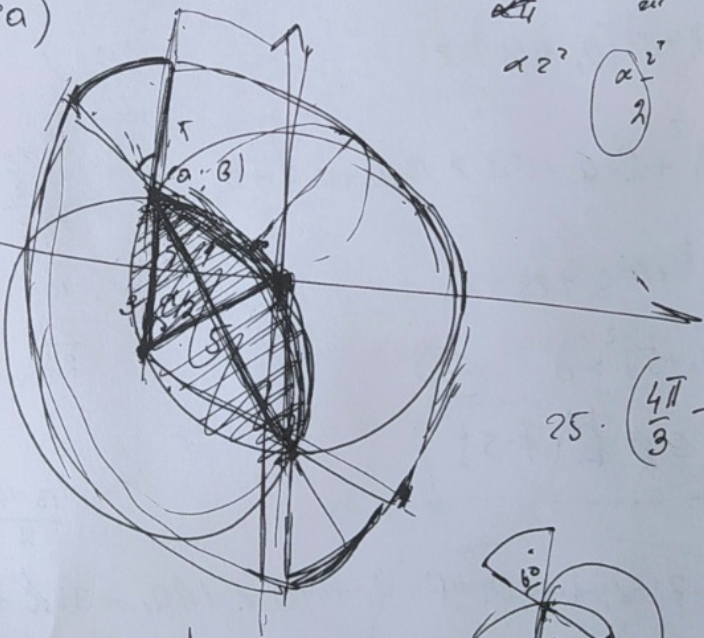
$-8a-6b=25$

$b=\frac{-1}{6}(25+8a)$

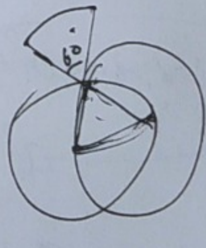
$a^2+b^2=25$

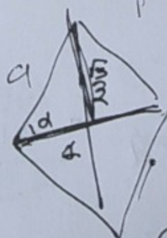
$\alpha\, 2^2$

$\frac{\alpha}{2}^{2}$



$25\cdot\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$





$\frac{a^2}{2}$ $\quad \frac{a^2}{2}\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{50\pi}{3}+\underline{150\pi}$

Черновик

$(a_1+8d)(a_1+16d) > (2a_1+13d)\cdot 7 + 12$

S

$a_1, d \in Z$

$d>0$

$a_1^2+8da_1+16da_1+128d^2 > 14a_1+13\cdot 7d+12$

$a_1^2+10da_1+14da_1+140d^2 < 14a_1+13\cdot 7d+47$

$\cancel{a_1^2}+24da_1+128d^2+\cancel{S}+47 > \cancel{a_1^2}+24da_1+140d^2+12+\cancel{S}$

$12d^2<35$

$d<\sqrt{\frac{35}{12}}<\sqrt{\frac{36}{12}}=\sqrt{3}\approx 1{,}5$, $d>0$

$\sqrt{2}$

$d^2<3$

$d=1$ $d=1$

$(a_1+8)(a_1+16)>$

$13\times 7 = 91$

$a_1^2+24a_1+128>14a_1+13\cdot 7+12$

$128-12=116$

$a_1^2+10a+25>0$

$116-91=25$

$(a_1+5)^2>0$ -5

$\boxed{a_1 \in \cancel{Q}\,\cancel{Z} \setminus \{-5\}}$

$0d+\underbrace{d+2d+3d+13d}$

$\frac{13\cdot 14}{2}d$

$-9;-8;-7;-6;-4;-3;$ $a_1^2+24a_1+140<14a_1+91d+47$

$a_1^2+10a+2<0$

$140-91=49$

$49-47=2$

a $-5\pm\sqrt{25-2}$

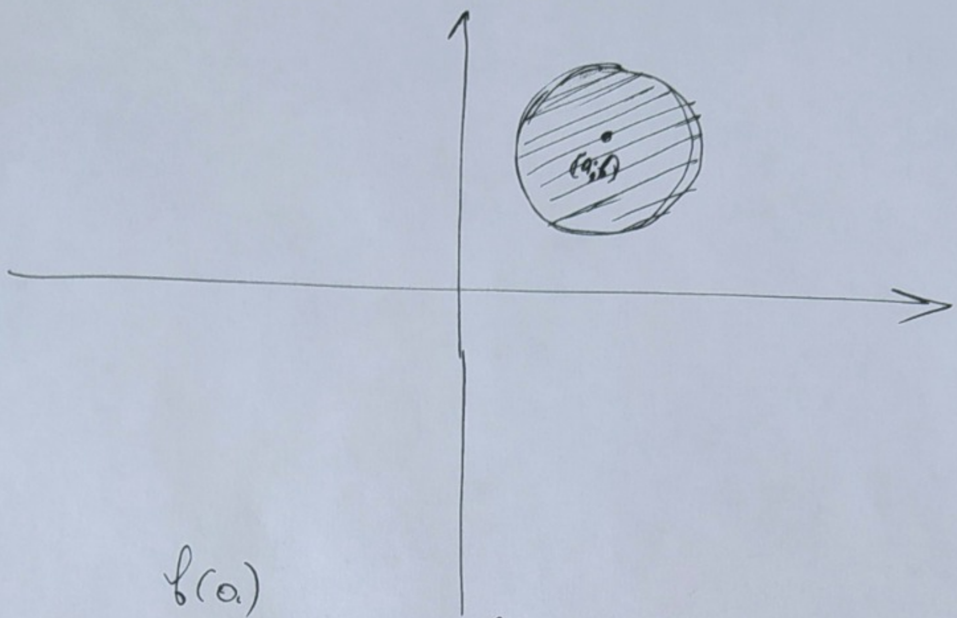
$(a_1+5)^2<23<25$

0

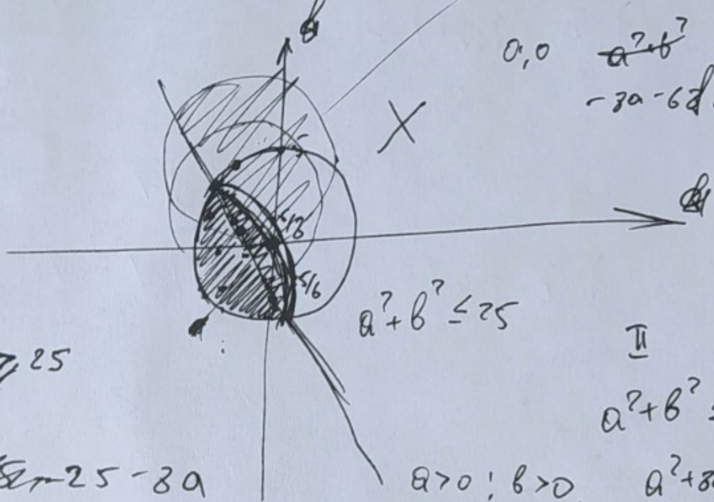
21100551 (U289374 M1297023)

$a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$ Черновик

В-19!



b(a)



0,0 $\cancel{a^2+b^2}$

$-8a-6b < 25$

$-8a-6b \ge 25$

$a^2+b^2 \le 25$

II

$a^2+b^2 \le -8a-6b$

$6b \le -25-8a$

$a>0;\ b>0$ $a^2+8a+b^2+6b \le 0$

$-8a-6b<0<25$

$b \le \frac{-25-8a}{6}$

$a^2+b^2 < 0$ $(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$

$-8a-6b=25$

$b=\frac{-8a-25}{6}$ $\frac{-25}{6}$

Черновик

$a_i = a_1 + d(i-1)$

$a, d \in \mathbb{Z}$

$a_2 = a_1 + d$

$d > 0$

1 2 3 4 . . . 14

a_1

$S = \frac{(a_1 + a_{14})14}{2}$

$\frac{1+14 \cdot 14}{2}$

$a_9\, a_{17} =$

$na_1 + \frac{(n-1)d}{2}$

$= (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > \frac{(a_1 + a_1 + 13d)14}{2}$

1 3 5 7 $\quad 2n-1$

$2 \cdot 14 - 1$

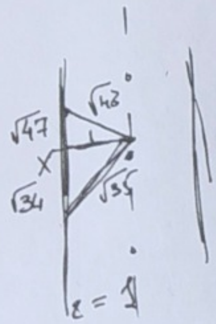
$28 - 1 = 27$

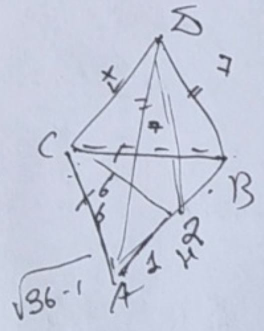
$= (2a_1 + 13d)7 + 12$

$\frac{27 \cdot 14}{2}$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < (2a_1 + 13d)7 + 47$

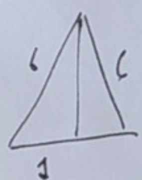
$\frac{28 \cdot 14}{2} = 28 \cdot 7 = 4 \cdot 7 \cdot 7 = 14^2$



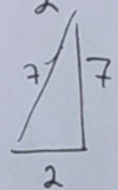


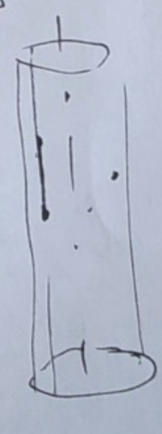
$\triangle ABC$

ABD



3.

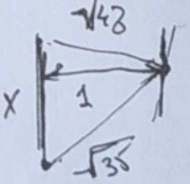


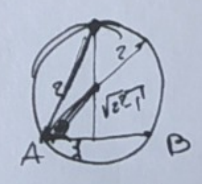


$\sqrt{34} + \sqrt{47}$

$CD \perp AB$

CD

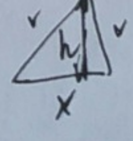




$2 + \sqrt{2^2 - 1} \to 0$

$2 + \sqrt{2^2 - 1}$

$2 - \sqrt{\ }$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100551**

ID профиля: **289374**

Вариант 19

№4 В-19 Шистовик

1) Докажем, что числа имеют вид $3^{n} \cdot 7^{k}$, $n, k \in \mathbb{N}$

Предположим, что это не так т.е. $\exists\, p_1 :$ $a \vdots p_1$, $\begin{cases} p_1 \ne 3^n \\ p_1 \ne 7^n \end{cases}$

$\Rightarrow$ НОК$(a; b; c) \vdots p_1$ - противоречие

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3^{n_1} 7^{k_1} \\ b = 3^{n_2} 7^{k_2} \\ c = 3^{n_3} 7^{k_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{НОД}(a; b; c) = 3^{\min(n_1; n_2; n_3)} 7^{\min(k_1; k_2; k_3)} \\ \text{НОК}(a; b; c) = 3^{\max(n_1, n_2, n_3)} 7^{\max(k_1 k_2 k_3)} \end{array}$$

т.е. $\begin{cases} \min(n_1 n_2 n_3) = 1 \\ \min(k_1 k_2 k_3) = 1 \\ \max(n_1 n_2 n_3) = 17 \\ \max(k_1 k_2 k_3) = 15 \end{cases}$ $\Rightarrow$ один из $n_1 n_2 n_3$ равен 1, другой 17, а третий - любой от 1 до 17

Аналогично для ~~этого~~ k

$\Rightarrow$ рассмотрим $n \Rightarrow$ есть по 3 тройки вида $1\ 17\ 17$
$1\ 1\ 17$

и по $3! = 6$ троек вида $1\ 17\ \lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ $\lambda \le 16$
$\lambda \ge 2$

$\Rightarrow$ всего для n $6 + 6 \cdot 15 = 6 \cdot 16 = 96$ троек

Аналогично для k есть $6 + 6 \cdot 13 = 6 \cdot 14 = 84$ тройки

А всего троек вида $(a; b; c)$: $96 \cdot 84 = \boxed{8064}$

Ответ 8064

1

Чистовик №6 В-19

Пусть $a = \frac{x}{2} - 1$

$b = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$c = \sqrt{x - \frac{11}{4}}$

Тогда числа это

$\log_{a^2} b$; $\log_c a$; $\log_b c^4$

ОДЗ $\begin{cases} a \neq 1 \\ a > 0 \\ c > 0 \\ c \neq 1 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases}$

Пусть 2 из них равны t,
а 3-е $t+1$ =>

$\log_{a^2} b \cdot \log_c a \cdot \log_b c^4 = t^2(t+1)$

$\frac{4}{2} \cdot 1 = t^2(t+1)$

$t^3 + t^2 = 2$ $\quad f(t) = t^3 + t^2$, $f' = 3t^2 + 2t$ => $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{2}{3} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{27} \end{array}\right.$ => $f(t) = 2$ - единств. решение

=> $t = 1$ (подбор)

=> проверим, когда $\begin{cases} \log_{a^2} b = 1 \to \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \to \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right. \\ \log_c a = 1 \to \sqrt{x - \frac{11}{4}} = \frac{x}{2} - 1 \to \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 3 \end{array}\right. \\ \log_b c^4 = 1 \to \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{11}{4}\right)^2 \to x = 3 \pm \sqrt{19} \end{cases}$

=> это возможно только при $x = 5$

=> $x = 5$ => $\log_b c^4 = \log_{\frac{9}{4}} \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 2$ => действительно

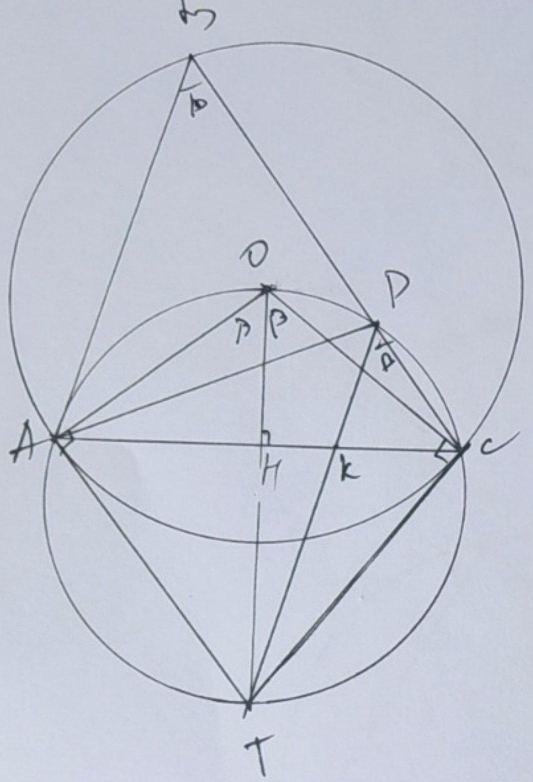
Ответ: 5

2

21100551 (U289374 M1297024)

Чистовик

N 6



1) Докажем, что T ∈ окр-ти ω_2 около AOC:

Возьмём ω' около AOT:

т.к ∠OAT прямой, то центр ω' на середине OT

Аналогично для ω'' около COT

$\Rightarrow \omega' = \omega'' = \omega_2$ ч.т.д.

(у ω' и ω'' общий центр и радиус $\frac{OT}{2} \Rightarrow \omega' = \omega''$ - содержат точк. AOC $\Rightarrow \omega_2 = \omega' = \omega''$)

$\Rightarrow \angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (как центральный)

OT - бис-са ∠AOC т.к. $OT \perp AC$, $AO = OC$

$\Rightarrow \angle COT = \beta \Rightarrow \angle CPT = \beta$ как опирающиеся на ту же дугу TC $\Rightarrow AB \parallel PK \Rightarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{CA}{CK}\right)^2 \cdot S_{PKC}$.

В △ APK и △ KPC есть общая высота из P на AC

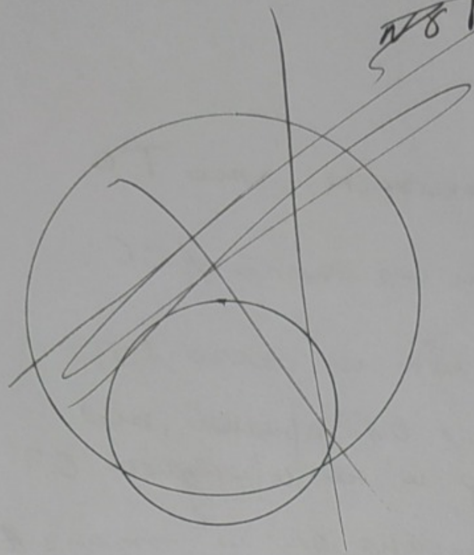
$\Rightarrow AK : KC = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = 10 : 6 = 5 : 3$

$\Rightarrow CK : CA = 3 : 8 \Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 6 = \frac{128}{3}$

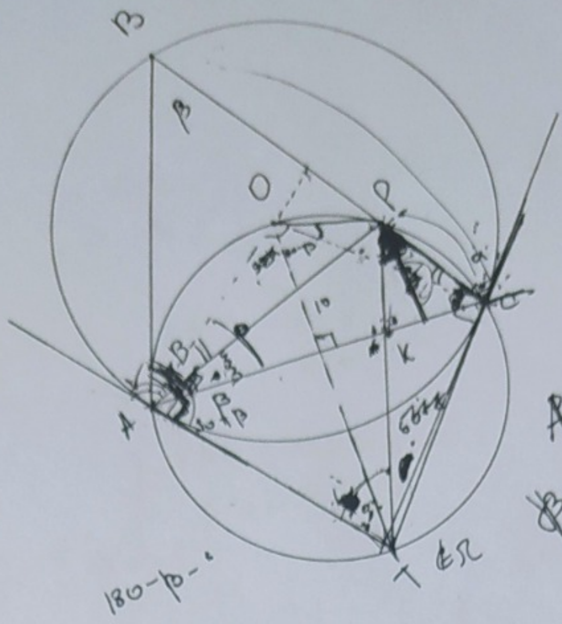
21100551 (U289374 M1297024)

~~Черновик~~

№8



Черновик



$t^3+t^2=2$

$t^2(t+1)=2$

$\boxed{t=1}$

AP

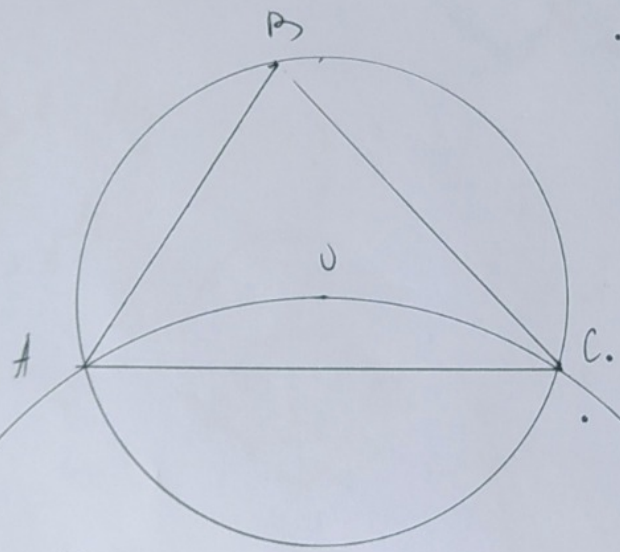
$\beta+\delta=\alpha$

$\Rightarrow \delta=\alpha-\beta$

$180-\alpha-\gamma$

$\alpha-180+\alpha+\gamma$

$2\alpha+\gamma-180^\circ$



$\frac{x^2}{4}-x+1=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{x^2}{4}-\frac{3x}{2}+\frac{5}{4}$

$x^2-6x+5=0$

$x=1$

$x=5$

$\frac{5}{4}, \frac{1}{4}$

$x^2+\frac{121}{16}-\frac{11x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{4}{16}$

$x^2-6x+\frac{125}{16}=0$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x^2}{4}-x+1$

$\frac{x^2}{4}-2x+\frac{15}{4}=0$

$\frac{3}{2}-\frac{1}{4}$

$9-\frac{125}{16}$

$9\cdot 4$

$144-125$

$\begin{array}{r} 144 \\ -125 \\ \hline \end{array}$

$3 \pm \sqrt{19}$

$x^2-8x+15=0$

5 3

$\begin{array}{r} 56 \\ \times 34 \\ \hline 384 \\ 768. \\ \hline 8064 \end{array}$

$\begin{array}{r} 334 \\ \times 56 \\ \hline 480 \end{array}$

$\begin{array}{r} 60 \\ \times 36 \end{array}$

$\begin{array}{r} 60 \\ \times 24 \\ \hline 304 \end{array}$

1 3 4

5 6 7.

8 9 10.

11 12 13.

14 15 16.

15

$\frac{\ln a}{2\ln b}$

$\frac{\ln b}{2\ln a} \longleftrightarrow \frac{\ln a}{\ln c}$ $\quad \frac{2\ln c}{\ln b}$ $\quad \log = \log + \log_a a$

$2\ln^2|a| = \frac{\ln b \ln c}{2}$ $\quad \frac{2\ln c}{\ln b} = \frac{\ln a}{\ln c} + 1$

$2\ln^2 c = \ln a \ln b + 1$

$\ln^2 a = \frac{\ln b \ln c}{2}$

$t^2(t+1) = 1$

$t^2 = \boxed{\frac{1}{t+1}}$

$t+1 = \frac{1}{t^2}$

$\frac{1}{2}\log_a b \quad \log_c a \quad 2\log_b c$

$\log_a b = \log$

$\frac{1}{8} \quad -\frac{1}{4}$

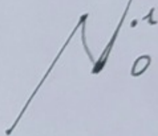
$\sqrt{\frac{1}{2}}$

$-\infty \; +\infty$

$t^3 + t^2$

$3t^2 + 2t = 0$

$t = 0 \quad t = -\frac{2}{3}$



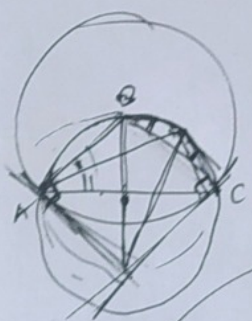
$a^{\ln a} = b^{\frac{\ln c}{2}}$

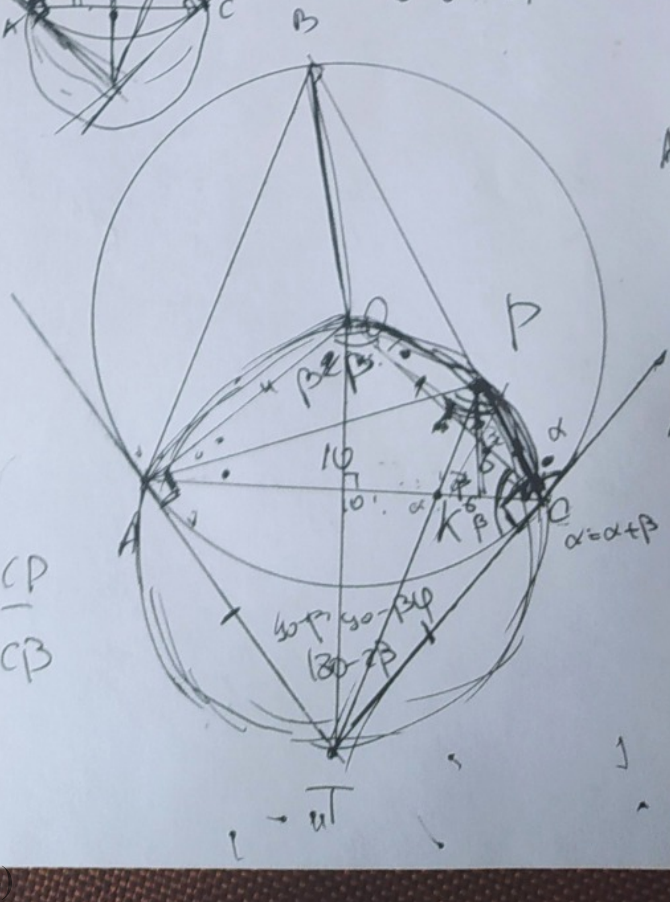
$-\frac{2}{3}$

$\frac{4}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

$\frac{1}{2}\log_a b = \log_c a$

$\sqrt{b} = a^{\log_c a}$





$ABC - ?$

$AP \cdot PC \sin 2\beta$

$\frac{AP}{PC}$

$\frac{CK}{CA} \cdot \frac{CP}{CB}$

$НОД(a;b;c) = 3 \cdot 7$

$НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$

$3^{a} \cdot 7^{6}$

$\min(a_1; a_2; a_3) = 1$

$\max(a_1; a_2; a_3) = 17$

1 1

17 ⋮

17 17

x 3!

15

1 17 $\frac{1}{17}$ x 17 x 15 3! 3!

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\log_{\sqrt{x-\frac{4}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\frac{x}{2}-1 \neq 1$

$x \neq 4$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0$

$\frac{x}{2} > \frac{1}{4}$

$x > \frac{1}{2}$

$\cancel{x > \frac{11}{4}}$

$x \neq \frac{11}{4}+1 = \frac{15}{4}$

$\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{1}{4}\right)$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4} \neq 1^2$ $\frac{x}{4} \neq \frac{5}{4}$

$x \neq 5$

$x \neq 2,5$

$\frac{1}{2}\log_a b = \log_c a$

$\frac{1}{2}\log_{|a|^2} b$ $\log_c a$ $2\log_b |c|^2$ $\frac{1}{2}\log_a b$

$\frac{1}{2}\log_{(a)^2} b = \log_c a$

$\log_a c \cdot \log_c b = \log_c a$

t

$t^2(t+1) = 1$

$\underbrace{t^3+t^2-1=0}$

$-8+4$

$t^3 - t^2 = 1$

21100551 (U289374 M1297024)